

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ
В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ СЛОЕ С ЭФФЕКТИВНЫМИ
ГИПОПЛАСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

Белорусский национальный технический университет

Минск, Беларусь

Уравнения для распространения волны возмущения в стратифицированном гранулированном слое с эффективными свойствами имеют вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(x_1) \frac{\partial V_2}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K_3(x_1) \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{K_3(x_1)} \cdot \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho(x_1)} \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} \right). \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения (1), (2) имеют переменные коэффициенты. Не существует общих аналитических методов для решения подобных уравнений. Лучевой метод является наиболее эффективным среди различных асимптотических методов для решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [2-5].

Для нестационарных волн применение этого метода корректно, если длина волны λ много меньше, чем изменение масштаба параметров эффективного слоя. Это имеет место, если неоднородность слоя изменяется вглубь монотонно.

Запишем решение уравнений (1), (2) в форме

$$V_2(x_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_2^{(n)}(x_1) f_n(t - \psi(x_1)); \quad (3)$$

$$T_{12}(x_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{12}^{(n)}(x_1) f_n(t - \psi(x_1)); \quad (4)$$

$$\frac{df_n(\xi)}{d\xi} = f_{n-1}(\xi), \quad (5)$$

где $\psi(x_1)$ – эйконал, $V_2^{(n)}(x_1)$, $T_{12}^{(n)}(x_1)$ – искомые величины.

Если $f_n(t - \psi(x_1)) = \frac{[t - \psi(x_1)]^n}{n!}$, тогда лучевые ряды (3), (4) имеют вид

$$V_2(x_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_2^{(n)}(x_1) \frac{(t - \psi(x_1))^n}{n!}; \quad (6)$$

$$T_{12}(x_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{12}^{(n)}(x_1) \frac{(t - \psi(x_1))^n}{n!}. \quad (7)$$

Если f_0 – функция Хевисайда $H(\tau)$, тогда функция f_n имеет вид

$$f_n = \frac{(t - \psi(x_1))^n}{n!} H(t - \psi(x_1)). \quad (8)$$

Подставляя (9) в (6), (7) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -[(\psi')^2 K_3 - \rho] V_2^{(n)} f_{n-2} - [2K_3 \psi' V_2^{(n)'} + (K_3' \psi') V_2^{(n)}] f_{n-1} + [K_3 V_2^{(n)''} + K_3' V_2^{(n)'}] f_n \right\} = 0, \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [(\psi')^2 K_3 - \rho] T_{12}^{(n)} f_{n-2} - [2K_3 \psi' T_{12}^{(n)'} + (K_3' \psi') T_{12}^{(n)}] f_{n-1} + [K_3 T_{12}^{(n)''} + K_3' T_{12}^{(n)'}] f_n \right\} = 0. \quad (10)$$

Для $n < 0$ должно быть $V_2^{(n)} = 0$, $T_{12}^{(n)} = 0$ т.к. коэффициент при f_0 равен 0

$$[(\psi')^2 K_3 - \rho] V_2^{(n+1)} - 2K_3 \psi' V_2^{(n)'} - (K_3 \psi')' V_2^{(n)} + K_3 V_2^{(n-1)''} + K_3' V_2^{(n-1)'} = 0, \quad (11)$$

$$[(\psi')^2 K_3 - \rho] T_{12}^{(n+1)} - 2K_3 \psi' T_{12}^{(n)'} - (K_3 \psi')' T_{12}^{(n)} + K_3 T_{12}^{(n-1)''} + K_3' T_{12}^{(n-1)'} = 0. \quad (12)$$

Для $n = -1$ получим $V_2^{(n)} = 0$, $T_{12}^{(n)} = 0$, но $V_2^{(0)} \neq 0$, $T_{12}^{(0)} \neq 0$ и поэтому з (11), (12) следует

$$(\psi'(x_1))^2 = \frac{\rho(x_1)}{K_3(x_1)} = C_S^{-2}(x_1), \quad (13)$$

где $C_S(x_1)$ – скорость сдвиговой волны.

Решение (13) записывается в виде

$$\psi(x_1) = \psi(x_{10}) \pm \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{dx_1}{C_S(x_1)}. \quad (14)$$

В формуле (14) берется знак + для волны, которая распространяется в направлении $+x_1$, и знак – для волны в направлении $-x_1$. Подставляя (14) в 1), (12) получим уравнения переноса для $V_2^{(n)}(x_1)$, $T_{12}^{(n)}(x_1)$. Уравнения (11), 2) с учетом (14) решаются в общем виде

$$V_2^{(n)}(x_1) = V_2^{(n)}(x_{10})W^{-1}(x_1, x_{10}) + \int_{x_{10}}^{x_1} V_2^{(n-1)}(\tau)W^{-1}(x_1, \tau)d\tau, \quad (15)$$

$$V_2^{(n-1)} = \frac{\pm 1}{2(\rho K_3)^{1/2}} \cdot \frac{d}{dx_1} [K_3 V_2^{(n-1)}], \quad W(x_1, x_{10}) = \left[\frac{\rho(x_1)k_3(x_1)}{\rho(x_{10})k_3(x_{10})} \right]^{1/4} \quad (16)$$

$$T_{12}^{(n)}(x_1) = T_{12}^{(n)}(x_{10})W(x_1, x_{10}) + \int_{x_{10}}^{x_1} P_{12}^{(n-1)}(\tau)W(x, \tau)d\tau, \quad (17)$$

$$P_{12}^{(n-1)} = \pm \frac{(\rho K_3)^{1/2}}{2} \frac{d}{dx_1} \left[\frac{T_{12}^{(n-1)'}}{\rho} \right], \quad W(x_1, \tau) = \left[\frac{k_3(x_1)}{k_3(x_{10})} \right]^{1/4}, \quad (18)$$

В формулах (15), (17) члены при $n = 0$ являются основными т.к. они описывают главную часть волновой энергии. Полагая $n = -1, 0$ в уравнениях (11), (12), получим уравнения (13), (14) и уравнения переноса

$$+ 2K_3\psi'V_2^{(0)'} + (K_3\psi'' + K_3\psi')V_2^{(0)} = 0, \quad (19)$$

$$+ 2K_3\psi'T_{12}^{(0)'} + (K_3\psi'' + K_3\psi')T_{12}^{(0)} = 0. \quad (20)$$

или преобразуя, получим закон сохранения энергии вдоль лучевой трубки

$$\left(K_3\psi'V_2^{(0)2} \right)' = 0, \quad (21)$$

$$\left(K_3\psi'T_{12}^{(0)2} \right)' = 0. \quad (22)$$

Выберем лучевую трубку в форме цилиндра с областью dS_0 в основании и с областью dS_L наверху, рис.1.

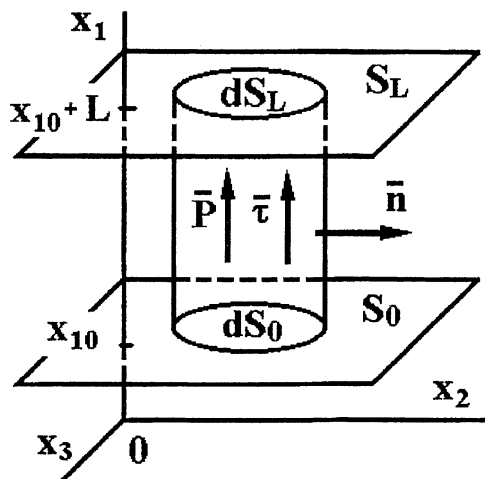


Рис. 1. Лучевая трубка в горизонтально стратифицированной среде

Выражения (21), (22) в случае неоднородной трехмерной среды записываются в виде

$$\nabla \cdot \bar{P}_2^{(0)} = 0, \quad \bar{P}_2^{(0)} = |u_2^{(0)}|^2 \bar{K}_\nu, \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \bar{P}_{12}^{(0)} = 0, \quad \bar{P}_{12}^{(0)} = |T_{12}^{(0)}|^2 \bar{K}_\sigma, \quad (24)$$

где $\bar{K}_\nu = \text{grad} \psi_\nu$, $\bar{K}_\sigma = \text{grad} \psi_\sigma$, $\bar{P}_2^{(0)}$, $\bar{P}_{12}^{(0)}$ векторы потока плотности энергии (векторы Умова-Пойнтинга) [6,7]

Интегрируя (23), (24) по объему и применяя теорему Гаусса, получим закон сохранения энергии в интегральной форме

$$\oint_S \bar{P}_2^{(0)} \cdot \bar{n} ds = 0, \quad \oint_S \bar{P}_{12}^{(0)} \cdot \bar{n} ds = 0, \quad (25)$$

где S – замкнутая поверхность лучевой трубки, \bar{n} нормальный вектор к S [13].

В нашем случае из (21), (22) сдвиговой волны следует условие

$$P_2^{(0)}(L) = P_2^{(0)}(0) \frac{dS_0}{dS_L}, \quad (26)$$

$$P_{12}^{(0)}(L) = P_{12}^{(0)}(0) \frac{dS_0}{dS_L}, \quad (27)$$

где dS – область основания лучевой трубки при $x_1 = x_{10}$, а dS_L – область верхнего основания лучевой трубки при $x_1 = x_{10} + L$. Для $dS_0 = dS_L$ получаем закон сохранения плотности потока энергии для рассматриваемой задачи

$$P_2^{(0)}(L) = P_2^{(0)}(0), \quad P_{12}^{(0)}(L) = P_{12}^{(0)}(0). \quad (28)$$

Решение уравнений (4.17), (4.18) запишем в виде

$$V_2^{(0)}(x_1) = V_2^{(0)}(x_{10}) W(x_1, x_{10}), \quad T_{12}^{(0)}(x_1) = T_{12}^{(0)}(x_{10}) W(x_1, x_{10}), \quad (29)$$

Следуя [8] рассмотрим распространение волны в форме функции Хевисайда.

Положим начальный импульс в форме импульсной функции $f_0(t)$

$$f_0(t) = J_0(t, \tau) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \tau < t. \end{cases} \quad (30)$$

где функция $J_0(t, \tau)$ – выражение, полученное при помощи функции Хевисайда

$$J_0(t, \tau) = H_0(t) - H_0(t - \tau). \quad (31)$$

Граничные условия при $x_1 = x_{10}$ имеют вид

$$\begin{aligned} V_2^{(0)}(x_{10}, t) &= V_2^{(0)}(x_{10})J_0(t, \tau); \\ T_{12}^{(0)}(x_{10}, t) &= T_{12}^{(0)}(x_{10})J_0(t, \tau). \end{aligned} \quad (32)$$

Амплитуда импульса $V_2^{(0)}$, которая приходит в точку x_1 возрастает, а $T_{12}^{(0)}$ убывает, с учетом (29) имеем

$$\begin{aligned} V_2^{(0)}(x_1, t) &= V_2^{(0)}(x_{10})W^{-1}(x_1, x_{10})J_0\left(t - \tau - \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{dx_1}{C_S(x_1)}\right); \\ T_{12}^{(0)}(x_1, t) &= T_{12}^{(0)}(x_{10})W(x_1, x_{10})J_0\left(t - \tau - \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{dx_1}{C_S(x_1)}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Условие (28) позволяет получить изменение профиля волны:

$$\begin{aligned} J_0(t_1\tau) &= W^{-2}(x_1, x_{10})J_0\left(t - \tau - \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{dx_1}{C(x_1)}\right) \quad \text{для } V_2^{(0)}, \\ J_0(t_1\tau) &= W^2(x_1, x_{10})J_0\left(t - \tau - \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{dx_1}{C(x_1)}\right) \quad \text{для } T_{12}^{(0)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Интегрируя по t левую часть (34) от 0 до $\tau(x_1)$ получим

$$\tau_V = \tau_{1V} W^{-2}(x_1, x_{10}); \quad (35)$$

$$\tau_T = \tau_{1T} W^2(x_1, x_{10}). \quad (36)$$

Из (35), (36) следует, что если $W^2(x_1, x_{10}) < 1$, тогда имеет место сжатие профиля. Поэтому ширина импульса скорости перемещений сжимается, а ширина импульса напряжений сдвига имеет декомпрессию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев А.В., Белоус Е.А. Решение уравнений распространения волн сдвига в слое с эффективными свойствами // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – №18. – С.58–63.
2. Алексеев А.С., Бабич В.М., Гельчинский Б.Я. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. – 1961. – №5 – С.28–35.
3. Achenbach J.D., Reddy D.P Note on wave propagation in linearly viscoelastic media // ZAMP. – 1967. – №18. – P.141–144.
4. Karal F.C. and Keller J.B. Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media // J. Acoust. Soc. Amer. – 1959. – №31. – P.694–705.
5. Rossikhin Yn. A., Shitikova M.V. Ray method for solving dynamics problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // ASME Appl Mech Rev. – 1995. – №48. – P.39–45.
6. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. – Мн.: Техно-

принт, 2000. – 450с. 7. Osinov V. A., Gudehus G. Plane shear waves and loss of stability in a saturated granular body // Mech. Cohesive-frictional Mater. –2002. –№1. P.25–44. 8. Гольдин С.В., Березин Ю.А. Сейсмические волны в сыпучих грунтах в рамках гипопластической модели // Физическая мезомеханика. –2003. – №1. –С.58–62.

УДК 612.014.482

Савенко В.С., Гречанников Э.Е., Соловьев М.Б.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ

*Мозырский государственный педагогический университет
г.Мозырь, Беларусь.*

Одной из актуальных задач производства низкочастотных наборных бортовых кабелей электрических систем летательных аппаратов является сокращение их габаритно-массовых характеристик, позволяющее при тех же энергозатратах и массе разместить на борту большой объем электрооборудования и электросистем. Так, например, на ракете-носителе «Протон» 600 бортовых кабелей имеют массу свыше одной тонны, а на ОКС «МИР» две тысячи пятьсот кабелей – четыре тонны [1]. Таким образом, модернизация габаритно-массовых с одновременным улучшением служебных характеристик бортовых кабельных сетей является принципиально важной задачей. Решение данной задачи возможно с использованием электропластичной деформации металлов.

Существуют работы, в которых явление электропластичности наблюдалось на тугоплавких и труднодеформируемых металлах [2]. Резкое повышение пластичности и уменьшение сопротивления деформированию тугоплавких и труднодеформируемых сплавов связано с созданием градиента температуры и электрического потенциала в процессе деформации. Исходя из полученных данных, предложен способ изготовления тончайшей ленты из тугоплавких и труднодеформируемых металлов и сплавов.

С целью повышения пластических свойств прокатываемой ленты и получения высоких относительных обжатий за проход, прокатку ведут с одновременным протеканием электрического тока через валки с созданием градиента электрического потенциала величиной 10 – 100 В/см.

Использование эффекта электропластичности позволило плющить нагортованную до высокой степени проволоку из вольфрама, молибдена и их сплавов в микроленты, при этом сохраняя прочность и другие свойства.

Резкое повышение пластичности при наличии в очаге деформации элек-