БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

ВОПРОСЫ ВНЕДРЕНИЯ НОРМ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И СТАНДАРТОВ ЕВРОПЕЙСКОГО СОЮЗА В ОБЛАСТИ СТРОИТЕЛЬСТВА

(г. Минск, БНТУ — 22–23.05.2013)

УДК 624.012

STATYSTYKI PORZĄDKOWE W OCENIE ZGODNOŚCI WYTRZYMAŁOŚCI BETONU NA ŚCISKANIE NA PODSTAWIE MAŁYCH PRÓB

ELŻBIETA SZCZYGIELSKA[1]
Instytut Budownictwa, Zakład Budownictwa, Państwowa Szkoła Wyższa im. Papieża Jana Pawła II
w Białej Podlaskiej, e-mail: e.szczygielska@dydaktyka.pswbp.pl

Streszczenie: Według obowiązujących przepisów normowych PN-EN 206-1:2003 kontrola zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie jest kontrolą wyrywkową opartą na ocenie liczbowej. Zgodność badanej partii betonu z deklarowaną klasą wytrzymałości zostaje potwierdzona po spełnieniu podwójnych kryteriów z uwzględnieniem przyjętego planu statystycznej kontroli jakości. Kryteria zgodności stosowane na etapie produkcji początkowej nie są pozbawione wad a wielu autorów ocenia je krytycznie. W artykule przedstawiono nowe kryterium zgodności dla małych prób opracowane na podstawie statystyk porządkowych. Opracowane kryterium dla prób o liczebności 3 poddano ocenie z wykorzystaniem prawdopodobieństwa akceptacji wyznaczonego metodą Monte Carlo przy założonej stałej wadliwości 5%. Przedstawione kryterium nie zależy od dyspersji wytrzymałości a prawdopodobieństwo akceptacji utrzymuje się na stałym poziomie, zbliżonym do poziomu właściwego na etapie produkcji ciągłej.

---

[1] Badania prowadzone pod kierunkiem prof. dr hab. inż. Wiktora Tura

Słowa kluczowe: beton, wytrzymałość, kryterium zgodności, statystyki porządkowe

1. Wprowadzenie

Według normy PN-EN 206-1:2003 [1] kontrola zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie przeprowadzania jest z uwzględnieniem dwóch etapów produkcji, początkowej i ciągłej. Decyzja o potwierdzeniu zgodności wytrzymałości produkowanego betonu z wytrzymałością charakterystyczną przyjętą w projekcie konstrukcji żelbetowej, lub jej braku, podejmowana jest na podstawie porównania wyników badań próbek z kryterium zgodności. Zdaniem wielu autorów [4-7] kryteria dla produkcji początkowej nie mają dostatecznego uzasadniona statystycznego. Konsekwencje wynikające ze stosowania obecnych kryteriów ponoszą głównie małe przedsiębiorstwa, produkujące beton epizodycznie. Stosując plan i częstotliwość pobierania próbek opisaną w [1] pozostają zwykle na etapie produkcji początkowej i mogą nie mieć możliwości przejścia na produkcję ciągłą. Produkcja betonów na etapie początkowym przy spełnieniu kryteriów opisanych w przytaczanej normie może okazać się nieekonomiczna dla producenta [6]. W artykule przedstawiono nowatorską procedurę opracowania kryterium zgodności na podstawie małych zbiorów wyników pomiarów wytrzymałości betonu, o liczebności do 13 elementów, opartą na statystykach porządkowych.

2. Kryteria oceny zgodności według PN EN 206-1

Proces kontroli produkcji (ang. production control) opisany w § 9.1. PN-EN 206-1:2003 [1], obejmuje szereg działań podejmowanych w celu zapewnienia kontroli jakości produkcji betonu, w tym kontrolę zgodności. Odpowiedzialność za kontrolę produkcji ponosi producent.

Norma szczegółowo opisuje plan pobierania próbek do oceny zgodności (tab.1). Według [1] wynikiem badania f_{ci} może być wartość wytrzymałości otrzymana z pojedynczej próbki sześciennej lub cylindrycznej albo może być nim średnia arytmetyczna z pomiarów co najmniej dwóch próbek wykonanych z tej samej próbki mieszanki i badanej w tym samym wieku. Przy drugiej procedurze obliczania wyniku f_{ci} należy pominąć wartości różniące się od wstępnie obliczonej średniej o więcej niż 15%, chyba że analiza danego przypadku nie wykaże racjonalnego powodu wyjaśniającego pominięcie pojedynczego wyniku badania.

Tabela 1. Minimalna częstotliwość pobierania próbek do oceny zgodności

Produkcja	Minimalna częstotliwość pobierania próbek		
	Pierwsze 50 m^3 produkcji	Po pierwszych 50 m^3 produkcji	
		Beton z certyfikatem kontroli produkcji	Beton bez certyfikatu kontroli produkcji
Początkowa	3 próbki	1 / 200 m^3 lub 2 / tydzień produkcji	1 / 150 m^3 lub 1 / dzień produkcji
Ciągła		1 / 400 m^3 lub 1 / tydzień produkcji	

Źródło: [1]

Zgodnie z § 8.2.1.3. PN-EN 206-1:2003 [1] potwierdzenie zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie uzyskuje się na próbkach badanych w 28 dniu dojrzewania, na podstawie średniej arytmetycznej f_{cm} obliczonej ze zbioru „*n*" kolejnych pokrywających się lub niepokrywających się wyników badań (kryterium 1) oraz dla każdego pojedynczego wyniku badania f_{ci} (kryterium 2). W tekście normy [1] zamieszczono uwagę, że kryteria zgodności opracowano na podstawie niepokrywających się wyników badań a zastosowanie kryteriów do pokrywających się wyników zwiększa ryzyko ich odrzucenia.

Uznaje się, że zgodność dotycząca wytrzymałości betonu na ściskanie jest potwierdzona, jeśli spełnione są jednocześnie oba kryteria, przedstawione w tabeli 2.

Tabela 2. Kryteria zgodności dotyczące wytrzymałości na ściskanie

Produkcja	Liczba „n" wyników badań wytrzymałości na ściskanie w zbiorze	Kryterium 1	Kryterium 2
		Średnia z „*n*" wyników (f_{cm}) N/mm^2	Dowolny pojedynczy wynik badania (f_{ci}) N/mm^2
Początkowa	3	$\geq f_{ck} + 4$	$\geq f_{ck} - 4$
Ciągła	15	$\geq f_{ck} + 1{,}48\sigma$	$\geq f_{ck} - 4$

Uwaga. Odchylenie standardowe σ określa się na podstawie co najmniej 35 kolejnych wyników badań wykonanych w okresie dłuższym niż trzy miesiące, uzyskanych w okresie bezpośrednio poprzedzającym okres produkcji, podczas którego ma być sprawdzana zgodność

Źródło: [1]

Wielkość f_{ck} oznacza wytrzymałość charakterystyczną zdefiniowaną jako kwantyl rzędu 0,05 rozkładu wytrzymałości w populacji generalnej.

Kryteria zgodności właściwe na etapie produkcji ciągłej, opracowane przez L. Taerwe, zostały obszernie przez niego opisane i uzasadnione [np. 8]. Ostateczną postać, czyli dobór wartości współczynników, ustalono przy wykorzystaniu krzywych operacyjno-charakterystycznych i planów kontroli wyrywkowej.

Jednakże kryteria stosowane na etapie produkcji początkowej nie mają oczywistego i dostatecznego uzasadnienia statystycznego [4,5] a przyjęte współczynniki testowe oceniane są krytycznie przez wielu autorów [np. 6,7].

3. Stosowanie statystycznych kryteriów zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie a ryzyko producenta

Jak wynika z komentarzy do EN 206-1 [6,8-11], procedury oceny wytrzymałości betonu na ściskanie według kryteriów zgodności zostały opracowane na podstawie komputerowo wygenerowanych losowych wartości (metoda symulacji losowej Monte Carlo) oraz analizę rzeczywistej produkcji kilku konkretnych zakładów w Europie. W pracy [3] analizowano przykładowe dane, uzyskane dla różnych typów produkcji, umownie podzielonych na cztery grupy:

duże (large volume) stabilne przedsiębiorstwa;

duże niestabilne przedsiębiorstwa;

małe (low volume) przedsiębiorstwa, w których pobieranie próbek odbywa się regularnie;

małe przedsiębiorstwa, w których pobieranie próbek odbywa się nieregularnie.

Wyniki analiz pokazały, że największe ryzyko producenta występuje w grupie dużych, mocno obciążonych produkcją przedsiębiorstw, wykonujących próbki z dużą częstotliwością. Zawsze bowiem występuje ryzyko dostarczenia pewnej partii tzw. „wadliwego” betonu, zanim niezgodność wyrobu zostanie wykryta i podjęte zostaną działania korygujące.

Analizę ryzyka związanego ze stosowaniem statystycznych kryteriów zgodności zawartych w PN-EN 206-1:2003 [1] przedstawiono w [6]. Do oceny tego ryzyka wykorzystane zostały krzywe operacyjno-charakterystyczne (krzywe OC). Sformułowane przez autorów wnioski w odniesieniu do oceny zgodności przeprowadzanej na podstawie małych zbiorów wyników ($n = 3$) mówią, że zalecane kryterium prowadzi do paradoksu, polegającego na wzroście prawdopodobieństwa akceptacji przy jednoczesnym zwiększaniu się odchylenia standardowego wytrzymałości betonu (tab.3).

Tabela 3. Prawdopodobieństwo akceptacji dla podwójnego kryterium zgodności wg PN EN 206-1:2003 przy stałej wadliwości partii *w=0,05*

Liczebność próby	Typ produkcji	Prawdopodobieństwo akceptacji dla odchylenia standardowego [MPa]				
		2	3	4	5	6
n=3	początkowa	0,267	0,707	0,863	0,917	0,939
n=15	ciągła	0,715	0,711	0,708	0,705	0,702

Źródło: [6, s.25]

Ocena ryzyka związanego ze stosowaniem podwójnego kryterium zgodności według [1] dla prób o liczebności 15 przedstawiona w tabeli 3 pokazuje, że przy stabilnej produkcji (współczynnik zmienności na poziomie 6%) prawdopodobieństwo akceptacji zgodności wytrzymałości badanej partii betonu z wytrzymałością projektowaną jest największe i nieznacznie maleje ze wzrostem odchylenia standardowego.

Na etapie produkcji początkowej istnieje ryzyko, że producent nie podejmie działań zapewniających stabilny proces produkcji a ryzyko odbiorcy związane ze skutkami zakupu partii betonu o zaniżonej jakości wzrośnie. Z przeprowadzonych badań wynika, że „bardzo często stosowanym sposobem zmniejszenia ryzyka dyskwalifikacji partii betonu jest zwiększenie wytrzymałości średniej zamiast redukcji jej rozrzutu. Takie postępowanie jest nieekonomiczne i nieracjonalne" [6, s.24].

4. Krytyczna ocena współczynników testowych w kryteriach zgodności EN 206-1

Przed wdrożeniem normy EN 206-1 w krajach europejskich obowiązywały różne kryteria zgodności. Były to kryteria pojedyncze lub podwójne. Zwykle wyrażane były za pomocą nierówności typu:

$$f_{cm} - \lambda s \geq f_{ck}, \tag{1}$$

gdzie:

f_{cm} – wytrzymałość średnia w próbie *n*- elementowej,

f_{ck} – wytrzymałość charakterystyczna,

λ – współczynnik testowy,

s – odchylenie standardowe.

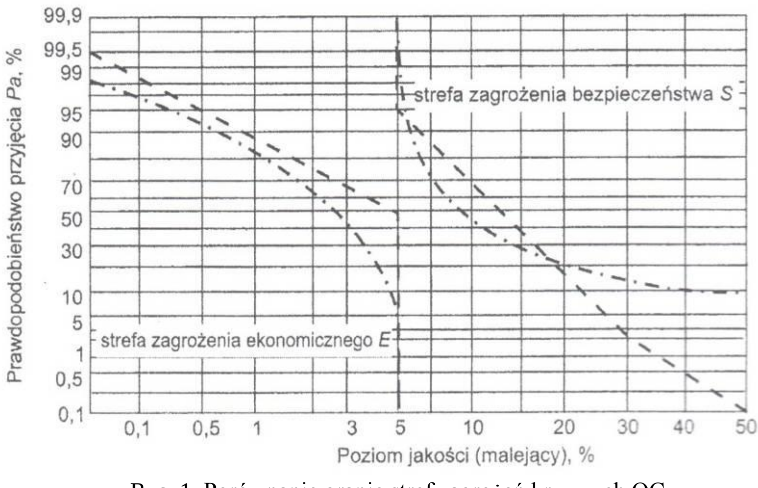
W przypadku oceny zgodności na podstawie małych zbiorów wyników (np. $n = 3$) kryteria przyjmowały zwykle postać:

$f_{cm} \geq f_{ck} + k_1$, $f_{min} \geq f_{ck} - k_2$ lub $f_{cm} \geq k_3 f_{ck}$.

Wartości współczynników testowych były zróżnicowane w poszczególnych normach.

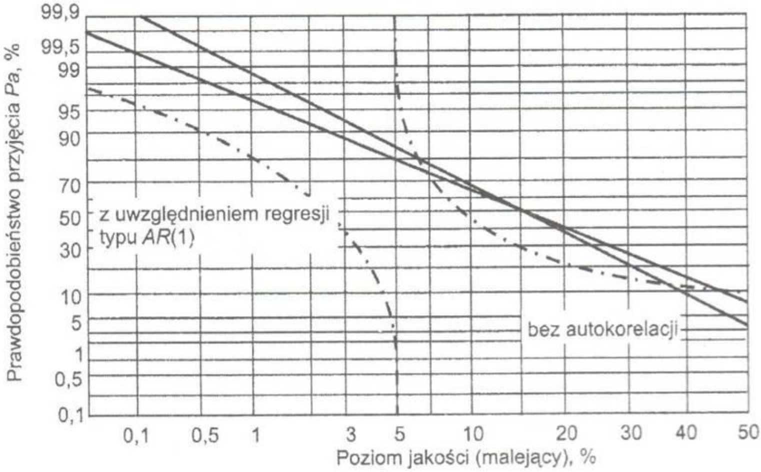
Oceny kryteriów dokonywano za pomocą funkcji operacyjno-charakterystycznych. Zlinearyzowane krzywe OC dla kryteriów przedstawiano na specjalnych siatkach z uwzględnieniem granic obszarów nieekonomicznego i niebezpiecznego. Między tymi granicami powinny przebiegać linie OC.

Zmiany w podejściu do europejskich kryteriów zgodności wprowadził L. Taerwe. Zaproponował on nowe granice obszarów nieekonomicznego i niebezpiecznego (rys.1) krzywych OC i uwzględnił wpływ autokorelacji na te krzywe [8,17].



Rys. 1. Porównanie granic stref zagrożeń krzywych OC
(linie ciągłe – wg Taerwe, linie łamane – według CEB/CIP/FIP/RILEM)
Źródło: [7, s.30]

Porównanie linii OC dla podwójnego kryterium ($n = 3$) typu $f_{cm} \geq f_{ck} + k_1$ i $f_{min} \geq f_{ck} - k_2$ dla $k_1 = k_2 = 3$ z uwzględnieniem wystąpienia lub braku autokorelacji przedstawiono na rysunku 2. Linie OC znajdują się częściowo w strefie zagrożenia bezpieczeństwa, co oznacza zwiększone ryzyko odbiorcy.



Rys. 2. Linie OC dla podwójnego kryterium zgodności typu $f_{cm} \geq f_{ck} + 3$ i $f_{min} \geq f_{ck} - 3$
Źródło: [7, s.34]

Ocenę wartości współczynników testowych występujących w obecnie obowiązujących kryteriach zgodności przedstawił w [7] L. Brunarski, autor kryteriów zgodności wytrzymałości betonu przyjętych w dawnej polskiej normie PN-B-06250:1988 [2].

Jego zdaniem, przyjęcie w PN-EN 206-1:2003 wartości $k_1 = k_2 = 4$ jest „co najmniej dziwne" [7, s.34].

Krytyczna ocena dotyczy również współczynnika 1,48 występującego w kryterium 1 na etapie produkcji ciągłej (patrz tab.2) oraz dopuszczenia warunku $f_{ci,min} < f_{ck}$. Przy tej wartości współczynnika testowego (1,48) poziom ufności jest nie wyższy niż 0,3 co zwiększa ryzyko odbiorcy [7, s.59].

W kontrolnych badaniach betonu na próbkach wykonanych w formach L. Brunarski proponuje przyjmowanie następujących kryteriów zgodności:

- przy małej liczbie kontrolowanych próbek (np. $n = 3$) podwójne kryterium zgodności w postaci $f_{cm} \geq f_{ck} + K$; $f_{ci} \geq f_{ck}$, przy czym dyskusyjna może być wartość parametru K; jako optymalną proponuje on wartość między 5 a 6 MPa,

- przy liczbie kontrolowanych próbek n ≥ 15 pojedyncze kryterium $f_{cm} \geq f_{ck} + ks$, w którym stosowano by współczynnik k = *1,64* [7, s.60].

5. Oszacowanie kwantyli rozkładu z wykorzystaniem statystyk porządkowych

Głównymi problemami statystycznej kontroli jakości betonu, produkowanego w małych ilościach są:

mała liczba badanych próbek (pomiarów x_i), co pociąga za sobą małą dokładność otrzymanych oszacowań;

brak dostatecznej informacji *a priori* o przedmiocie kontroli, co z kolei nie pozwala upewnić się co do założeń dotyczących postaci rozkładu prawdopodobieństwa mierzonej wytrzymałości x.

W tych warunkach stosowanie powszechnie znanych metod analizy statystycznej jest mało efektywne (np. stosowane oszacowanie wartości oczekiwanej i wariancji jest optymalne przy założeniu normalności rozkładu zmiennej losowej). Alternatywną metodą może być zastosowanie nieparametrycznych przedziałów ufności, konstruowanych na podstawie statystyk pozycyjnych, które nie zależą od typu rozkładu zmiennej losowej ani od dyspersji wyników [13,14].

Metoda taka jest rekomendowana w ISO 12491:1997 [12]. W rozdziale 6.6 tego dokumentu opisana jest prosta procedura oceny kwantyli oparta na statystykach porządkowych. Uzyskane pomiary $x_1, x_2, \ldots, x_n$ należy przekształcić w szereg uporządkowany $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ a następnie określić oszacowanie kwantyla X_p rzędu p jako:

$$X_p = X_{k+1:n}, \tag{2}$$

gdzie k jest liczbą całkowitą spełniającą nierówność $k \leq np < k + 1$.

Przedstawiony w [12] związek między funkcją gęstości rozkładu kwantyla, w rzeczywistości nie ma zastosowania w praktyce, ponieważ wykorzystuje funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu populacji generalnej. Jeśli chodzi o rozważaną populację, to jej parametry *a priori* są nieznane a populacja, jak wcześniej wspomniano jest hipotetyczna. W dalszej części rozdziału 6.6 sformułowane są zalecenia dotyczące oceny kwantyla nawet dla małych prób, oparte znowu na założeniu o normalności rozkładu populacji a więc nie mające żadnego związku z matematycznym narzędziem statystyk porządkowych.

Należy zauważyć, że gdy $np < 1$ oszacowaniem kwantyla zawsze będzie najmniejsza wartość w szeregu uporządkowanym, czyli $X_{1:n}$ i będzie to wartość raczej zawyżona. Z drugiej strony, wyniki pomiarów zbliżone do wartości kwantyla niskiego rzędu zazwyczaj skrajnie rzadko dostają się do małej próby. Dlatego wartość kwantyla X_p rzędu p rozkładu populacji dla niewysokich rzędów (np. $p = 0,05$) prawie zawsze będzie mniejsza niż minimalna wartość w próbie.

Oszacowanie kwantyla, otrzymane na podstawie wzoru (2) daje ocenę punktową. Przedziałowe oszacowanie można przedstawić za pomocą dwustronnego lub jednostronnego przedziału ufności. Według [12] przy estymacji przedziałowej kwantyli poziom ufności γ powinien być na poziomie co najmniej 0,5 a jako wartość rekomendowaną podano $\gamma = 0,75$.

W przypadku ciągłej zmiennej losowej można przy użyciu dwóch statystyk porządkowych skonstruować przedział ufności dla kwantyla X_p rzędu p w populacji o nieznanym rozkładzie. Według [13] konstrukcję przedziału ufności takiego kwantyla przeprowadzić można w oparciu o warunek:

$$P\left(X_{r:n} \le X_p \le X_{s:n}\right) = \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \tag{3}$$

Jeśli r oraz s są wybrane w taki sposób, że:

$$\sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \ge \gamma, \tag{4}$$

to $\left(X_{r:n}, X_{s:n}\right)$ jest nieparametrycznym przedziałem ufności dla kwantyla X_p rzędu p na poziomie ufności co najmniej γ.

W szczególności, jeśli końce przedziałów są kolejnymi statystykami $X_{r:n}$ i $X_{r+1:n}$ to:

$$P\left(X_{r:n} \le X_p \le X_{r+1:n}\right) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \tag{5}$$

Natomiast jeśli kwantyl wykroczy poza zakres wartości pomiarowych wówczas:

$$P\left(X_p < X_{1:n}\right) = (1-p)^n \tag{6}$$

$$P\left(X_p > X_{n:n}\right) = p^n \tag{7}$$

Relacje opisane wzorami (5) – (7) przedstawiają rozkład prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej, określającej położenie kwantyla X_p w uporządkowanym szeregu wyników n-elementowej próby losowej $X_{1:n} < X_{2:n} <\ldots< X_{n:n}$ (brak rang wiązanych). Rozkład ten, nazywany dalej rozkładem położenia kwantyla został opisany w pracy [15].

Jest to rozkład dwumianowy, w którym sukcesem jest zdarzenie polegające na tym, że kwantyl X_p przekroczył wartość z próby (jedną). Prawdopodobieństwem sukcesu jest rząd tego kwantyla, czyli $P(X < X_p)=p$, zaś liczba sukcesów to liczba statystyk porządkowych $X_{i:n}$ z próby, które ten kwantyl przekroczył. Tak określona zmienna losowa przyjmuje $n+1$ wartości, od 0 do n.

W tabeli 4 przedstawiono rozkład położenia kwantyla rzędu 0,05 dla próby o liczebności $n=6$.

Tabela 4. Rozkład położenia kwantyla rzędu 0,05 dla serii wyników *n=6*

Położenie kwantyla	poniżej $X_{1:6}$	$(X_{1:6}, X_{2:6})$	$(X_{2:6}, X_{3:6})$	$(X_{3:6}, X_{4:6})$	$(X_{4:6}, X_{5:6})$	$(X_{5:6}, X_{6:6})$	powyżej $X_{6:6}$
Prawdopodobieństwo	0,735	0,232	0,031	0,002	8,46E-05	1,78E-06	1,56E-08

Źródło: obliczenia własne

Interpretując wartości przedstawione w tabeli 4 można zauważyć, że najbardziej prawdopodobne „położenie" kwantyla $X_{0,05}$ z populacji jest poniżej wartości minimalnej z próby. Jednostronnym nieparametrycznym przedziałem ufności dla tego kwantyla na poziomie ufności co najmniej 0,5 jest przedział $(-\infty, X_{1:6})$ a faktyczne prawdopodobieństwo pokrycia wynosi 0,735. Gdy poziom ufności zwiększymy do 0,95 dostaniemy przedział $(-\infty, X_{2:6})$ przy faktycznym prawdopodobieństwie pokrycia 0,967.

Rozkład położenia kwantyla $X_{0,05}$ zostanie wykorzystany do znalezienia estymatora kwantyla rzędu 0,05.

6. Estymator kwantyla rzędu 0,05

Oszacowanie kwantyla rzędu 0,05 wykorzystuje się do opracowania kryterium zgodności dotyczącego oceny wytrzymałości betonu na ściskanie. Kryterium takie można ogólnie zapisać w postaci warunku:

$$\tilde{X}_{0,05} \geq f_{ck}, \tag{8}$$

gdzie: $\tilde{X}_{0,05}$ – oszacowanie kwantyla X_p rzędu $p = 0,05$ w populacji generalnej,

f_{ck} – wytrzymałość charakterystyczna betonu.

Konstrukcja kryterium zgodności opartego na warunku (8) wymaga wyboru właściwej metody, na podstawie której zostanie wyznaczone oszacowanie kwantyla $X_{0,05}$ (ozn. $\tilde{X}_{0,05}$) będące estymatorem wytrzymałości charakterystycznej w badanej populacji betonu.

Autorska metoda oszacowania kwantyla, bazuje na dwóch kolejnych statystykach porządkowych z próby. Opracowany przez autorkę estymator kwantyla rzędu 0,05 przedstawić można za pomocą wzoru ekstrapolacyjnego:

$$\tilde{X}_{0,05} = kX_{i:n} + (1-k)X_{i+1:n}\,, \tag{9}$$

przy czym dla $n < 14$ przyjmuje się $i = 1$, dla $14 \leq n < 34$ przyjmuje się $i = 2$ itd.

Wartości współczynników występujących w kombinacji liniowej zależą od liczebności próby n oraz rzędu kwantyla p. Pozycja statystyki $X_{i:n}$ wyznaczona została na podstawie opracowanego rozkładu położenia kwantyla $X_{0,05}$. Przyjęty estymator $\tilde{X}_{0,05}$ jest medianą w tym rozkładzie.

7. Kryterium zgodności dla małych prób opracowane na podstawie statystyk porządkowych

Autorskie kryterium zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie opracowane na podstawie statystyk porządkowych dla liczby wyników w serii $n < 14$ ma postać:

$$kf_{c1} + (1-k)f_{c2} \geq f_{ck}, \tag{10}$$

gdzie f_{ck} oznacza wytrzymałość charakterystyczną betonu, $f_{c1} = X_{1:n}$ oraz $f_{c2} = X_{2:n}$ oznaczają dwie najmniejsze wartości w uporządkowanej serii wyników takie, że $f_{c1} < f_{c2}$.

Współczynnik k zależy od liczby wyników w serii (n) i przyjmuje wartości przedstawione w tabeli 5.

Tabela 5. Wartości współczynnika *k* w zależności od liczby wyników w serii *n*

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k	1,421	1,384	1,344	1,304	1,264	1,223	1,183	1,143	1,103	1,062	1,021	0,980	0,938

Źródło: obliczenia własne

Lewa strona nierówności (10) jest oszacowaniem wartości kwantyla rzędu $p = 0,05$ ($\tilde{X}_{0.05;0.5}$) rozkładu wyników w populacji.

Znajdując oszacowanie kwantyla przyjęto ekstrapolację logarytmiczną:

$$\tilde{X}_{0,05;\beta} = \hat{a}_1 ln\beta + \hat{a}_2 \tag{11}$$

gdzie:

$$\hat{a}_1 = \frac{f_{c1} - f_{c2}}{ln\frac{\beta_1}{\beta_2}}$$

$$\hat{a}_2 = \frac{f_{c2} ln\beta_1 - f_{c1} ln\beta_2}{ln\frac{\beta_1}{\beta_2}}$$

$\beta_i = 1 - G(X_i)$ dla $i = 1,2$.

Prawdopodobieństwo β_i zostało zdefiniowane wzorem:

$$\beta_i = 1 - G(X_i) = P\left(X_{i:n} \leq X_p\right) \tag{12}$$

Ponieważ jako estymator kwantyla $X_{0,05}$ przyjęto medianę w rozkładzie położenia kwantyla, więc $\beta = 0,5$. Wówczas, podstawiając

$$k = \frac{ln\frac{0,5}{\beta_2}}{ln\frac{\beta_1}{\beta_2}} \tag{13}$$

otrzymano żądany estymator dla małej próby ($n < 14$):

$$\tilde{X}_{0,05;0,5} = kf_{c1} + (1-k)f_{c2} \tag{14}$$

Analizując wartości współczynnika k przedstawione w tabeli 5, można zauważyć, że oszacowanie kwantyla rzędu 0,05 dla $n < 14$ znajduję się poniżej najmniejszego wyniku f_{c1}, co oznacza, że zgodność nie zostanie potwierdzona gdy $f_{c1} < f_{ck}$. Dla $n \geq 14$ oszacowanie kwantyla położone jest w przedziale $(X_{1:n}, X_{2:n})$.

Racjonalne kryteria zgodności powinny spełniać trzy podstawowe warunki:

- zwiększenie liczebności próby n powinno pociągać za sobą wzrost wartości prawdopodobieństwa akceptacji P_a, czyli zmniejszać ryzyko producenta;
- zmniejszanie rozrzutu wyników powinno powodować zwiększanie wartości prawdopodobieństwa akceptacji P_a;
- prawdopodobieństwo akceptacji partii betonu (P_a) spełniającej kryterium powinno być nie mniejsze niż wstępnie ustalona wartość i uwzględniać kompromis między ryzykiem producenta a ryzykiem odbiorcy.

Sformułowane kryterium zgodności (10) dla małych prób poddano ocenie, obliczając prawdopodobieństwo akceptacji. Wykorzystano w tym celu metodę symulacji losowej Monte Carlo. W oparciu o algorytm przestawiony w [17] wygenerowano po 100 000 serii liczb losowych o liczebności $n = 3$ zgodnych ze standardowym rozkładem normalnym. Przyjmując jako model beton klasy C25/30 i założoną stałą wadliwość partii $w = 0{,}05$ oraz zmienne odchylenie standardowe ($\sigma = 2, 3, 4, 5$ *i* 6 *MPa*), otrzymano 5 różnych rozkładów. Przy ustalonej frakcji wad obliczono prawdopodobieństwa akceptacji dla podwójnego kryterium zgodności wg normy PN-EN 206-1:2003 w postaci:

$$f_{cm} \geq f_{ck} + 4 \text{ i } f_{c,min} \geq f_{ck} - 4$$

oraz kryterium utworzonego na podstawie (10):

$$1{,}421 + (1 - 1{,}421) f_{c2} \geq f_{ck}$$

Porównanie otrzymanych wartości prawdopodobieństw z uwzględnieniem odchylenia standardowego przedstawiono w tabeli 6.

W odniesieniu do oceny kryterium zgodności według PN-EN 206-1 otrzymane wartości prawdopodobieństw akceptacji (tab.6) są bardzo zbliżone do wyników, jakie przedstawili S. Woliński i I. Skrzypczak w [6].

Tabela 6. Prawdopodobieństwo akceptacji dla podwójnego kryterium zgodności dla serii próbek o liczebności n=3 przy stałej wadliwości partii w=0,05

Kryterium	Prawdopodobieństwo akceptacji dla odchylenia standardowego [MPa]				
	2	3	4	5	6
PN EN206-1	0,2693 (0,267)	0,7049 (0,707)	0,8651 (0,863)	0,9264 (0,917)	0,9372 (0,939)
Nowe kryterium	0,7053	0,7047	0,7053	0,7050	0,7053

Źródło: obliczenia własne; w nawiasach - wartości otrzymane przez S.Wolińskiego i I. Skrzypczak [6]

Analizując wartości prawdopodobieństw akceptacji otrzymanych dla zaproponowanego kryterium zgodności można zauważyć, że prawdopodobieństwo to utrzymuje się na stałym poziomie około 0,705 i nie zależy od odchylenia standardowego. Ponadto uzyskane wartości są zbliżone do prawdopodobieństw akceptacji przedstawionych przez S. Wolińskiego i I. Skrzypczak w [6] dla produkcji ciągłej wg PN-EN 206-1:2003 (patrz tab.3).

Porównując wyniki przeprowadzonych analiz można stwierdzić, że przedstawione przez autorkę kryterium zgodności wypadło we wstępnej ocenie lepiej, niż obecnie obowiązujące. Głównym zarzutem, jakie postawiono aktualnemu kryterium według normy PN-EN 206-1:2003, był bardzo niski poziom prawdopodobieństwa akceptacji przy stabilnym procesie produkcji i wzrost tego prawdopodobieństwa ze wzrostem niejednorodności wytrzymałości betonu. Kryterium zgodności opracowane na podstawie statystyk porządkowych tej wady nie posiada, ze wzrostem rozrzutu nie wzrasta prawdopodobieństwo akceptacji a wręcz utrzymuje się na stałym poziomie.

Dodatkową zaletą przedstawionego kryterium jest to, że przy ocenie zgodności nie wymaga się znajomości typu rozkładu w populacji i kontrolowania odchylenia standardowego.

8. Wnioski

Wstępna weryfikacja przedstawionej w artykule metody oszacowania kwantyli i kryterium zgodności opartego na statystykach porządkowych pozwala na sformułowanie następujących wniosków:

Oszacowanie wytrzymałości charakterystycznej otrzymane metodą statystyk porządkowych nie wymaga znajomości *a priori* rozkładu wytrzymałości w populacji generalnej.

Oszacowanie kwantyla rzędu 0,05 w rozkładzie wytrzymałości otrzymane metodą statystyk porządkowych nie zależy od wszystkich wyników w serii a na jego wartość mają wpływ tylko dwa najmniejsze wyniki.

Przy wadliwości 5% prawdopodobieństwo akceptacji oceniające kryterium zgodności dla serii wyników o liczebności $n = 3$, zalecanej przez EN 206-1, utrzymuje się na stałym poziomie około 0,705 i nie zależy od dyspersji wytrzymałości.

Wartości prawdopodobieństw akceptacji uzyskane przy ocenie kryterium zgodności dla serii wyników o liczebności $n = 3$ wyznaczone przy stałej wadliwości 5% są zbliżone do prawdopodobieństw akceptacji wyznaczonych dla produkcji ciągłej wg PN-EN 206-1:2003 [1].

Przedstawione w artykule kryterium zgodności, wykorzystujące dwie kolejne początkowe statystyki porządkowe jest nowatorskim podejściem statystycznej kontroli jakości (SKJ). Może być alternatywą w sytuacjach, kiedy chcemy ocenić zgodność produkcji z ustalonymi wymaganiami określonymi za pomocą parametrów pozycyjnych a dysponujemy skrajnie małymi próbami. Tam, gdzie badanie ma charakter niszczący nie można sobie pozwolić na zgromadzenie dużej ilości wyników.

LITERATURA

1. PN EN 206-1:2003. Beton – Część 1: Wymagania, właściwości, produkcja i zgodność.
2. PN-B-06250:1988. (d. PN-88/B-06251) Beton zwykły.
3. Crompton S.J. Conformity to EN 206. Materials of Institute of Concrete Technologies, June (2008) 35–47.
4. Beal A.N. Concrete strength testing - are the code writers getting it right? The Structural Engineer 87 (10) (2009) 73.
5. Beal A.N. Concrete Cube Strength - what use are Statistics? ICE Proc. Part 2, December (1981) 1037–1048.
6. Woliński S., Skrzypczak I. Kryteria statystyczne zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie. Materiały Budowlane 2 (2006) s. 20–25.
7. Brunarski L. Podstawy matematyczne kształtowania kryteriów zgodności wytrzymałości materiałów, ITB, 2009.

8. Taerwe L. Analysis and modeling of autocorrelation in concrete strength series, w: Proceeding 4th International Probabilistic Symposium, 12–13 October 2006. (ed. Proske D., Mehdianpours M.) Berlin, Germany (2006) s. 57–70.

9. Caspeele R., Taerwe L. Variance reducing capacity of concrete conformity control in structural reliability analysis under parameter uncertainties, w: Application of Statistics and Probability in Civil Engineering. (ed. Faber, Kohler) (2011) s. 2509–2516.

10. Blaut H. Sampling inspection plan and operating characteristics for concrete (1977). Deutscher ausschuss für stahlbeton (233),1973.

11. Caspeele R. Probabilistic Evaluation of Conformity Control and the Use of Bayesian Updating Techniques in the Framework of Safety Analysis of Concrete Structures. PhD thesis, Ghent University, Ghent, Belgium (2010) s. 129

12. ISO 12491:1997 Statistical methods for quality control of building materials and components. European Standard, CEN.

13. Dawid, H. A. Order Statistics, 2nd ed. Wiley, New York, 1981.

14. Kendall M. Stewart A. Statisticzeskie wywody I swiazi . Nauka, 1973.

15. Tur W., Derechennik S., Szczygielska E. Niekotoryje problemy ocenki sootwietstwia procznosti betona soglasno normy EN 206-1:2000, w: Problemy sovremennowo betona i żelezobetona. (ed. Markowski M.) Mińsk 2011.

16. Gumbel E. Statistika ekstremalnych znaczenij. Mir, 1965.

17. Taerwe, L. Evaluation of compound compliance criteria for concrete strength. Materials and Structures 21(1) (1988)13-20.

18. Guidance on the application of the EN 206-1 conformity rules (ed. Harrison T.) Quarry products Association, 2001.

Applying of order statistics for assessment of the concrete compressive strength conformity based on small sets of results

Elżbieta Szczygielska

Institute of Civil Engineering, Department of Civil Engineering, Pope John Paul II State School of Higher Education in Biała Podlaska, e-mail: e.szczygielska@dydaktyka.pswbp.pl

Abstract: The test of concrete compressive strength conformity with current regulations PN EN 206-1:2003 is the sampling inspection based on a numerical evaluation. Satisfying the compound criteria, including the adoption of statistical quality control plan confirms the conformity of the examined batch of concrete defined by the declared class of compressive strength defined by characteristic value of compressive strength. The conformity criteria recommended according to that standard at the initial production phase are not without flaws and they are critically evaluated by many authors. This paper presents a new criterion of conformity for small sets of results based on order statistics. A preliminary evaluation of the criterion was made for the series with a small number of the test results with the use of probability of acceptance determined by means of the Monte Carlo method with the assumed 5% fraction defective. The analysis of the results has shown that the presented criterion does not depend on the dispersion of results whereas the probability of acceptance is maintained at a constant level approached to the appropriate one at the stage of continuous production.

Keywords: concrete, compressive strength, conformity criterion, order statistics.

Introduction

According to the standard PN EN 206-1:2003 [1] compound concrete compressive strength conformity criteria are in effect which are formulated with regard to the two stages of production, initial and continuous. As stated in [2-4] the criteria for the initial production are insufficiently justified. The production of concrete of low classes, assumed according to the criteria described in [1], may turn out to be uneconomical for the manufacturer [3].

Hence, there is the need to work out the idea of compliance criteria based on small sets of results, in which one can omit arbitrarily assumed values of constant coefficients, the same for all classes of concrete compressive strength.

2. Conformity criterion developed on the basis of order statistics

The concrete compressive strength conformity criterion for low volume samples has been developed on the basis of order statistics [5,6] and, finally, can be written as:

$k f_{c1} + (1-k) f_{c2} \geq f_{ck}$ for the number of the test results in the series of $n < 14$, (1)

where f_{ck} is the characteristic value of compressive strength of the concrete, $f_{c1} = X_{1:n}$ and $f_{c2} = X_{2:n}$ are determined by the two smaller values in an ordered series of results such that $f_{c1} < f_{c2}$.

The coefficient k depends on the number of results in the series (n), and takes the values shown in Table 1.

Table 1. The values of coefficient *k* based on the number of the test results in the series *n*

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k	1,421	1,384	1,344	1,304	1,264	1,223	1,183	1,143	1,103	1,062	1,021	0,980	0,938

Source: own calculations

A criteria of conformity formulated (1) for small samples was evaluated by calculating the probability of acceptance. For this purpose the Monte Carlo simulation method was used. Based on the method [7] one generated 100 000 groups of $n = 3$ random numbers in accordance with the standard normal distribution. Taking as a concrete class C25/30 model and assumed constant fraction of defects of the series w = 0.05 and variable standard deviation ($\sigma = 2,3,4,5$ and 6 MPa) five different distributions were obtained. With a fixed fraction of defects the probabilities of acceptance for the conformity criterion were calculated according to PN EN 206-1:2003 [1] (criterion 1, criterion 2 for the initial production) and the criterion described with conditions (1).

The calculation results are shown in Table 2.

Table 2. The probability of acceptance for a compound conformity criterion for the series of samples of *n = 3* at constant fraction of defects of the batch *w = 0.05*

Criterion	Probability of acceptance for the standard deviation [MPa]				
	2	3	4	5	6
PN EN 206-1	0,2693	0,7049	0,8651	0,9264	0,9372
The new criterion	0,7053	0,7047	0,7053	0,7050	0,7053

Source: own calculations

Analyzing the values from Table 2. it can be seen that the probability of acceptance is maintained at a constant level (approximately 0.705), and does not depend on the standard deviation. In addition, the obtained values are close to the probabilities of acceptance set for the continuous production according to PN EN 206-1 in [3].

The criterion does not require the knowledge of the type of distribution in the population or the control of the standard deviation.

3. Summary

The initial verification of conformity criterion presented in the article, based on order statistics allows for the following conclusions:

The estimation of the characteristic value of compressive strength of concrete obtained by means of order statistics does not require *a priori* knowledge of the distribution of strength in the general population.

The probability of acceptance for the criterion (1) for a series $n = 3$ with constant fraction of defects 5% is maintained on the constant level at about 0.705 and is not dependent on the dispersion of strength.

The values of probabilities of acceptance for a series $n = 3$ for the conformity criterion (1) set at a constant fraction of defects 5% are similar to the probabilities of acceptance assigned to a continuous production according to PN EN 206-1:2003 [1].

REFERENCES

1. PN EN 206-1:2003. Beton – Część 1: Wymagania, właściwości, produkcja i zgodność.
2. Beal A.N. Concrete strength testing - are the code writers getting it right? The Structural Engineer 87 (10) (2009) 73.
3. Woliński S., Skrzypczak I. Kryteria statystyczne zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie. Materiały Budowlane 2 (2006) 20–25.
4. Brunarski L. Podstawy matematyczne kształtowania kryteriów zgodności wytrzymałości materiałów, ITB, 2009.
5. ISO 12491:1997 Statistical methods for quality control of building materials and components. European Standard, CEN.
6. Tur W., Derechennik S., Szczygielska E. Niekotoryje problemy ocenki sootwietstwia procznosti betona soglasno normy EN 206-1:2000, w: Problemy sovremennowo betona i żelezobetona. (ed. Markowski M.) Mińsk 2011.
7. Taerwe, L. Evaluation of compound compliance criteria for concrete strength. Materials and Structures 21(1) (1988)13-20.