

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра
«Теоретическая механика и механика материалов»

Л.Е. Реут

**КРУЧЕНИЕ. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ
ПРИ КРУЧЕНИИ**

Учебно-методическое пособие
для студентов машиностроительных специальностей

Электронное учебное издание

Реут Л.Е.

Кручение. Расчеты на прочность и жесткость при кручении: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей (электронное учебное издание) / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2023. – 79 с.

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории сверхтвердых и износостойких материалов Института порошковой металлургии им. академика О.В. Романа *Л.Н. Дьячкова*;

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Гидротехническое и энергетическое строительство, водный транспорт и гидравлика» Белорусского национального технического университета

И.В. Качанов

Электронное учебное издание представляет собой пособие по дисциплине «Механика материалов» и рассматривает важный раздел курса, посвященный деформации кручения, одной из наиболее часто встречающейся на практике деформации, которой подвергаются многие детали машин, механизмов и строительных сооружений. В пособии подробно представлен теоретический аспект темы, а также предложен набор практических инженерных задач с решениями, анализом, пояснениями и методическими рекомендациями.

Учебное пособие предназначено для студентов всех технических специальностей дневной и заочной форм обучения высших технических учебных заведений, а также для преподавателей при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	5
1. Общее определение деформации кручения	5
2. Внешние силы, вызывающие кручение	5
3. Внутренние усилия при кручении. Эпюра крутящих моментов	6
4. Напряжения и деформации при кручении. Расчеты на прочность и жесткость	8
4.1. Кручение стержней круглого сечения	9
4.2. Кручение стержней некруглого сечения	16
4.3. Кручение тонкостенных стержней замкнутого и открытого профиля	20
5. Рациональные формы сечений при кручении	25
ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	28
1. Напряжения и деформации при кручении. Расчеты на прочность и жесткость	28
2. Статически неопределимые задачи на кручение	61
 Литература	 79

ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов, в основе которой лежит наука о сопротивлении материалов, представляет собой фундаментальную общетехническую дисциплину, изучаемую во всех технических вузах и являющуюся основой технического образования инженера любой специальности. При разработке инженерных конструкций главной задачей является обеспечение прочности, надежности и долговечности деталей и узлов в заданных эксплуатационных условиях. Поэтому первостепенными и основными расчетами в механике материалов являются расчеты на прочность, которые связаны с вычислением напряжений и проектированием элементов машин и механизмов под заданные рабочие нагрузки. Однако помимо прочности не менее важным требованием является жесткость системы, ее способность в условиях силового (а иногда и температурного) воздействия деформироваться в пределах установленных технических норм, сохраняя в рабочем состоянии размеры и форму. Расчеты на жесткость связаны с деформациями, возникающими в элементах и узлах, и их вычисление является важной задачей при оценке жесткости конструкции.

Данное учебно-методическое пособие посвящено изучению деформации кручения, деформации, наиболее часто встречающейся на практике, которой подвергаются многие детали машин, механизмов и строительных сооружений. На кручение работают валы двигателей, станков, оси локомотивов и моторных вагонов, шнеки буровых установок, сверла, пружины, элементы пространственных конструкций, торсионные валы, служащие для передачи вращающих моментов, и многие другие детали промышленного и бытового назначения.

В предлагаемом учебном пособии подробно представлен теоретический аспект темы деформации кручения – рассмотрены вопросы внутренних сил и построение эпюр крутящих моментов, определение напряжений и деформаций, расчеты элементов на прочность и жесткость, обоснование и выбор рациональных форм сечений и оптимизация схем нагружения. Здесь также предложено большое количество примеров и задач с решениями, анализом и пояснениями.

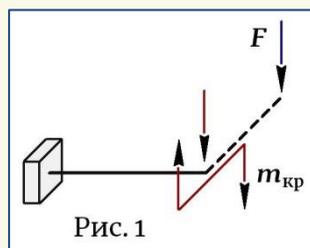
Пособие может быть использовано студентами машиностроительных и других технических специальностей всех форм обучения в качестве литературы для изучения предмета и подготовки к экзаменам, а также может быть полезным преподавателям, читающим соответствующие курсы, для подготовки лекций и практических занятий.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Общее определение деформации кручения

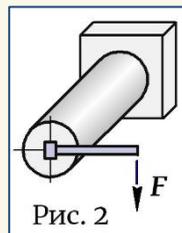
КРУЧЕНИЕМ называется деформация, когда в сечении элемента действует крутящий момент $M_{кр}$, а поперечные сечения поворачиваются друг относительно друга, вращаясь вокруг его оси. Стержень, работающий на кручение, называется **ВАЛОМ**.

Деформация кручения является одной из наиболее распространенных деформаций, которым подвергаются элементы конструкций в процессе их эксплуатации, и встречается на практике очень часто. На кручение работают трансмиссионные валы, передающие мощность посредством зубчатых, планетарных, ременных и других передач. Кручение испытывают элементы пространственных конструкций, как, например, показано на рис. 1, где сила, действующая на одну часть конструкции и создающая там изгиб, на другой части вызывает уже изгиб и кручение. Кручение испытывает пруток цилиндрической винтовой пружины при ее растяжении или сжатии, кручению подвергается дверной ключ при повороте в замочной скважине и многие другие элементы узлов и механизмов.



2. Внешние силы, вызывающие кручение

Кручение вызывается ПАРАМИ сосредоточенных или распределенных вдоль оси стержня сил, создающих момент, плоскость действия которого расположена перпендикулярно к продольной оси стержня. Такая пара возникает в случае, когда линия действия силы не проходит через центр тяжести сечения (например, действие силы на элемент происходит опосредованно, через другие элементы, жестко с ним соединенные), в результате чего возникает «рычаг», закручивающий элемент (рис. 2).



В расчетных задачах внешний закручивающий момент изображается в виде пары сил, но чаще в виде дуги, как показано на рис. 3. От действия внешних моментов возникает реактивный момент на опоре, который, как и все опорные реакции, определяется из статического

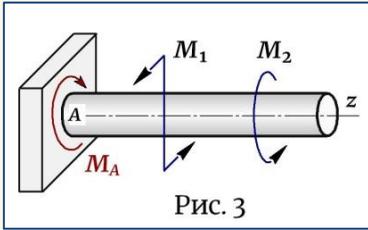


Рис. 3

уравнения равновесия:

$$\sum M_z = 0: M_1 + M_2 - M_A = 0,$$

откуда $M_A = M_1 + M_2$.

Примечание.

При составлении уравнения равновесия строгого правила знаков для внешних закручивающих моментов не существует. При решении конкретных задач внешним моментам одного направления следует приписывать определенный знак, например «плюс», тогда моменты обратного направления будут иметь знак «минус».

Во многих инженерных конструкциях, например, при расчете валов зубчатых и ременных передач, внешний момент задается через мощность, передаваемую валом (N), и скорость вращения вала (n):

- ★ если $\left. \begin{matrix} N - \text{л.с.} \\ n - \text{об/мин} \end{matrix} \right\} \rightarrow M = 7,2 \frac{N}{n} [\text{кНм}];$
- ★ если $\left. \begin{matrix} N - \text{кВт} \\ n - \text{об/мин} \end{matrix} \right\} \rightarrow M = 9,7 \frac{N}{n} [\text{кНм}].$

3. Внутренние усилия при кручении. Эпюра крутящих моментов

Под действием внешних закручивающих моментов в сечениях вала возникает внутренний **крутящий момент** $M_{кр}$, который, как и все внут-

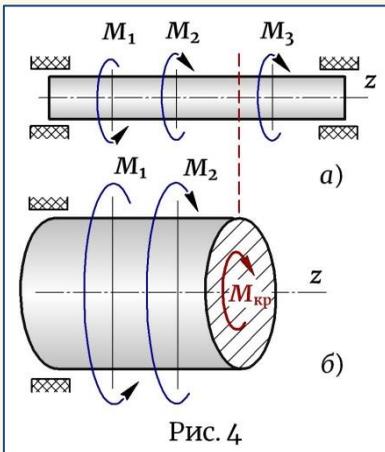


Рис. 4

ренние усилия, определяется МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ (рис. 4). Величина и направление крутящих моментов не зависит от размеров и формы сечения, а зависит от величины и направления внешних моментов и полностью определяется только одними уравнениями равновесия.

Рассмотрим вал, опирающийся по краям на опоры (подшипники) и подвергающийся действию закручивающих моментами (рис. 4, а):

★ Под действием внешних моментов вал должен находиться в равновесии и для него должно выполняться условие —

$$\sum M_z = 0: M_1 - M_2 - M_3 = 0.$$

★ Рассекаем вал плоскостью, правую часть отбрасываем и действие отброшенной части на оставшуюся заменяем внутренним моментом $M_{кр}$ (рис. 4, б). Для вала, находящегося в равновесии, в равновесии должна находиться любая отсеченная его часть, поэтому составляем для оставшейся части уравнение равновесия —

$$\sum M_z = 0: M_1 - M_2 - M_{кр} = 0,$$

откуда

$$M_{кр} = M_1 - M_2.$$

Таким образом:

Крутящий момент в сечении численно равен алгебраической сумме внешних закручивающих моментов, действующих по одну сторону от сечения.

Если на вал действуют несколько внешних закручивающих моментов, приложенных в различных сечениях, эти моменты делят вал на участки, границами которых являются сечения их приложения. В этом случае крутящий момент следует определять на каждом участке, а затем по полученным данным строится **эпюра крутящих моментов**.

Для правильного построения эпюры крутящих моментов принимаем **ПРАВИЛО ЗНАКОВ** для $M_{кр}$: *если при взгляде со стороны сечения внешний момент направлен против часовой стрелки, его значение принимаем за «плюс», если по часовой стрелке — «минус».*

ПРИМЕР. Для вала (рис. 5, а) построить эпюру крутящих моментов.

Следует обратить внимание, что под действием внешних моментов вал должен находиться в равновесии, а поэтому для него должно выполняться условие: $\sum M_z = 0: M_1 - M_2 + M_3 + M_4 = 0$.

В пределах границ участков проводим сечения и определяем в них крутящий согласно принятому правилу знаков:

Сечение 1 (смотрим в сечение слева направо): $M_{кр1} = 0$;

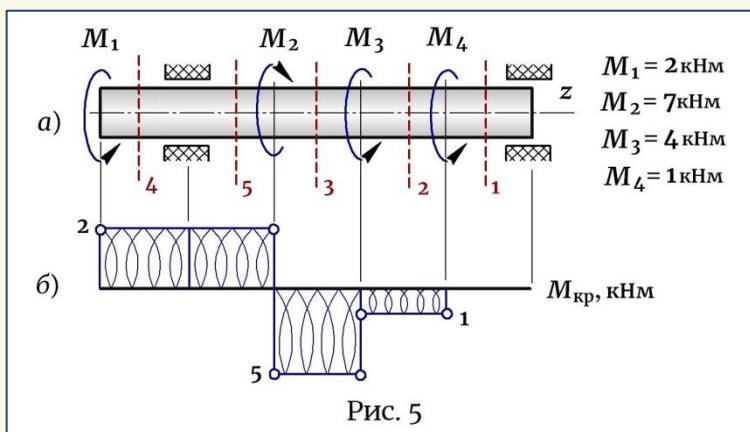
Сечение 2 (смотрим в сечение слева направо): $M_{кр2} = -M_4 = -1 \text{ кНм}$;

Сечение 3 (смотрим в сечение слева направо):

$$M_{кр3} = -M_4 - M_3 = -1 - 4 = -5 \text{ кНм};$$

Сечение 4 (смотрим в сечение справа налево): $M_{кр4} = +M_1 = +2 \text{ кНм}$;

Сечение 5 (смотрим в сечение справа налево): $M_{кр5} = +M_1 = +2 \text{ кНм}$.



По полученным результатам строим эпюру крутящих моментов. Эпюра строится на оси вала: отрицательные значения откладываются вниз, положительные вверх. Эпюра крутящих моментов, в отличие от других эпюр, штрихуется *винтовой линией* (рис. 5, б).

Примечание.

Скачок на эпюре крутящих моментов равен внешнему моменту, приложенному в этом сечении.

4. Напряжения и деформации при кручении. Расчеты на прочность и жесткость

Согласно теории кручения расчет стержней подразделяется и рассматривается для трех основных групп — стержни круглого, некруглого и тонкостенного сечения произвольной конфигурации, что вызвано различным характером деформации указанных форм стержней при кручении. Кручение круглых и полых кольцевых стержней не приводит к нарушению плоскостности сечения, поэтому для них применима гипотеза плоских сечений, позволяющая для решения использовать методы и подходы, принятые в сопротивлении материалов. Применение указанных методик возможно также и для некоторых тонкостенных сечений, в которых независимо от их очертания тонкостенность позволяет ввести ряд допущений и использовать для расчета принятые в механике материалов расчетные формулы. Рас-

чет стержней некруглого сечения (прямоугольного, эллиптического и т.д.) является задачей намного более сложной, так как в таких элементах поперечные сечения не остаются плоскими, они искривляются (депланируют) и вследствие возникающих продольных деформаций принимают пространственные формы различной конфигурации. Из-за нарушения гипотезы плоских сечений расчет таких стержней методами сопротивления материалов становится невозможным и эти задачи рассматриваются в теории упругости, где дается точное их решение различными физико-математическими методами с применением соответствующего математического аппарата, а в механике материалов для таких стержней приводятся только некоторые конечные результаты полученных решений.

4.1. Кручение стержней круглого сечения

Напряжения. Расчеты на прочности

Задача определения напряжений при кручении является *статически неопределимой*, поэтому требует совместного рассмотрения *статической, геометрической и физической* сторон.

Статическая сторона

Рассмотрим кручение вала, в сечении которого действует крутящий момент $M_{кр}$, и наметим точку сечения с координатами "x – y" в системе центральных осей, расположенную на окружности радиусом ρ . Выделим в окрестности точки бесконечно малую площадку dA и укажем действующее на нее напряжение τ , которое будет направлено в направлении $M_{кр}$ и приложено по касательной к окружности расположения точки (рис. 6).

Согласно интегральным уравнениям, связывающим внутренние усилия с напряжениями, зависимость для кручения имеет вид:

$$M_Z = M_{кр} = \int_A (\tau_x y + \tau_y x) dA,$$

где $\tau_x = \tau \cos \alpha$, $\tau_y = \tau \sin \alpha$, $x = \rho \sin \alpha$, $y = \rho \cos \alpha$ (рис. 6).

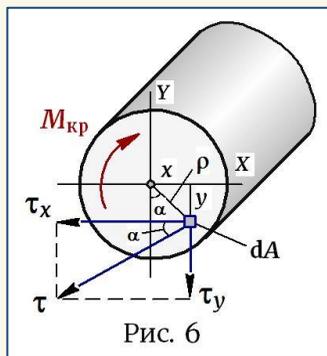


Рис. 6

Подставляем указанные значения под знак интеграла —

$$M_{кр} = \int_A (\tau \cos \alpha \cdot \rho \cos \alpha + \tau \sin \alpha \cdot \rho \sin \alpha) dA = \int_A \tau \rho (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) dA$$

и получаем *статическую сторону* в виде:

$$M_{кр} = \int_A \tau \rho dA . \quad (1)$$

Геометрическая сторона

Рассмотрим качественную сторону деформации кручения. Для этого на стержень нанесем сетку продольных и поперечных линий, замерим расстояние "a" между соседними сечениями и выделим прямоугольный элемент, а также одну из образующих АВ (рис. 7, а). Далее произведем закручивание стержня, исследуем характер изменения сетки и по ее искажению (рис. 7, б) сделаем следующие выводы:

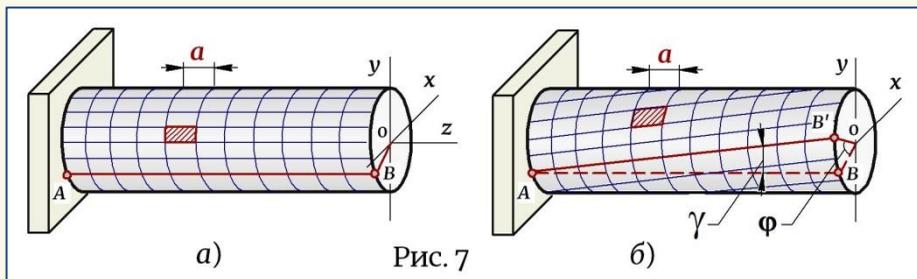


Рис. 7

1. Поперечные линии сетки, представляющие собой периметры сечений стержня и являющиеся окружностями, остаются окружностями и после закручивания, а это значит, что в стержне при **кручении сечения остаются плоскими**.

Примечание.

Одной из гипотез, принимаемой в механике материалов, является «гипотеза плоских сечений» или гипотеза Бернулли, согласно которой, сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации. Эта гипотеза играет исключительно важную роль в практике инженерных расчетов. В ее основе лежит предположение о том, что деформации внутри элемента имеют такой же характер, как и на его поверхности, и точки, принадлежащие одному плоскому сечению, после нагружения остаются в той же плоскости, т.е. сечение перемещается как одно целое, представляя собой жесткую пластину. Для некоторых деформаций, как, например, растяжение, сжатие, чистый изгиб и кручение эта гипотеза является строгой, выполняется абсолютно и обеспечивает получение точных рас-

четных формул. В случаях, когда сечения искривляются (например, при поперечном изгибе), гипотеза является приближенной и полученные на ее основе формулы носят приближенный характер.

2. Расстояние "a" между сечениями (рис. 7, а, б) не изменяется, значит, при кручении отсутствует продольная деформация и в точках поперечного сечения также будут отсутствовать нормальные напряжения σ , отвечающие за изменение длины, т.е. $\sigma = 0$.

3. При кручении продольные линии (образующие стержня) и радиусы сечений остаются прямыми и только поворачиваются на некоторый угол, в результате возникают две деформации (рис. 7, б) –

- ★ γ – **угол сдвига** – угол поворота образующей относительно первоначального положения;
- ★ φ – **угол закручивания** – угол поворота одного сечения относительно другого.

4. Рассмотрим выделенные на рис. 7, а, б элементы (рис. 8). Размеры сторон элементов не изменяются, а только происходит искажение формы, т.е. изменение первоначально прямых углов. А это означает, что в точках сечения действуют касательные напряжения τ , и поскольку здесь $\sigma = 0$, значит, при кручении в точках сечения имеет место **чистый сдвиг**.

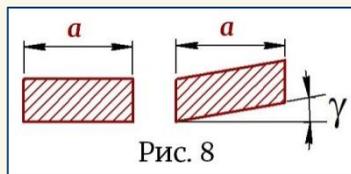


Рис. 8

Вернемся к *геометрической стороне* и рассмотрим бесконечно малый элемент стержня длиной dz и треугольники на его цилиндрической поверхности и в сечении (рис. 9):

$$\Delta ACC' \rightarrow \operatorname{tg} \gamma = \frac{CC'}{dz} \approx \gamma \rightarrow CC' = \gamma dz.$$

$$\Delta OCC' \rightarrow CC' = r d\varphi.$$

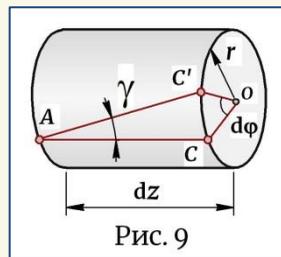


Рис. 9

Примечание.

В силу малости упругих деформаций принимаем тангенс угла сдвига примерно равным этому углу.

Приравниваем значения $CC' \rightarrow \gamma dz = r d\varphi$ и получаем взаимосвязь между **углом сдвига** и **углом закручивания** в виде:

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dz}, \quad (2)$$

где $\frac{d\varphi}{dz} = \Theta$ – **относительный угол закручивания**. Тогда на основании (2)

→ $\gamma = r\Theta$. Это выражение получено для наружно-го радиуса сечения r (рис. 10), но оно справедливо и для любого внутреннего радиуса ρ . И тогда **геометрическую сторону** задачи получаем в виде:

$$\gamma = \rho\Theta. \quad (3)$$

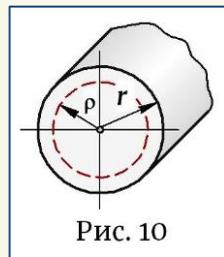


Рис. 10

Физическая сторона

Физическая сторона – это закон Гука. И поскольку при кручении, как было установлено выше, все точки находятся в состоянии **чистого сдвига**, закон Гука при сдвиге имеет вид:

$$\tau = G\gamma, \quad (4)$$

где G – модуль сдвига [МПа], характеризует жесткость материала при кручении и сдвиге.

Объединяем три стороны задачи:

а) Подставляем значение (3) в (4): $\tau = G\gamma = G\rho\Theta$; (5)

б) Подставляем значение (5) в (1):

$$M_{кр} = \int_A \tau \rho dA = \int_A G\Theta\rho^2 dA = G\Theta \int_A \rho^2 dA = G\Theta I_\rho, \quad (6)$$

где I_ρ – полярный момент инерции сечения.

в) Выражаем из формулы (6) значение $\Theta = M_{кр}/GI_\rho$, подставляем его в (5) и получаем **напряжения при кручении**:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{I_\rho} \rho, \quad (7)$$

где ρ – расстояние от центра тяжести сечения до точки, в которой определяются напряжения.

Анализ формулы (7) показывает, что в центре сечения, где $\rho=0$, напряжения равны нулю, по мере приближения к периферии растут, изменяясь по линейному закону, и максимальное значение прини-

мают при $\rho_{\max} = r$, т.е. на поверхности вала, согласно формуле (7)

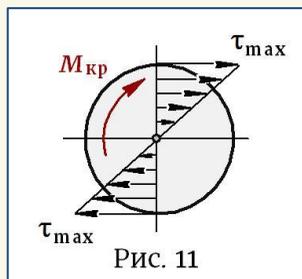
равное: $\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_{\rho}} \rho_{\max}$. Эпюра распределения напряжений по

сечению показана на рис. 11.

И тогда, учитывая, что $I_{\rho} / \rho_{\max} = W_{\rho}$,

условие прочности при кручении имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (8)$$



где W_{ρ} – полярный момент сопротивления, равный:

– для сплошного круглого сечения $\rightarrow W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}$;

– для сечения "кольцо" $\rightarrow W_{\rho} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D}$.

При действии статической нагрузки допускаемые напряжения выбирают в зависимости от допускаемого напряжения при растяжении:

для пластичных металлов $[\tau] = (0,5 \div 0,6) [\sigma]_{\text{раст}}$;

для хрупких $[\tau] = (1,0 \div 1,2) [\sigma]_{\text{раст}}$,

что соответствует для указанных материалов III-ей и I-ой теориям прочности соответственно. Однако в большинстве случаев валы кроме кручения испытывают изгиб, который в ориентировочных расчетах учитывают введением пониженного допускаемого касательного напряжения $[\tau] = (25 \div 40) \text{ МПа}$.

На основании эпюры касательных напряжений (рис. 11) видно, что внутренняя часть детали недогружена, а основная нагрузка приходится на области, прилегающие к краю сечения, а значит, *наиболее рациональными при кручении являются полые элементы* трубчатого и коробчатого типа. При равнопрочности со сплошными валами они обладают рядом преимуществ и являются более предпочтительными. Вопрос *рациональности сечений при кручении* более подробно будет рассмотрен ниже.

Виды разрушения при кручении

Полученное решение задачи кручения стержня круглого сечения подтверждается результатами многочисленных экспериментальных исследований. Однако в то же время опыты демонстрируют различный характер разрушения деталей из пластичных, хрупких, волокнистых и других материалов, что определяется способностью материала воспринимать напряжения, возникающие при кручении. Поэтому при исследовании прочности нельзя ограничиваться расчетом стержней только по наибольшим касательным напряжениям и следует учитывать напряжения по другим направлениям, возникающие в точках сечения при *чистом сдвиге*, и их действие на данный материал.

В зависимости от механических свойств материала разрушение детали при кручении происходит по механизму, свойственному для данного материала, и внешне проявляется соответствующим образом. Рассмотрим варианты разрушения при кручении валов, выполненных из различных материалов.

Вал закручивается моментом M (рис. 12, а) и в его поперечном сечении возникают касательные напряжения, изменяющиеся по закону, рассмотренному на рис. 11.

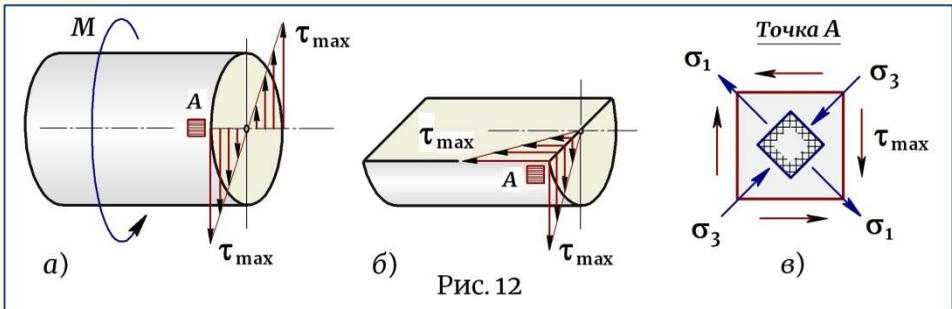


Рис. 12

Рассекаем вал по диаметру горизонтальной плоскостью и рассматриваем диаметральное сечение (рис. 12, б), в котором, согласно *закону парности касательных напряжений*, будут действовать такие же напряжения, как и в поперечном сечении, но направленные вдоль оси вала. Выделим на поверхности вала точку А (рис. 12, а), в которой, как было установлено ранее, имеет место *чистый сдвиг*. А значит, грани площадки, выделенной в окрестности точки (рис. 12, в), будут являться *площадками чистого сдвига*, в которых действуют напряжения τ_{\max} , а в главных площадках, расположенных под углом 45° ,

будут действовать главные нормальные напряжения σ_1 и σ_3 , равные по величине, но обратные по знаку, и соответственно равные напряжениям в площадках чистого сдвига: $\sigma_1 = +\tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$.

На основании рис. 12 получаем:

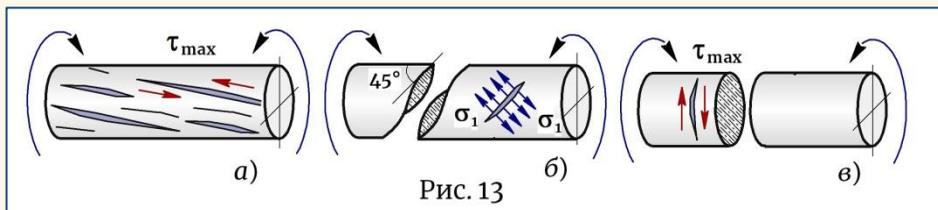


Рис. 13

★ Если материал *плохо сопротивляется сдвигу* (например, древесина вдоль волокон), его разрушение будет происходить от касательных напряжений τ_{\max} , направленных вдоль волокна (рис. 12, б), и, соответственно, по направлению образующей возникнут продольные трещины и скалывание материала (рис. 13, а);

★ Если материал *плохо сопротивляется растяжению* (например, хрупкие материалы, прочность которых при растяжении значительно ниже, чем при сдвиге), то разрушение будет происходить от растягивающих напряжений σ_1 (рис. 12, в) и трещины возникнут под углом 45° к направлению образующей (рис. 13, б);

★ Стержень, изготовленный *из пластичной стали*, разрушается в виде среза от касательных напряжений, действующих в поперечном сечении, так как растягивающие напряжения для пластичных металлов менее опасны, чем касательные. Поэтому при кручении пластичные металлы разрушаются по плоскости поперечного сечения, начиная от поверхности, где действуют наибольшие касательные напряжения (рис. 13, в).

Деформации. Расчеты на жесткость

Вернемся в выражению (2) $\gamma = r \frac{d\varphi}{dz}$, которое записано для наружного радиуса, но является справедливым и для любого внутреннего радиуса, а поэтому принимаем его в виде:

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}, \quad (9)$$

Тогда закон Гука при сдвиге (4) с учетом формулы для напряжений (7) принимает вид:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \left\| \tau = \frac{M_{кр}}{I_{\rho}} \rho \right\| = \frac{M_{кр}}{GI_{\rho}} \rho. \quad (10)$$

Приравниваем (9) и (10) - $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{кр}}{GI_{\rho}}$, откуда: $\varphi = \int_0^{\ell} \frac{M_{кр} dz}{GI_{\rho}}$.

Если вал или участок вала по длине ℓ имеет постоянную жесткость ($GI_{\rho} = \text{const}$) и здесь действует постоянный момент $M_{кр}$, то **угол закручивания** участка равен:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \ell}{GI_{\rho}} \text{ [рад]} \text{ или } \varphi^{\circ} = \frac{M_{кр} \ell}{GI_{\rho}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi}. \quad (11)$$

Выражение (11) называется **законом Гука при кручении**. Тогда **условие жесткости при кручении** имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\max} &= \frac{M_{кр} \ell}{GI_{\rho}} \leq [\varphi] \\ \varphi^{\circ}_{\max} &= \frac{M_{кр} \ell}{GI_{\rho}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} \leq [\varphi^{\circ}] \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Значение " GI_{ρ} " называется **жесткость сечения при кручении**.

4.2. Кручение стержней некруглого сечения

В инженерной практике часто встречаются случаи, когда кручению подвергаются стержни, имеющие не круглое сечение, а сечение другой формы – прямоугольное, треугольное, эллиптическое и т.д. При кручении таких элементов гипотеза плоских сечений нарушается, сечения не остаются плоскими, они искривляются (это явление называется **депланация**), т.е. происходит перемещение точек вдоль оси стержня (рис. 14). Если продольные перемещения не ограничены связями и точки свободно перемещаются вдоль оси, такое кручение называется **чистым** или **свободным кручением**. При сво-

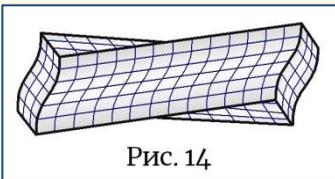
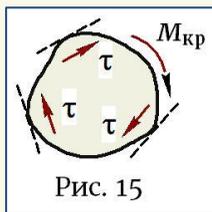


Рис. 14

бодном кручении все сечения по длине стержня деформируются одинаково, поэтому его длина не изменяется, искривление (коробление) происходит свободно, беспрепятственно, а значит, не сопровождается возникновением нормальных напряжений, и в точках сечения действуют только касательные напряжения, которые во всех сечениях имеют одинаковую величину и характер распределения. Чистое кручение возможно только для стержня постоянного сечения, скручиваемого парами сил, приложенными по его концам. Если продольное перемещение точек ограничено, такое кручение называется **стесненным кручением**. Примером стесненного кручения является брус, консольно закрепленный в заделке. При стесненном кручении точки сечения получают различные осевые смещения, поэтому сечения искривляются неодинаково. Деформация такого бруса переменна по его длине, изменяясь от заделки, где искривление равно нулю, до свободного конца. А так как длина бруса изменяется, значит, в поперечном сечении кроме касательных напряжений действуют нормальные напряжения, неравномерно распределенные по сечению.

Расчет стержней некруглого сечения и при свободном, и, особенно, при стесненном кручении представляет задачу высокой сложности и ее решение возможно лишь методами теории упругости, где дается точное их решение, а в механике материалов приводятся только некоторые конечные результаты полученных решений.

Рассмотрим вопросы свободного кручения некоторых стержней некруглого сечения. Несмотря на искривление сечений, в некруглых сечениях, также как и в круглых, касательные напряжения в любой точке контура действуют в направлении момента $M_{кр}$ и направлены по касательной к контуру (рис. 15). Основными расчетными величинами при кручении стержней некруглого сечения являются макси-



мальные касательные напряжения τ_{max} , а также абсолютный φ и относительный Θ углы закручивания, определяемые по формулам —

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_K}; \quad \varphi = \frac{M_{кр} \ell}{GI_K}; \quad \Theta = \frac{M_{кр}}{GI_K}, \quad (13)$$

где для некруглых сечений: W_K — момент сопротивления при кручении (*геометрический фактор прочности*); I_K — момент инерции при кручении (*геометрический фактор жесткости*);

Впервые общий метод решения задачи о чистом кручении стержней некруглого сечения был разработан Сен-Венаном в 1864 году.

Прямоугольное сечение

Характер распределения касательных напряжений в прямоугольном сечении, а также по его контуру, представлен на рис. 16:

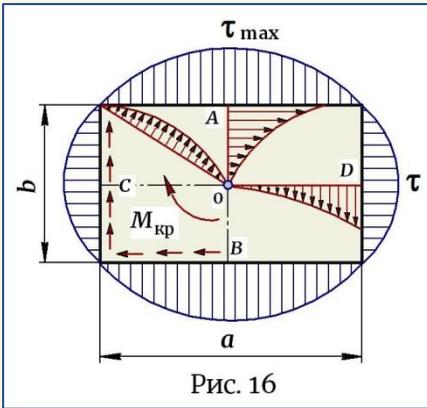


Рис. 16

★ В центре тяжести прямоугольного сечения, как и в круглых сечениях, согласно формуле (7) – $\tau = 0$;

★ По мере приближения к краю сечения касательные напряжения возрастают, причем возрастание происходит по нелинейному закону;

★ Наибольшего значения напряжения достигают у поверхности посередине длинной стороны (точки A и B) – здесь $\tau = \tau_{\max}$;

★ Посередине короткой стороны (точки C и D) касательные напряжения меньше максимальных и составляют – $\tau = \eta \tau_{\max}$; (14)

★ В вершинах прямоугольника $\tau = 0$.

Для прямоугольного сечения момент сопротивления и момент инерции при кручении определяются по формулам:

$$W_K = \alpha ab^2; I_K = \beta ab^3, \quad (15)$$

где a и b – соответственно длинная и короткая стороны прямоугольника, а коэффициенты α и β , а также η (14) выбираются из таблиц в зависимости от отношения a/b размеров сечения (табл.1) –

Таблица 1

a/b	α	β	η	a/b	α	β	η
1,0	0,208	0,141	1,00	4,0	0,282	0,281	0,745
1,5	0,231	0,196	0,859	6,0	0,299	0,299	0,743
1,75	0,239	0,214	–	8,0	0,307	0,307	0,743
2,0	0,246	0,299	0,795	10,0	0,313	0,313	0,743
2,5	0,256	0,249	–	∞	0,333	0,333	0,743
3,0	0,267	0,263	0,753				

И тогда на основании формул (13), (14) и (15) для прямоугольного сечения получаем –

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha ab^2}; \quad \tau = \frac{\eta M_{\text{кр}}}{\alpha ab^2}; \quad \varphi = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{G \beta ab^3}; \quad \Theta = \frac{M_{\text{кр}}}{G \beta ab^3}, \quad (16)$$

а условие прочности и жесткости при кручении стержня прямоугольного сечения принимают соответствующий вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha ab^2} \leq [\tau]; \quad \Theta = \frac{M_{\text{кр}}}{G \beta ab^3} \leq [\Theta]. \quad (17)$$

Эллиптическое сечение

Характер распределения касательных напряжений в эллиптическом сечении представлен на (рис. 17):

★ В центре сечения $\tau = 0$, а наибольшие напряжения τ_{\max} возникают в крайних точках, лежащих на малых полуосях;

★ Наибольшие напряжения в наружных точках сечения на большой полуоси равны –

$$\tau = \tau_{\max} / (a/b). \quad (18)$$

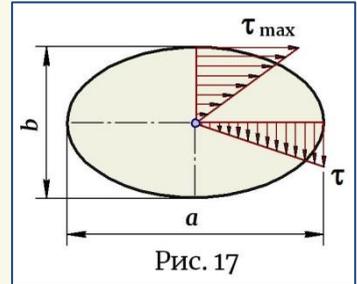


Рис. 17

Для эллиптического сечения момент сопротивления и момент инерции при кручении определяются по формулам:

$$W_{\text{к}} = \frac{\pi ab^2}{16}; \quad I_{\text{к}} = \frac{\pi ab}{64} (a^2 + b^2). \quad (19)$$

Тогда соответственно напряжения и угол закручивания на основании формул (13), (18) и (19) для эллиптического сечения равны –

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi ab^2}; \quad \tau = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi a^2 b}; \quad \varphi = \frac{64M_{\text{кр}} \ell}{\pi ab (a^2 + b^2)}. \quad (20)$$

Сечения других форм

При кручении упругого стержня с поперечным сечением в виде параллелограмма, трапеции, треугольника или любой другой про-

извольной формы приближенное значение наибольших касательных напряжений и угла закручивания можно получить, приведя заданное сечение к прямоугольной форме, называемой **эквивалентным прямоугольником**, геометрические характеристики которого – площадь, момент инерции, момент сопротивления – имеют значения, близкие значениям заданной фигуры. При расчете конструкций в зависимости от поставленной задачи понятие эквивалентности может рассматриваться и по другим величинам, соответствующим данному расчету, как например, в задачах на устойчивость в создаваемых эквивалентных сечениях добиваются близости моментов инерции. Что касается расчетов на кручение стержней некруглого сечения, то здесь основными геометрическими величинами, согласно формуле (13), являются значения W_K и I_K , поэтому в этих задачах сечение приводится к прямоугольнику с близкими значениями указанных величин.

На рис. 18 показано создание **эквивалентного прямоугольника** для сечения «равнобедренная трапеция»: для этого необходимо из центра тяжести трапеции провести перпендикуляры OA и OB на боковые стороны, затем через точки A и B провести перпендикуляры до пересечения с нижним основанием и уровнем верхнего основания. В результате полученный прямоугольник "abcd" и будет эквивалентным сечением для равнобедренной трапеции. Приведя таким образом сечение любой другой произвольной формы к эквивалентной фигуре, приближенное значение напряжений и угла закручивания можно получить по формулам (16), используемым для прямоугольника. Для различных форм сечений условные геометрические характеристики, используемые в расчетах на кручение, представлены в соответствующей справочной литературе.

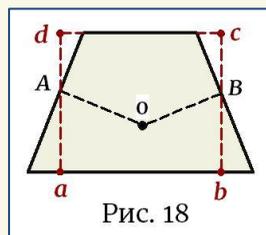


Рис. 18

4.3. Кручение тонкостенных стержней замкнутого и открытого профиля

Стержень называется **тонкостенным**, если толщина стенки значительно (в 5÷10 раз) меньше длины контура сечения. Форма профиля тонкостенного стержня определяется его средней (срединной) линией, проходящей посередине толщины стенки. Срединная линия может быть замкнутой или незамкнутой, вследствие чего тонкостенные стержни различают **замкнутого** (рис. 19, а) и **открытого** (рис. 19, б)

профиля, что определяет особенности их поведения при кручении и требует применения соответствующих методов расчета.

Расчет тонкостенных стержней имеет большое практическое значение. Обладая большой прочностью и относительно малым весом, тонкостенные стержни получили широкое применения и как самостоятельные детали машин, и как вспомогательные элементы в конструкциях, собранных из пластин и оболочек. К тонкостенным стержням относятся стандартные прокатные профили – швеллеры, уголки, двутавры, трубчатые изделия различных форм сечений и т.д., которые в качестве конструктивных элементов широко используются как в машиностроении, так и в строительной практике.

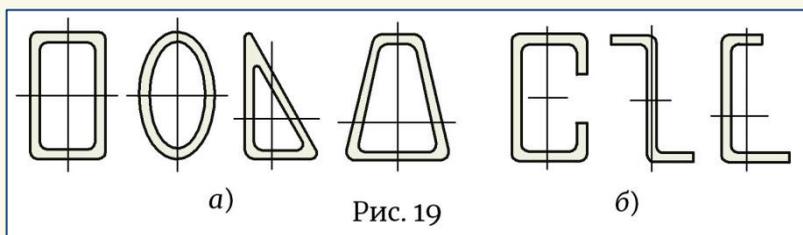


Рис. 19

Замкнутые профили

В замкнутых профилях (рис. 19, а) постоянной толщины напряжения по толщине сечения распределены равномерно.

Для расчета на кручение стержней трубчатого некруглого сечения воспользуемся формулами, применяемыми для кольцевого сечения круглой формы (рис. 20). Согласно определению, полярный момент инерции сечения определяется интегралом:

$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA, \quad (21)$$

где для тонкого кольца в силу его тонкостенности любой внутренний радиус ρ можно считать постоянным и равным радиусу срединной окружности $r_0 = (R+r)/2$, а площадь сечения принять как $A = 2\pi r_0 \delta$. Тогда решение интеграла (21)

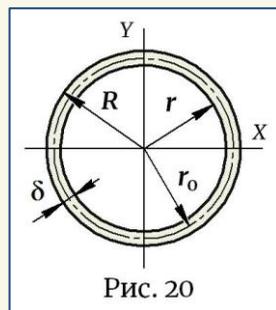


Рис. 20

принимает вид — $I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = \rho^2 \int_A dA = r_0^2 A$ — и позволяет получать

для тонкого кольцевого сечения значения полярного момента инерции и, соответственно, полярного момента сопротивления в виде:

$$I_{\rho} = 2\pi r_0^3 \delta; \quad W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{r_0} = 2\pi r_0^2 \delta. \quad (22)$$

Учитывая, что значение $\pi r_0^2 = A_0$ – это площадь круга, ограниченного срединной линией радиуса r_0 , геометрические характеристики (22) могут быть представлены как:

$$I_{\rho} = 2A_0 r_0 \delta; \quad W_{\rho} = 2A_0 \delta. \quad (23)$$

Используем значения (23) для замкнутого контура произвольной формы (рис. 21) и, согласно формулам (8) и (11), получаем выражения для напряжений и угла закручивания в виде:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}}}{2A_0 \delta}; \quad (24)$$

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{G \cdot 2A_0 r_0 \delta}. \quad (25)$$

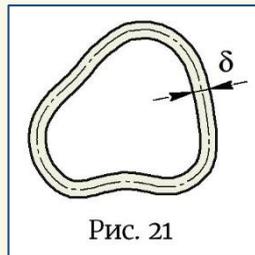


Рис. 21

Выражаем крутящий момент из формулы (24) $\rightarrow M_{\text{кр}} = 2A_0 \delta \tau$, подставляем его в (25), преобразовываем –

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{G \cdot 2A_0 r_0 \delta} = \frac{\cancel{2A_0} \delta \tau \ell}{G \cdot \cancel{2A_0} \delta \cdot r_0} = \frac{\tau \ell}{Gr_0} \cdot \frac{2\pi r_0}{2\pi r_0} = \frac{S\tau \ell}{2G\pi r_0^2} = \frac{S\tau \ell}{2GA_0},$$

и получаем окончательные формулы для вычисления касательных напряжений и угла закручивания для некруглого замкнутого тонкостенного контура:

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{2A_0 \delta}; \quad \varphi = \frac{S\tau \ell}{2GA_0}, \quad (26)$$

где S – длина срединной линии трубчатого тонкостенного сечения круглой или другой произвольной формы; A_0 – площадь, охватываемая срединной линией.

При постоянной толщине δ сечения касательные напряжения во всех его точках одинаковы. В сечении переменной толщины наибольшие напряжения возникает там, где сечение тоньше:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{2A_0 \delta_{\min}}, \quad (27)$$

откуда следует, что при кручении профиля переменного сечения разрушение начинается там, где толщина стенки минимальна.

Открытые профили

Если открытый профиль (рис. 19, б) мысленно распрямить, то получится прямоугольник со сторонами: S – длинная сторона, δ – короткая сторона или толщина стенки профиля, которые в прямоугольном сечении (рис. 16) соответственно обозначались как a и b . Учитывая, что $\delta \ll S$, соотношение сторон можно принять равным $S/\delta = \infty$ и использовать для расчета открытого профиля те же формулы, что и для прямоугольника, принимая в них согласно табл.1 значения: $\alpha = \beta = 1/3$. Тогда в соответствии с формулами (16) получаем:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{\text{кр}}}{S\delta^2}; \quad \varphi = \frac{3M_{\text{кр}}\ell}{GS\delta^3}. \quad (28)$$

Эти формулы могут быть использованы для открытых тонкостенных профилей, представленных, например, на рис. 19, б. Но если профиль имеет сложную конфигурацию и его нельзя развернуть в прямоугольник (рис. 22), то расчет выполняют следующим образом:

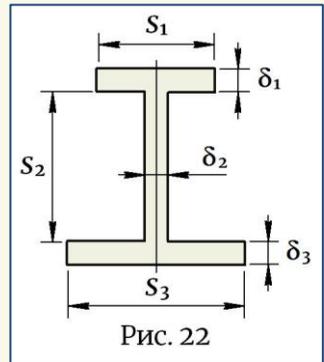
★ Сечение разбивают на простые прямоугольники, для каждого из которых момент инерции при кручении определяется по формуле (15), и с учетом принятых для тонкостенного профиля обозначений и значения

$$\beta = 1/3 \text{ принимает вид: } I_K = \frac{\beta ab^3}{3} = \frac{S\delta^3}{3}.$$

Тогда для полного профиля →

$$I_K = I_{K(1)} + I_{K(2)} + \dots + I_{K(i)} = \eta \sum \frac{S_i \delta_i^3}{3}, \quad (29)$$

где η – коэффициент, учитывающий реальный профиль и равный – для *неравнобокого уголка* $\eta = 1,0$; для *двутавра* $\eta = 1,2$; для *швеллера* $\eta = 1,12$; для *тавра* $\eta = 1,15$.



★ Так как относительный закручивания (13) для всего сечения и всех его частей одинаковый –

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{GI_K} = \frac{M_{кр(1)}}{GI_{K(1)}} = \frac{M_{кр(2)}}{GI_{K(2)}} = \dots = \frac{M_{кр(i)}}{GI_{K(i)}}, \quad (30)$$

то согласно (30) крутящий момент распределяется между частями сечения пропорционально их жесткостям –

$$M_{кр(1)} = M_{кр} \frac{I_{K(1)}}{I_K}; M_{кр(2)} = M_{кр} \frac{I_{K(2)}}{I_K} \dots M_{кр(i)} = M_{кр} \frac{I_{K(i)}}{I_K}. \quad (31)$$

★ Наибольшие касательные напряжения в каждой части сечения согласно значению (13) и с учетом (31) определяются как –

$$\tau_{\max(i)} = \frac{M_{кр(i)}}{W_{K(i)}} = \frac{M_{кр} I_{K(i)}}{I_K W_{K(i)}} = \frac{M_{кр}}{I_K} \left(\frac{I_{K(i)}}{W_{K(i)}} \right), \quad (32)$$

а значит, возникают в той части сечения, у которой отношение геометрических величин $(I_{K(i)}/W_{K(i)})$ максимальное. Это соотношение на основании формул (15) и значений $\alpha = \beta = 1/3$ может быть приведено к виду:

$$\frac{I_{K(i)}}{W_{K(i)}} = \frac{\beta ab^3}{\alpha ab^2} = \frac{(1/3)S_i \delta_i^3}{(1/3)S_i \delta_i^2} = \delta_i,$$

откуда следует вывод, что τ_{\max} возникают в части сечения, имеющей наибольшую толщину, т.е. где $\delta_i = \delta_{\max}$ (в отличие от тонкостенных сечений замкнутого профиля переменной толщины, где максимальные напряжения возникают там, где толщина стенки минимальна).

В результате, окончательные расчетные формулы для определения максимальных напряжений и угла закручивания при кручении стержня (рис. 23) принимают вид:

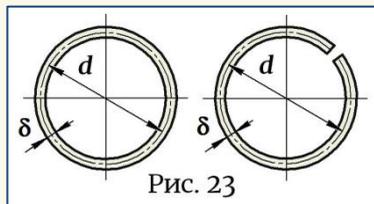
$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_K} \delta_{\max}; \quad \varphi = \frac{M_{кр} \ell}{GI_K}, \quad (33)$$

где значение I_K вычисляется по формуле (29), а отношение –

$$\frac{I_K}{\delta_{\max}} = W_K \quad (34)$$

может рассматриваться как момент сопротивления при кручении.

Характерной особенностью тонкостенных стержней открытого профиля является их малая жесткость и, как следствие, слабое сопротивление свободному кручению. Если при одинаковых условиях нагружения сравнить жесткость цельной тонкостенной трубы диаметром d и толщиной стенки δ и трубы таких же размеров, но с тонким разрезом по образующей (рис. 23), то при отношении $d/\delta=10$ угол закручивания трубы с разрезом будет в 75 раз больше, чем цельной.



Этот эффект может быть наглядно проиллюстрирован скручиванием свернутого в спираль листа бумаги в виде трубы, когда вследствие свободного скольжения слоев листа друг относительно друга возникают значительные углы поворота торцевых краев. При этом скольжение происходит также вдоль продольной оси трубы, что демонстрирует деформацию поперечного сечения. Но картина принципиально изменится, если продольные края листа, свернутого в спираль, приклеить к смежным поверхностям и вновь нагрузить закручивающими моментами — угол закручивания будет практически незаметен, а торцевые сечения останутся плоскими.

5. Рациональные формы сечений при кручении

Под **рациональностью** подразумевается способность детали обеспечивать прочность меньшей площадью поперечного сечения, либо при одинаковых площадях сравниваемых сечений обеспечивать более высокую грузоподъемность, т.е. способность сопротивляться большему крутящему моменту.

Равнопрочные валы из одного материала, в сечениях которых при одинаковых крутящих моментах возникают одинаковые максимальные касательные напряжения, имеют при различных формах сечений одинаковые полярные моменты сопротивления W_p (или W_k — для некруглых сечений), но при этом площади A этих сечений различны. Из таких элементов **наиболее рациональными являются детали с наименьшей площадью сечения**, обеспечивающей меньший вес и экономию материала, поэтому для равнопрочных стержней, работающих в одинаковых условиях и имеющих одинаковые W_p (W_k), за критерий рациональности принимается величина, называемая **удельный момент сопротивления при кручении**, определяемая соответ-

ственно для круглых и некруглых сечений как —

$$\omega_p = W_p / \sqrt{A^3} \quad \text{или} \quad \omega_k = W_k / \sqrt{A^3} . \quad (35)$$

Сечение более рационально, если при заданном W_p (W_k) оно имеет меньшую площадь сечения, а значит, бóльшую величину ω_p (ω_k) (35). Как показывают расчеты, самыми нерациональными являются двутавры, швеллеры и тонкие прямоугольные сечения, имеющие низкое значение ω_k . При кручении предпочтительным является такое сечение, при котором весь материал нагружен примерно одинаково. В кольцевом сечении (в отличие от сплошного) между наибольшими и наименьшими напряжениями разница незначительна и она будет тем меньше, чем тоньше кольцо, поэтому *наиболее рациональными* при кручении являются *полые кольцевые сечения* и, особенно, *с малой толщиной стенки*.

При расчете на жесткость в качестве критерия принимается величина, называемая *удельный момент инерции при кручении* или *удельная геометрическая характеристика крутильной жесткости* —

$$i_k = I_k / A^2 \quad \text{или} \quad i_p = I_p / A^2 , \quad (36)$$

По данному критерию полые кольцевые сечения являются еще более эффективными и рациональными, чем при расчете на прочность.

С точки зрения грузоподъемности, наиболее грузоподъемным, т.е. способным выдержать наибольший крутящий момент при сохранении прочности, является элемент с наибольшим значением W_p (W_k). Так как полые кольцевые сечения при одинаковой со сплошными сечениями площади имеют бóльшие полярные моменты сопротивления, они при прочих равных условиях являются более грузоподъемными. В этом отношении следует заметить, что при равных площадях кольцевые сечения характеризуются не только бóльшими полярными моментами сопротивления, но и бóльшими полярными моментами инерции по сравнению со сплошными валами. А значит, при равной массе полые валы являются более прочными и жесткими и при равнопрочности со сплошными элементами — более легкими и менее металлоемкими. Прямоугольные детали и детали открытого профиля любой конфигурации в сравнении с деталями круглого сечения характеризуются значительно меньшей жесткостью и прочностью, и это отличие увеличивается с ростом отношения сторон.

ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

$M_{кр} = 7,2 N(\text{л.с.})/n \text{ [кНм]}$ $M_{кр} = 9,7 N(\text{кВт})/n \text{ [кНм]}$	<p>Момент, заданный через мощность N, передаваемую валом, и скорость вращения n [об/мин]</p>
$\tau = \frac{M_{кр}}{I_{\rho}} \cdot \rho; \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau]$	<p>Напряжения и условие прочности при кручении стержней круглого сечения</p>
$\varphi = \frac{M_{кр}\ell}{GI_{\rho}} \text{ [рад]}; \varphi^{\circ} = \frac{M_{кр}\ell}{GI_{\rho}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi}$	<p>Угол закручивания. Закон Гука при кручении</p>
$A = 2\pi r_{ср}t; I_{\rho} = 2\pi r_{ср}^3t;$ $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_{\rho}} r_{ср} = \frac{M_{кр}}{2\pi r_{ср}^2t}$	<p>Площадь, полярный момент инерции и максимальные напряжения при кручении тонкостенных круглых сечений</p>
$W_K = \alpha ab^2; I_K = \beta ab^3;$ $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{\alpha ab^2}; \varphi = \frac{M_{кр}\ell}{G\beta ab^3}$	<p>Расчетные формулы при кручении стержней прямоугольного сечения: a и b — длинная и короткая стороны сечения</p>
$W_K = \frac{\pi ab^2}{16}; I_K = \frac{\pi ab}{64}(a^2 + b^2)$ $\tau_{\max} = \frac{16M_{кр}}{\pi ab^2}; \varphi = \frac{64M_{кр}\ell}{\pi ab(a^2 + b^2)}$	<p>Расчетные формулы при кручении стержней эллиптического сечения: a и b — длинная и короткая оси эллипса</p>
$\tau_{\max} = \frac{3M_{кр}}{S\delta^2}; \varphi = \frac{3M_{кр}\ell}{GS\delta^3}$	<p>Расчетные формулы при кручении тонкостенных стержней открытого профиля: S — длина срединной линии, δ — толщина сечения</p>
$\tau = \frac{M_{кр}}{2A_0\delta}; \varphi = \frac{S\tau}{2GA_0}\ell$	<p>Расчетные формулы при кручении тонкостенных стержней замкнутого профиля: S — длина срединной линии, δ — толщина сечения, A_0 — площадь фигуры, ограниченной срединной линией</p>

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Напряжения и деформации при кручении. Расчеты на прочность и жесткость

Задача 1

При закручивании вала на его поверхности напряжения равны $\tau_{\max} = 80 \text{ МПа}$. Определить касательные напряжения в точках того же сечения, расположенных на расстоянии четверти радиуса от поверхности вала.

РЕШЕНИЕ:

① Касательные напряжения на поверхности вала равны:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \left\| W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \right\| = \frac{16 M_{\text{кр}}}{\pi d^3} \rightarrow M_{\text{кр}} = \frac{\tau_{\max} \pi^3}{16}. \quad (1)$$

② Касательные напряжения в точках сечения на расстоянии четверти радиуса от поверхности вала определяются как:

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{I_{\rho}} \cdot \rho = \left\| \begin{array}{l} \rho = \frac{3}{4} r = \frac{3}{8} d \\ I_{\rho} = \pi d^4 / 32 \end{array} \right\| = \frac{M_{\text{кр}}}{\pi d^4 / 32} \cdot \frac{3}{8} d = \frac{12 M_{\text{кр}}}{\pi d^3}. \quad (2)$$

③ Подставляем значение $M_{\text{кр}}$ (1) в выражение (2) и получаем:

$$\tau = \frac{12 M_{\text{кр}}}{\pi d^3} = \frac{12 \tau_{\max} \pi d^3}{16 \pi d^3} = \frac{3}{4} \tau_{\max} = \frac{3 \cdot 80}{4} = 60 \text{ МПа}.$$

Задача 2

Для стального стержня круглого поперечного сечения диаметром $d = 20 \text{ мм}$ определить его грузоподъемность $[M_{\text{кр}}]$, если для него $[\tau] = 100 \text{ МПа}$. Определить угол закручивания участка стержня длиной $\ell = 100 \text{ см}$. Принять для материала: $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Записываем для стержня **условие прочности** и определяем грузоподъемность элемента $[M_{\text{кр}}]$:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \left\| W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \right\| = \frac{16 M_{\text{кр}}}{\pi d^3} \leq [\tau],$$

откуда $[M_{\text{кр}}] = \frac{\pi d^3 \cdot [\tau]}{16} = \frac{3,14 \cdot 20^3 \cdot 100}{16} = [\text{Н} \cdot \text{мм}] = 0,157 \text{ кНм}.$

② Угол закручивания заданного участка равен:

$$\boxed{\varphi} = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_{\rho}} = \left\| I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} \right\| = \frac{32 M_{\text{кр}} \ell}{G \pi d^4} = \frac{32 \cdot 0,157 \cdot 10^6 \cdot 1000}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 20^4} = 0,125 \text{ рад}.$$

Задача 3

Сплошной стальной вал диаметром $d=10$ см и длиной $\ell=6$ м закручен на угол $\varphi^{\circ}=4^{\circ}$. Определить наибольшие касательные напряжения в вале. Принять для стали: $G=8 \times 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Максимальные касательные напряжения при кручении равны:

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}} \rightarrow M_{\text{кр}} = \tau_{\max} W_{\rho}. \quad (1)$$

② Угол закручивания сечения (с учетом перевода радианной меры угла в градусы) по закону Гука определяется как:

$$\boxed{\varphi^{\circ} = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_{\rho}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi}} \rightarrow M_{\text{кр}} = \frac{GI_{\rho} \pi \varphi^{\circ}}{\ell \cdot 180^{\circ}}. \quad (2)$$

③ Приравняем значения $M_{\text{кр}}$ (1) и (2) и получаем:

$$\tau_{\max} W_{\rho} = \frac{GI_{\rho} \pi \varphi^{\circ}}{\ell \cdot 180^{\circ}} \rightarrow \tau_{\max} = \frac{GI_{\rho} \pi \varphi^{\circ}}{\ell \cdot 180^{\circ} \cdot W_{\rho}} = \frac{I_{\rho}}{W_{\rho}} \cdot \frac{G \pi \varphi^{\circ}}{\ell \cdot 180^{\circ}}.$$

Учитывая, что $W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}} = \frac{I_{\rho}}{d/2}$, а значит, отношение $\frac{I_{\rho}}{W_{\rho}} = \frac{d}{2}$,

вычисляем максимальные касательные напряжения:

$$\boxed{\tau_{\max}} = \frac{G d \pi \varphi^{\circ}}{2 \ell \cdot 180^{\circ}} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 100 \cdot 3,14 \cdot 4^{\circ}}{2 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 180^{\circ}} = 46,5 \text{ МПа}.$$

Задача 4

Стальной образец круглого поперечного сечения диаметром $d_{\text{обр}} = 20 \text{ мм}$ испытывается на кручение на установке, стальной вал которой имеет диаметр $d_{\text{вал}} = 40 \text{ мм}$. Образец и вал имеют общую геометрическую ось. Предел пропорциональности образца при растяжении равен $\sigma_{\text{пц}} = 320 \text{ МПа}$. Вычислить τ_{max} в вале машины в тот момент, когда наибольшие касательные напряжения в образце достигнут значения предела пропорциональности $\tau_{\text{пц}}$ при сдвиге, который следует определить, используя III-ю теорию прочности.

РЕШЕНИЕ:

① Максимальные касательные напряжения в образце равны:

$$\tau_{\text{max(обр)}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho(\text{обр})}} = \frac{M_{\text{кр}}}{\pi d_{\text{обр}}^3 / 16} = \tau_{\text{пц}} \rightarrow M_{\text{кр}} = \frac{\tau_{\text{пц}} \pi d_{\text{обр}}^3}{16}. \quad (1)$$

② Максимальные касательные напряжения в вале машины равны:

$$\tau_{\text{max(вал)}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho(\text{вал})}} = \frac{M_{\text{кр}}}{\pi d_{\text{вал}}^3 / 16} \rightarrow M_{\text{кр}} = \frac{\tau_{\text{max(вал)}} \pi d_{\text{вал}}^3}{16}. \quad (2)$$

③ На основании III-ей теории прочности определяем для образца предел пропорциональности $\tau_{\text{пц}}$ при сдвиге:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\text{пц}}, \quad (3)$$

где при **чистом сдвиге**:
$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \tau_{\text{пц}} \\ \sigma_3 = -\tau_{\text{пц}} \end{array} \right\} \rightarrow (3) \rightarrow \tau_{\text{пц}} = \frac{\sigma_{\text{пц}}}{2}. \quad (4)$$

④ Так как образец и вал имеют общую геометрическую ось, они закручиваются одинаковым крутящим моментом $M_{\text{кр}}$. Приравниваем моменты (1) и (2) и с учетом значения (4) получаем –

$$\frac{\tau_{\text{пц}} \pi d_{\text{обр}}^3}{16} = \frac{\tau_{\text{max(вал)}} \pi d_{\text{вал}}^3}{16} \rightarrow \frac{\sigma_{\text{пц}} d_{\text{обр}}^3}{2} = \tau_{\text{max(вал)}} d_{\text{вал}}^3,$$

откуда определяем τ_{max} в вале:

$$\boxed{\tau_{\text{max(вал)}}} = \frac{\sigma_{\text{пц}} d_{\text{обр}}^3}{2 d_{\text{вал}}^3} = \frac{320 \cdot 20^3}{2 \cdot 40^3} = 20 \text{ МПа}.$$

Задача 5

Стержень диаметром $d = 25$ мм и длиной $\ell = 20$ см при растяжении силой $F = 60$ кН удлиняется на $\Delta\ell = 0,122$ мм. Этот же стержень при нагружении моментом $M_{кр} = 0,2$ кНм закручивается на всей длине на угол $\varphi^\circ = 0,75^\circ$. Определить для материала стержня модуль Юнга E , модуль сдвига G и коэффициент Пуассона μ .

РЕШЕНИЕ:

① Удлинение стержня при растяжении по закону Гука равно:

$$\Delta\ell = \frac{F\ell}{EA} = \left\| A = \frac{\pi d^2}{4} \right\| = \frac{4F\ell}{E\pi d^2}, \text{ откуда}$$

$$E = \frac{4F\ell}{\pi d^2 \cdot \Delta\ell} = \frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3 \cdot 200}{3,14 \cdot 25^2 \cdot 0,122} = 200480 \text{ МПа} = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$

② Угол закручивания при кручении по закону Гука равен:

$$\varphi^\circ = \frac{M_{кр}\ell}{GI_\rho} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \left\| I_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \right\| = \frac{32 M_{кр}\ell \cdot 180^\circ}{G\pi^2 d^4}, \text{ откуда}$$

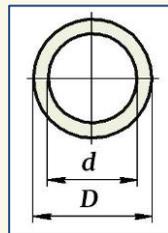
$$G = \frac{32 M_{кр}\ell \cdot 180^\circ}{\varphi^\circ \pi^2 d^4} = \frac{32 \cdot 0,2 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 180^\circ}{0,75^\circ \cdot 3,14^2 \cdot 25^4} = 79700 = 8 \times 10^4 \text{ МПа.}$$

③ На основании взаимосвязи между **тремя упругими постоянными** определяем коэффициент Пуассона:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \rightarrow \mu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 8 \cdot 10^4} - 1 = 0,25.$$

Задача 6

Полый вал круглого сечения с размерами $D = 75$ мм и $d = 50$ мм имеет длину $\ell = 1$ м и закручивается на угол $\varphi^\circ = 1^\circ$ парой сил с моментом $M_{кр} = 3,5$ кНм. Определить в сечении вала максимальные касательные напряжения τ_{\max} и модуль сдвига материала G .



РЕШЕНИЕ:

① Геометрические характеристики кольцевого сечения равны:

$$I_{\rho} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32} = \frac{3,14 (7,5^4 - 5^4)}{32} = 250 \text{ см}^4;$$
$$W_{\rho} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} = \frac{3,14 (7,5^4 - 5^4)}{16 \cdot 7,5} = 66,4 \text{ см}^3.$$

② Определяем максимальные касательные напряжения:

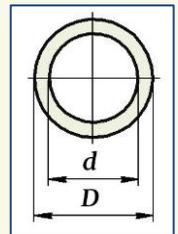
$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \frac{3,5 \cdot 10^6}{66,4 \cdot 10^3} = 52,7 \text{ МПа}.$$

③ Определяем модуль сдвига материала:

$$\varphi^{\circ} = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_{\rho}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} \rightarrow$$
$$G = \frac{M_{\text{кр}} \ell \cdot 180^{\circ}}{\varphi^{\circ} \pi I_{\rho}} = \frac{3,5 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 180^{\circ}}{1^{\circ} \cdot 3,14 \cdot 250 \cdot 10^4} = 8 \times 10^4 \text{ МПа}.$$

Задача 7

Полый стальной вал длиной $\ell = 1,8$ м нагружен по концам двумя парами сил с моментами $M_{\text{кр}} = 6$ кНм. Определить наружный D и внутренний d диаметры вала из условия, чтобы $[\varphi^{\circ}] = 2^{\circ}$ и $[\tau] = 70$ МПа. Принять для стали: $G = 8 \times 10^4$ МПа.



РЕШЕНИЕ:

① Записываем для вала **условие жесткости** (с учетом перевода радианной меры угла в градусы) и определяем полярный момент инерции сечения I_{ρ} :

$$\varphi^{\circ}_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_{\rho}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} \leq [\varphi^{\circ}] \rightarrow$$
$$I_{\rho} = \frac{M_{\text{кр}} \ell \cdot 180^{\circ}}{G \pi [\varphi^{\circ}]} = \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 1,8 \cdot 10^3 \cdot 180^{\circ}}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 2^{\circ}} = [\text{мм}^4] = 386,94 \text{ см}^4.$$

② Записываем для вала **условие прочности** и определяем полярный момент сопротивления сечения W_ρ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho} \leq [\tau] \rightarrow W_\rho = \frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]} = \frac{6 \cdot 10^6}{70} = [\text{мм}^3] = 85,71 \text{ см}^3.$$

③ Учитывая, что полярный момент сопротивления равен –

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} = \frac{I_\rho}{D/2}, \text{ получаем } \boxed{D} = \frac{2I_\rho}{W_\rho} = \frac{2 \cdot 386,94}{85,71} = 9 \text{ см},$$

а из значения $I_\rho = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = 386,94 \text{ см}^4$ находим $\boxed{d} = 7,2 \text{ см}$.

Задача 8

Сплошной вал круглого сечения диаметром $d = 80 \text{ мм}$ передает мощность $N = 90 \text{ л.с.}$ Определить предельное число оборотов вала (об/мин), если для материала $[\tau] = 70 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

Записываем для вала **условие прочности** –

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho} \leq [\tau], \text{ где } M_{\text{кр}} = 7,2 \frac{N}{n} [\text{кНм}] \text{ и } W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Тогда **условие прочности** принимает вид:

$$\tau_{\max} = \frac{7,2N \cdot 10^6 \cdot 16}{\pi d^3 \cdot n} \leq [\tau].$$

$$\text{Отсюда: } \boxed{n_{\text{пред}}} = \frac{7,2N \cdot 10^6 \cdot 16}{\pi d^3 [\tau]} = \frac{7,2 \cdot 90 \cdot 10^6 \cdot 16}{3,14 \cdot 80^3 \cdot 70} \geq 92 \text{ об/мин},$$

т.е. скорость вращения вала должна быть *не менее* 92 об/мин.

Задача 9

Вал круглого сечения диаметром $d = 50 \text{ мм}$ вращается со скоростью $n = 120 \text{ об/мин}$. Какова передаваемая мощность вала (кВт), если $\tau_{\max} = 60 \text{ МПа}$?

РЕШЕНИЕ:

Максимальные касательные напряжения в вале равны:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}, \text{ где } \left\{ \begin{array}{l} M_{\text{кр}} = 9,7 \frac{N}{n} \text{ [кНм]} \\ W_{\rho} = \pi d^3 / 16 \end{array} \right\} \rightarrow \tau_{\max} = \frac{9,7 N \cdot 10^6 \cdot 16}{\pi d^3 \cdot n}.$$

Отсюда:
$$N = \frac{\tau_{\max} \pi d^3 \cdot n}{9,7 \cdot 10^6 \cdot 16} = \frac{60 \cdot 3,14 \cdot 50^3 \cdot 120}{9,7 \cdot 10^6 \cdot 16} = 18,2 \text{ кВт.}$$

Задача 10

Определить из условий прочности и жесткости диаметр стального вала, вращающего гребной винт моторного катера, если мощность двигателя $N = 60$ л.с. и скорость вращения $n = 240$ об/мин. Принять для вала $[\tau] = 40$ МПа, $[\varphi^{\circ}] = 2^{\circ}$ /на метр длины и $G = 8 \times 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Внешний момент, действующий на вал, равен:

$$M_{\text{кр}} = 7,2 \frac{N}{n} = 7,2 \frac{60}{240} = 1,8 \text{ кНм.}$$

② Определяем диаметр вала из **условия прочности**:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}}}{\pi d^3 / 16} \leq [\tau] \rightarrow$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_{\text{кр}}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,8 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 40}} = 60 \text{ мм.}$$

③ Определяем диаметр вала из **условия жесткости**:

$$\varphi^{\circ}_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} \ell_0}{G I_{\rho}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{M_{\text{кр}} \ell_0}{G \pi d^4 / 32} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} \leq [\varphi^{\circ}] \rightarrow$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 M_{\text{кр}} \ell_0 \cdot 180^{\circ}}{G \pi^2 [\varphi^{\circ}]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,8 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 180^{\circ}}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14^2 \cdot 2^{\circ}}} = 50 \text{ мм.}$$

Окончательно принимаем бóльший диаметр — $d = 60 \text{ мм}$.

Задача 11

Сплошной вал круглого сечения диаметром $d = 80$ мм и длиной $\ell = 4,5$ м при скорости вращения $n = 140$ об/мин передает мощность $N = 50$ л.с. Определить в вале максимальные напряжения τ_{\max} и угол закручивания. Принять для вала: $G = 8 \times 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Внешний момент, действующий на вал, равен:

$$M_{\text{кр}} = 7,2 \frac{N}{n} = 7,2 \frac{50}{140} = 2,57 \text{ кНм.}$$

② Определяем максимальные касательные напряжения в вале и угол закручивания:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \left\| W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \right\| = \frac{16 M_{\text{кр}}}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 2,57 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 80^3} = 25,6 \text{ МПа};$$

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_{\rho}} = \left\| I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} \right\| = \frac{32 M_{\text{кр}} \ell}{G \pi d^4} = \frac{32 \cdot 2,57 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 80^4} = 0,032 \text{ рад.}$$

Задача 12

Определить диаметры полого стального вала – $d = 0,6D$, передающего мощность $N = 500$ кВт при $n = 100$ об/мин, если для материала вала $[\tau] = 60$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Записываем **условие прочности** вала на кручение –

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

② Подставляем сюда значения $M_{\text{кр}}$ и W_{ρ} с учетом соотношения размеров сечения $d = 0,6D \rightarrow$

$$M_{\text{кр}} = 9,7 \frac{N}{n} [\text{кНм}]; W_{\rho} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi [D^4 - (0,6D)^4]}{16D} = 0,17D^3$$

и получаем **условие прочности** в виде:

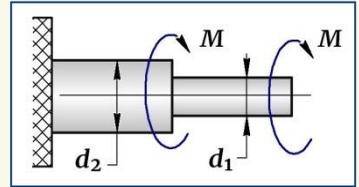
$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \frac{9,7N \cdot 10^6}{n \cdot 0,17D^3} \leq [\tau].$$

③ Определяем диаметры сечения вала:

$$\boxed{D} = \sqrt[3]{\frac{9,7N \cdot 10^6}{n \cdot 0,17[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{9,7 \cdot 500 \cdot 10^6}{100 \cdot 0,17 \cdot 60}} = 168 \text{ мм}; \quad \boxed{d} = 0,6D = 101 \text{ мм}.$$

Задача 13

Ступенчатый стержень, защемленный одним концом и имеющий круглое поперечное сечение диаметрами $d_1 = 40$ мм и $d_2 = 60$ мм, нагружается одинаковыми моментами M . При этом на участке с бóльшим диаметром в сечении возникают максимальные напряжения $\tau_{\max(2)} = 80$ МПа. Определить $\tau_{\max(1)}$ на участке вала с меньшим сечением.



РЕШЕНИЕ:

① Максимальные напряжения в сечении вала бóльшего диаметра равны:

$$\tau_{\max(2)} = \frac{M_{\text{кр}(2)}}{W_{\rho(2)}} = \left\| \frac{M_{\text{кр}(2)} = 2M}{W_{\rho(2)} = \pi d_2^3 / 16} \right\| = \frac{32M}{\pi d_2^3} \rightarrow M = \frac{\tau_{\max(2)} \pi d_2^3}{32}.$$

② Максимальные напряжения в сечении вала меньшего диаметра равны:

$$\tau_{\max(1)} = \frac{M_{\text{кр}(1)}}{W_{\rho(1)}} = \left\| \frac{M_{\text{кр}(1)} = M}{W_{\rho(1)} = \pi d_1^3 / 16} \right\| = \frac{16M}{\pi d_1^3} \rightarrow M = \frac{\tau_{\max(1)} \pi d_1^3}{16}.$$

③ Приравниваем значения моментов M и определяем $\tau_{\max(1)}$:

$$\boxed{\tau_{\max(1)}} = \frac{\tau_{\max(2)} d_2^3}{2d_1^3} = \frac{80 \cdot 60^3}{2 \cdot 40^3} = 135 \text{ МПа}.$$

Задача 14

Вес полого вала круглого сечения с отношением наружного и внутреннего диаметров $D = 2d$ меньше веса сплошного вала диаметром $d_{\text{сплош}}$ на 20%, запроектированного при $[\tau] = 60$ МПа. Определить $\tau_{\text{max(пол)}}$ в полом вале при одинаковой грузоподъемности валов.

РЕШЕНИЕ:

① Вес вала равен $Q = \gamma A \ell$, где ℓ – длина вала, A – площадь поперечного сечения, γ – удельный вес материала. Согласно условию задачи – $Q_{\text{пол}} = 0,8 Q_{\text{сплош}}$, что для двух одинаковых валов соответствует соотношению площадей сечения $A_{\text{пол}} = 0,8 A_{\text{сплош}}$, т.е.

$$\pi (D^2 - d^2) / 4 = 0,8 \pi d_{\text{сплош}}^2 / 4,$$

которое с учетом отношения диаметров $D = 2d$ принимает вид:

$$\pi [(2d)^2 - d^2] / 4 = 0,8 \pi d_{\text{сплош}}^2 / 4.$$

Отсюда:
$$d_{\text{сплош}} = 1,94 d. \quad (1)$$

② Из условия прочности на кручение определяем грузоподъемность сплошного вала –

$$\tau_{\text{max(сплош)}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho(\text{сплош})}} = \left\| W_{\rho(\text{сплош})} = \frac{\pi d_{\text{сплош}}^3}{16} \right\| = \frac{16 M_{\text{кр}}}{\pi d_{\text{сплош}}^3} \leq [\tau],$$

откуда, учитывая значение (1), получаем:

$$M_{\text{кр}} = \frac{\pi d_{\text{сплош}}^3 [\tau]}{16} = \frac{\pi (1,94 d)^3 [\tau]}{16} = \frac{7,3 \pi d^3 [\tau]}{16}. \quad (2)$$

③ Максимальные напряжения в полом вале $\tau_{\text{max(пол)}}$ с учетом соотношения размеров сечения $D = 2d$ –

$$W_{\rho(\text{пол})} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi [(2d)^4 - d^4]}{16 \cdot 2d} = \frac{15}{32} \pi d^3 -$$

определяем как:
$$\tau_{\text{max(пол)}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho(\text{пол})}} = \frac{32 M_{\text{кр}}}{15 \pi d^3},$$

откуда грузоподъемность полого вала соответственно равна:

$$M_{\text{кр}} = \frac{15 \tau_{\text{max(пол)}} \pi d^3}{32}. \quad (3)$$

④ Так как грузоподъемности валов одинаковы, приравниваем значения $M_{\text{кр}}$ (2) и (3) и определяем $\tau_{\text{max(пол)}}$:

$$\frac{7,3 \pi d^3 [\tau]}{16} = \frac{15 \tau_{\text{max(пол)}} \pi d^3}{32} \rightarrow$$

$$\tau_{\text{max(пол)}} = \frac{32 \cdot 7,3 [\tau]}{16 \cdot 15} = \frac{32 \cdot 7,3 \cdot 60}{16 \cdot 15} = 58,4 \text{ МПа.}$$

Задача 15

При испытании на кручение металлического стержня диаметром $d = 20$ мм и длиной $\ell = 20$ см установлено, что при крутящем моменте $M_{\text{кр}} = 0,16$ кНм угол закручивания составляет $\varphi = 0,026$ рад, а предел пропорциональности $\tau_{\text{шц}}$ достигается при крутящем моменте $M_{\text{кр(шц)}} = 0,24$ кНм. Определить модуль сдвига материала и величину предела пропорциональности $\tau_{\text{шц}}$ материала.

РЕШЕНИЕ:

① На основании закона Гука угол закручивания при кручении определяется как:

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_{\rho}} = \left\| I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} \right\| = \frac{32 M_{\text{кр}} \ell}{G \pi d^4},$$

откуда
$$G = \frac{32 M_{\text{кр}} \ell}{\varphi \pi d^4} = \frac{32 \cdot 0,16 \cdot 10^6 \cdot 200}{0,026 \cdot 3,14 \cdot 20^4} = 8 \times 10^4 \text{ МПа.}$$

② Наибольшие напряжения возникают на краю сечения и достигают значения $\tau_{\text{шц}}$ при крутящем моменте $M_{\text{кр(шц)}}$:

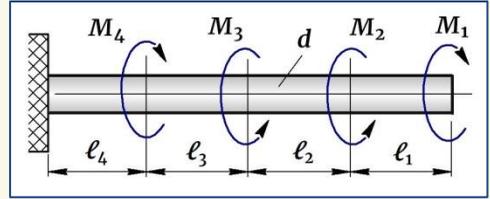
$$\tau_{\text{шц}} = \frac{M_{\text{кр(шц)}}}{W_{\rho}} = \left\| W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \right\| = \frac{16 M_{\text{кр(шц)}}}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 240 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 20^3} = 152,8 \text{ МПа.}$$

Задача 16

Для вала, подвергающегося закручиванию моментами —

$$M_1 = 1,0 \text{ кНм}; M_2 = 1,2 \text{ кНм};$$

$$M_3 = 0,8 \text{ кНм}; M_4 = 1,4 \text{ кНм},$$



подобрать диаметр d , если напряжения $[\tau] = 20 \text{ МПа}$, а допускаемый угол закручивания на длине $\ell_0 = 1 \text{ м}$ равен $[\varphi^\circ] = 1,5^\circ$. Построить эпюру углов закручивания. Принять для вала: $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$; $\ell_1 = 2,4 \text{ м}$; $\ell_2 = 1,5 \text{ м}$; $\ell_3 = 2,5 \text{ м}$; $\ell_4 = 3,6 \text{ м}$.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем крутящие моменты в сечениях на участках вала, строим эпюру крутящих моментов $M_{кр}$ и устанавливаем наиболее нагруженный (опасный) участок (рис. 1, а):

Сечение 1: $M_{кр(1)} = M_1 = 1,0 \text{ кНм}$.

Сечение 2: $M_{кр(2)} = M_1 - M_2 = 1 - 1,2 = -0,2 \text{ кНм}$.

Сечение 3: $M_{кр(3)} = M_1 - M_2 - M_3 = 1 - 1,2 - 0,8 = -1,0 \text{ кНм}$.

Сечение 4: $M_{кр(4)} = M_1 - M_2 - M_3 + M_4 = 1 - 1,2 - 0,8 + 1,4 = 0,4 \text{ кНм}$.

Опасными на валу являются участки, где действует наибольший (по модулю) крутящий момент, т.е. здесь — $M_{кр(\max)} = 1 \text{ кНм}$.

② Подбираем диаметр вала из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр(\max)}}{W_\rho} = \frac{M_{кр(\max)}}{\pi d^3 / 16} \leq [\tau], \text{ откуда}$$

$$[d] = 3 \sqrt{\frac{16 M_{кр(\max)}}{\pi [\tau]}} = 3 \sqrt{\frac{16 \cdot 1 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 20}} = 65 \text{ мм}.$$

③ Подбираем диаметр вала из условия жесткости:

$$\varphi^\circ_{\max} = \frac{M_{кр(\max)} \ell_0}{G I_\rho} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{32 M_{кр(\max)} \ell_0 \cdot 180^\circ}{G \pi^2 d^4} \leq [\varphi^\circ], \text{ откуда}$$

$$[d] = 4 \sqrt{\frac{32 M_{кр(\max)} \ell_0 \cdot 180^\circ}{G \pi^2 [\varphi^\circ]}} = 4 \sqrt{\frac{32 \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 180^\circ}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14^2 \cdot 1,5}} = 47 \text{ мм}.$$

Примечание.

Допускаемый угол закручивания задается на длине 1 м, поэтому в формуле для угла закручивания следует ставить длину $\ell_0 = 1\text{ м}$.

Из двух размеров принимаем больший, т.е. $d = 65\text{ мм}$.

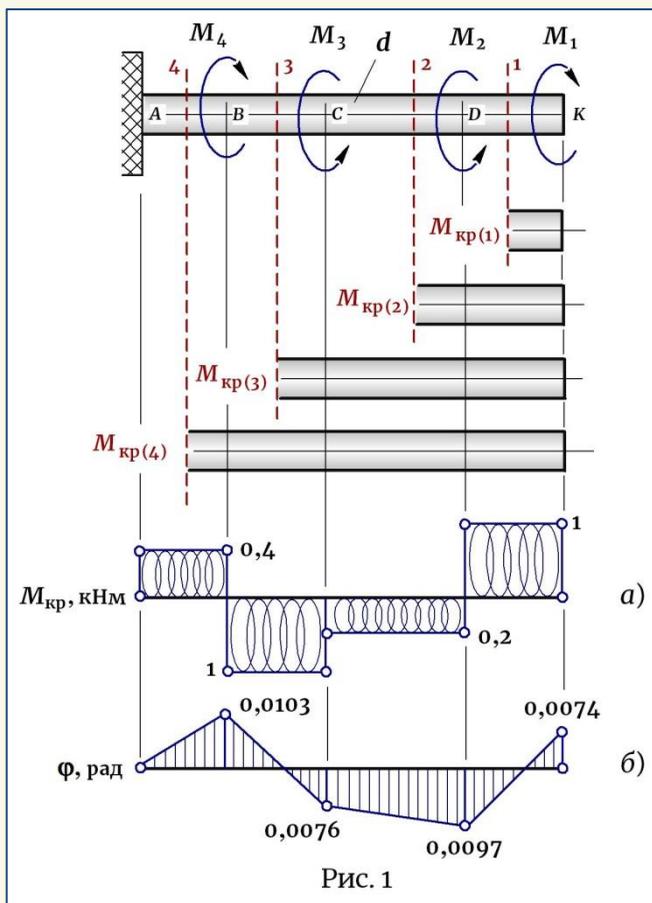


Рис. 1

Примечание.

Скачок на эюре крутящих моментов равен внешнему закручивающему моменту, приложенному в этом сечении

④ На основании закона Гука при кручении $\rightarrow \boxed{\varphi = M_{кр}\ell/GI_{\rho}}$ определяем углы закручивания граничных сечений вала относительно сечения в заделке. Вычисляем жесткость сечения –

$$GI_{\rho} = G \left(\pi d^4 / 32 \right) = 8 \cdot 10^4 \left(3,14 \cdot 65^4 / 32 \right) = 14 \cdot 10^{10} \text{ Нмм}^2 -$$

и определяем углы закручивания, начиная от сечения A :

$$\varphi_A = 0;$$

$$\varphi_{B-A} = \frac{M_{\text{кр}}(4)\ell_4}{GI_\rho} = \frac{0,4 \cdot 10^6 \cdot 3,6 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{10}} = + 0,0103 \text{ рад};$$

$$\varphi_{C-A} = \varphi_{B-A} + \frac{M_{\text{кр}}(3)\ell_3}{GI_\rho} = + 0,0103 - \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{10}} = - 0,0076 \text{ рад};$$

$$\varphi_{D-A} = \varphi_{C-A} + \frac{M_{\text{кр}}(2)\ell_2}{GI_\rho} = - 0,0076 - \frac{0,2 \cdot 10^6 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{10}} = - 0,0097 \text{ рад};$$

$$\varphi_{K-A} = \varphi_{D-A} + \frac{M_{\text{кр}}(1)\ell_1}{GI_\rho} = - 0,0097 + \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 2,4 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{10}} = + 0,0074 \text{ рад},$$

где φ_{B-A} , φ_{C-A} , φ_{D-A} , φ_{K-A} — соответственно углы закручивания сечений B, C, D, K относительно сечения в заделке A .

По результатам расчета строим эпюру углов закручивания (рис. 1, б).

Задача 17

Стальной вал постоянного сечения нагружен внешними моментами $M_1 = 0,6$ кНм; $M_2 = 1,8$ кНм; $M_3 = 0,2$ кНм. Спроектировать вал равного сопротивления, если для материала вала $[\tau] = 40$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

ВАЛОМ РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ называется вал, у которого во всех сечениях действуют одинаковые напряжения, равные $[\tau]$.

① Методом сечений определяем крутящие моменты на участках вала и строим эпюру крутящих моментов $M_{\text{кр}}$ (рис. 1, а):

Сечение 1: $M_{\text{кр}}(1) = - M_1 = - 0,6$ кНм.

Сечение 2: $M_{\text{кр}}(2) = - M_1 + M_2 = 1,8 - 0,6 = 1,2$ кНм.

Сечение 3: $M_{\text{кр}}(3) = - M_1 + M_2 - M_3 = - 0,6 + 1,8 - 0,2 = 1,0$ кНм.

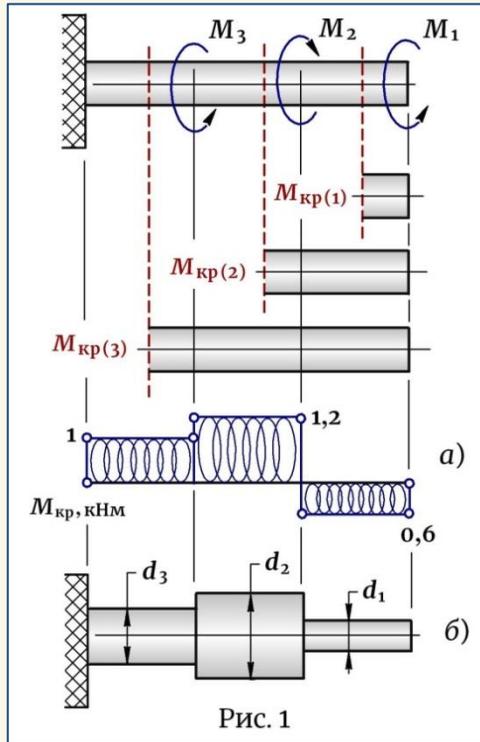


Рис. 1

② Из условия прочности при кручении –

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} = \frac{M_{кр}}{\pi d^3 / 16} \leq [\tau] \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр}}{\pi [\tau]}}$$

подбираем диаметр каждого участка:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр(1)}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,6 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 40}} = 45 \text{ мм};$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр(2)}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,2 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 40}} = 55 \text{ мм};$$

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр(3)}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,0 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 40}} = 50 \text{ мм}.$$

По полученным значениям вычерчиваем вал равного сопротивления (рис. 1, б).

Задача 18

На стальной вал через пять шкивов (рис. 1) действуют моменты $M_1 = 1,0$ кНм; $M_2 = 2$ кНм; $M_3 = 3$ кНм; $M_4 = 8$ кНм; $M_5 = 2$ кНм. Подобрать диаметр d , если напряжения $[\tau] = 90$ МПа, и определить угол поворота правого концевое сечения K относительно левого сечения A . Принять: $\ell_1 = \ell_4 = 1,2$ м; $\ell_2 = \ell_3 = 0,9$ м; $G = 8 \times 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем крутящие моменты на участках вала и строим эпюру крутящих моментов $M_{кр}$:

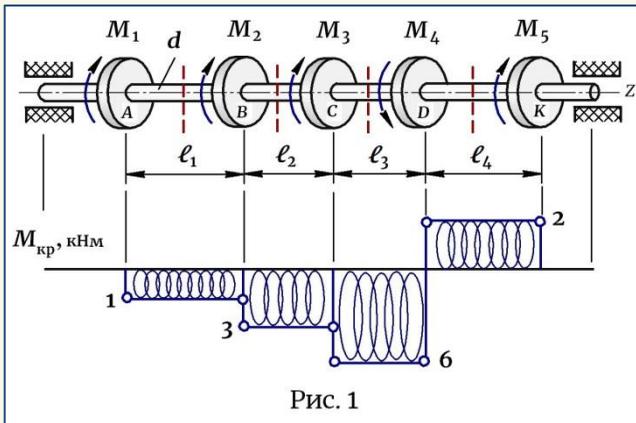


Рис. 1

Примечание.

Обращаю внимание, что вал должен находиться в равновесии. Поэтому:

$$\sum M_z = 0: M_1 + M_2 + M_3 - M_4 + M_5 = 0 \rightarrow 1 + 2 + 3 - 8 + 2 = 0$$

Сечение 1: $M_{кр(1)} = -M_1 = -1$ кНм;

Сечение 2: $M_{кр(2)} = -M_1 - M_2 = -1 - 2 = -3$ кНм;

Сечение 3: $M_{кр(3)} = -M_1 - M_2 - M_3 = -1 - 2 - 3 = -6$ кНм;

Сечение 4: $M_{кр(4)} = -M_1 - M_2 - M_3 + M_4 = -1 - 2 - 3 + 8 = +2$ кНм.

Опасным на валу является участок: $M_{кр(max)} = 6$ кНм.

② Подбираем диаметр вала из условия прочности:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр(max)}}{W_\rho} = \frac{M_{кр(max)}}{\pi d^3 / 16} \leq [\tau], \text{ откуда}$$

$$\boxed{d} = 3 \sqrt[3]{\frac{16 M_{\text{кр}}(\text{max})}{\pi [\tau]}} = 3 \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 90}} = 70 \text{ мм.}$$

③ Вычисляем жесткость сечения —

$$GI_{\rho} = G (\pi d^4 / 32) = 8 \cdot 10^4 (3,14 \cdot 70^4 / 32) = 19 \cdot 10^{10} \text{ Нмм}^2 \text{ —}$$

и на основании закона Гука $\rightarrow \boxed{\varphi = M_{\text{кр}} \ell / GI_{\rho}}$ определяем на каждом участке вала угол закручивания правого граничного сечения относительно левого:

$$\varphi_{B-A} = \frac{M_{\text{кр}(1)} \ell_1}{GI_{\rho}} = - \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{19 \cdot 10^{10}} = - 0,0063 \text{ рад;}$$

$$\varphi_{C-B} = \frac{M_{\text{кр}(2)} \ell_2}{GI_{\rho}} = - \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 0,9 \cdot 10^3}{19 \cdot 10^{10}} = - 0,0142 \text{ рад;}$$

$$\varphi_{D-C} = \frac{M_{\text{кр}(3)} \ell_3}{GI_{\rho}} = - \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 0,9 \cdot 10^3}{19 \cdot 10^{10}} = - 0,0284 \text{ рад;}$$

$$\varphi_{K-D} = \frac{M_{\text{кр}(4)} \ell_4}{GI_{\rho}} = + \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{19 \cdot 10^{10}} = + 0,0126 \text{ рад.}$$

Угол поворота правого концевого сечения K относительно левого сечения A равен: $\boxed{\varphi_{K-A}} = \varphi_{B-A} + \varphi_{C-B} + \varphi_{D-C} + \varphi_{K-D} =$

$$= - 0,0063 - 0,0142 - 0,0284 + 0,0126 = - 0,0363 \text{ рад.}$$

Задача 19

Стальной ступенчатый вал подвергается кручению моментами — $M_1 = M_4 = 1,2 \text{ кНм}$; $M_2 = 2,6 \text{ кНм}$; $M_3 = 5,0 \text{ кНм}$. Построить эпюру крутящих моментов и эпюру углов закручивания относительно левого торцевого сечения A . Определить на каждом участке вала максимальные напряжения τ_{max} . Принять для вала: $d_1 = d_3 = 4 \text{ см}$; $d_2 = 6 \text{ см}$; $\ell_1 = \ell_3 = 1,2 \text{ м}$; $\ell_2 = 1,5 \text{ м}$; $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем для вала геометрические характеристики, необходимые для решения задачи:

$$\left. \begin{aligned} I_{\rho_1} = I_{\rho_3} &= \frac{\pi d_{(1,3)}^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{32} = 25,12 \text{ см}^4; \\ I_{\rho_2} &= \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{32} = 127,17 \text{ см}^4. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{\rho_1} = W_{\rho_3} &= \frac{\pi d_{(1,3)}^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} = 12,56 \text{ см}^3; \\ W_{\rho_2} &= \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 6^3}{16} = 42,39 \text{ см}^3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

② Определяем крутящие моменты на участках вала и строим эпюру крутящих моментов $M_{кр}$ (рис. 1, а):

Примечание.

Обращаю внимание, что вал должен находиться в равновесии. Поэтому:

$$\boxed{\sum M_z = 0: -M_1 - M_2 + M_3 - M_4 = 0 \rightarrow -1,2 - 2,6 + 5 - 1,2 = 0}.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Сечение 1: } M_{кр(1)} &= -M_1 = -1,2 \text{ кНм}; \\ \text{Сечение 2: } M_{кр(2)} &= -M_1 - M_2 = -1,2 - 2,6 = -3,8 \text{ кНм}; \\ \text{Сечение 3: } M_{кр(3)} &= -M_1 - M_2 + M_3 = -1,2 - 2,6 + 5 = +1,2 \text{ кНм}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

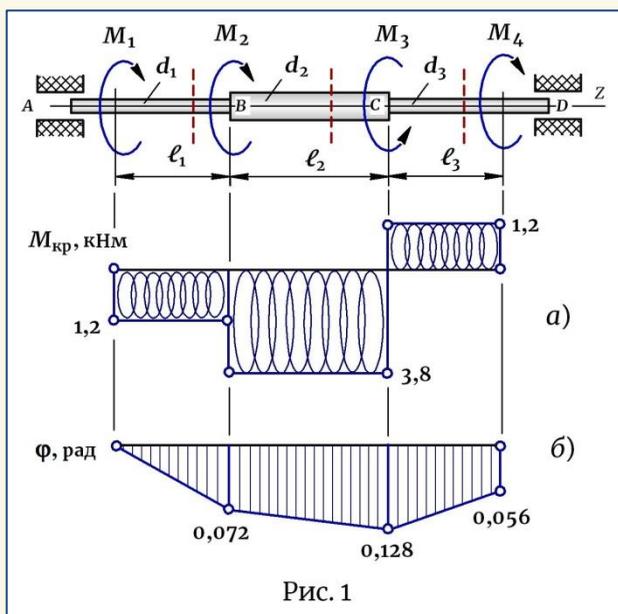


Рис. 1

③ На основании значений (1) вычисляем жесткость сечений на участках вала —

$$GI_{\rho 1} = GI_{\rho 3} = 8 \cdot 10^4 \cdot 25,12 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^{10} \text{ Нмм}^2;$$

$$GI_{\rho 2} = 8 \cdot 10^4 \cdot 127,17 \cdot 10^4 = 10,2 \cdot 10^{10} \text{ Нмм}^2 -$$

и на основании закона Гука $\rightarrow \boxed{\varphi = M_{\text{кр}} \ell / GI_{\rho}}$ определяем углы закручивания граничных сечений, начиная от торцевого сечения А :

$$\varphi_A = 0;$$

$$\varphi_{B-A} = \frac{M_{\text{кр}(1)} \ell_1}{GI_{\rho 1}} = - \frac{1,2 \cdot 10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{10}} = - 0,072 \text{ рад};$$

$$\varphi_{C-A} = \varphi_{B-A} + \frac{M_{\text{кр}(2)} \ell_2}{GI_{\rho 2}} = - 0,072 - \frac{3,8 \cdot 10^6 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{10,2 \cdot 10^{10}} = - 0,128 \text{ рад};$$

$$\varphi_{D-A} = \varphi_{C-A} + \frac{M_{\text{кр}(3)} \ell_3}{GI_{\rho 3}} = - 0,128 + \frac{1,2 \cdot 10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{10}} = - 0,056 \text{ рад}.$$

По результатам расчета строим эпюру углов закручивания (рис. 1, б).

④ С учетом значений (2) и (3) определяем максимальные напряжения на участках вала:

$$\boxed{\tau_{\max(1,3)}} = \mp \frac{M_{\text{кр}(1,3)}}{W_{\rho(1,3)}} = \mp \frac{1,2 \cdot 10^6}{12,56 \cdot 10^3} = \mp 95,5 \text{ МПа};$$

$$\boxed{\tau_{\max(2)}} = \frac{M_{\text{кр}(2)}}{W_{\rho(2)}} = \frac{3,8 \cdot 10^6}{42,39 \cdot 10^3} = 89,6 \text{ МПа}.$$

Задача 20

Сплошной вал круглого сечения был запроектирован на определенную скорость вращения n_1 . Затем было решено повысить скорость в 20 раз, т.е. $n_2 = 20n_1$. Определить, как изменится диаметр вала после пересчета его при неизменных остальных данных.

РЕШЕНИЕ:

① При первоначальном проектном диаметре вала d_1 максимальные касательные напряжения в нем, равные $[\tau]$, определяются как:

$$\tau_{\max(1)} = \frac{M_{\text{кр}(1)}}{W_{\rho(1)}} = \left\| \begin{array}{l} M_{\text{кр}(1)} = 9,7 \frac{N}{n_1} \\ W_{\rho(1)} = \pi d_1^3 / 16 \end{array} \right\| = \frac{16 \cdot 9,7 N}{\pi d_1^3 n_1} = [\tau]. \quad (1)$$

② После увеличения скорости, чтобы прочность вала была обеспечена, максимальные напряжения также должны быть равны $[\tau]$:

$$\tau_{\max(2)} = \frac{M_{\text{кр}(2)}}{W_{\rho(2)}} = \left\| \begin{array}{l} M_{\text{кр}(2)} = 9,7 \frac{N}{n_2} = \frac{9,7 N}{20 n_1} \\ W_{\rho(2)} = \pi d_2^3 / 16 \end{array} \right\| = \frac{16 \cdot 9,7 N}{\pi d_2^3 \cdot 20 n_1} = [\tau]. \quad (2)$$

③ Приравниваем значения (1) и (2):

$$\frac{16 \cdot 9,7 N}{\pi d_1^3 n_1} = \frac{16 \cdot 9,7 N}{\pi d_2^3 \cdot 20 n_1} \rightarrow d_1^3 = 20 d_2^3, \text{ откуда } \boxed{d_2 = 0,37 d_1},$$

т.е. при увеличении скорости вращения в 20 раз и сохранении прочности диаметр вала уменьшится примерно в 2,7 раза.

Задача 21

При определении мощности турбины был измерен угол закручивания вращаемого ею стального вала, который на длине $\ell = 6$ м оказался равным $\varphi^\circ = 1,2^\circ$. Наружный и внутренний диаметры вала равны — $D = 25$ мм и $d = 17$ мм, скорость вращения $n = 240$ об/мин. Определить мощность N (кВт), передаваемую валом, и напряжения τ_{\max} .

РЕШЕНИЕ:

① По заданным размерам вычисляем геометрические характеристики сечения (в см), необходимые для решения:

$$I_{\rho} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32} = \frac{3,14 (2,5^4 - 1,7^4)}{32} = 30134,6 \text{ см}^4;$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} = \frac{3,14 (2,5^4 - 1,7^4)}{16 \cdot 2,5} = 2410,8 \text{ см}^3.$$

② Угол закручивания вала по закону Гука определяется как —

$$\boxed{\varphi^\circ = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_{\rho}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}}, \text{ откуда}$$

$$M_{\text{кр}} = \frac{GI_{\rho} \pi \varphi^{\circ}}{\ell \cdot 180^{\circ}} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 30134,6 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 1,2^{\circ}}{6 \cdot 10^3 \cdot 180^{\circ}} = 84 \text{ кНм.}$$

③ Определяем мощность, передаваемую валом, которая с учетом значения $M_{\text{кр}}$ равна:

$$M_{\text{кр}} = 9,7 \frac{N}{n} \rightarrow \boxed{N} = \frac{M_{\text{кр}} \cdot n}{9,7} = \frac{84 \cdot 240}{9,7} = 2078 \text{ кВт.}$$

④ Определяем максимальные касательные напряжения в вале:

$$\boxed{\tau_{\text{max}}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \frac{84 \cdot 10^6}{2410,8 \cdot 10^3} = 34,8 \text{ МПа.}$$

Задача 22

Стальной трубчатый вал передает мощность $N = 75$ кВт при вращении со скоростью $n = 100$ об/мин. Толщина стенок $t = 0,02d_{\text{ср}}$. Определить величину среднего диаметра $d_{\text{ср}}$ из условия, чтобы угол закручивания на длине $\ell = 3$ м не превышал $[\varphi^{\circ}] = 1^{\circ}$. Вычислить также τ_{max} в сечении вала. Принять для стали: $G = 8 \times 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем крутящий момент в сечении вала:

$$M_{\text{кр}} = 9,7 \frac{N}{n} = 9,7 \cdot \frac{75}{100} = 7,3 \text{ кНм.} \quad (1)$$

② Для тонкостенного кольца ($t < 0,075r_{\text{ср}}$) можно приближенно считать, что $\boxed{\rho = r_{\text{ср}} = \text{const}}$, а площадь сечения равна — $\boxed{A = 2\pi r_{\text{ср}} t}$. Тогда полярный момент инерции может быть определен как —

$$\boxed{I_{\rho} = \int \rho^2 dA = \rho^2 \int dA = \rho^2 A = r_{\text{ср}}^2 \cdot 2\pi r_{\text{ср}} t = 2\pi r_{\text{ср}}^3 t}.$$

По приближенной формуле для тонкостенных трубок, учитывая соотношение $t = 0,02d_{\text{ср}}$, вычисляем для заданного сечения полярный момент инерции:

$$\boxed{I_{\rho} = 2\pi r_{\text{ср}}^3 t} = 2\pi (d_{\text{ср}}/2)^3 \cdot 0,02d_{\text{ср}} = 0,0157d_{\text{ср}}^4. \quad (2)$$

③ Из условия жесткости — $\varphi^{\circ}_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_{\rho}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} \leq [\varphi^{\circ}]$ с учетом значений (1) и (2) определяем величину среднего диаметра $d_{\text{ср}}$:

$$\varphi^{\circ}_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_{\rho}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{G \cdot 0,0157 d_{\text{ср}}^4} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} \leq [\varphi^{\circ}] \rightarrow$$

$$d_{\text{ср}} = 4 \sqrt[4]{\frac{M_{\text{кр}} \ell \cdot 180^{\circ}}{G \cdot 0,0157 \cdot \pi \cdot [\varphi^{\circ}]}} = 4 \sqrt[4]{\frac{7,3 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 180^{\circ}}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,0157 \cdot 3,14 \cdot 1^{\circ}}} = 177,8 \text{ мм.}$$

④ С учетом значений (2) и $d_{\text{ср}}$, учитывая что $\rho = r_{\text{ср}}$, определяем максимальные напряжения в сечении трубчатого вала:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_{\rho}} r_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{кр}} (d_{\text{ср}}/2)}{0,0157 d_{\text{ср}}^4} = \frac{7,3 \cdot 10^6}{2 \cdot 0,0157 \cdot 177,2^3} = 41,4 \text{ МПа.}$$

Задача 23

Два вала, один из которых сплошной, а другой полый, имеют одинаковый вес и передают одинаковый крутящий момент. У какого вала максимальные напряжения τ_{\max} будут больше и во сколько раз, если у полого вала соотношение диаметров равно $d = 0,6D$?

РЕШЕНИЕ:

① Вес вала определяется как — $Q = \gamma A \ell$, где ℓ — длина вала, A — площадь поперечного сечения, γ — удельный вес материала. Так как оба вала (*сплошной* и *полый*) имеют одинаковый вес, то при прочих равных условиях площади их поперечных сечений одинаковы, т.е.

$A_{\text{СПЛОШ}} = A_{\text{ПОЛ}}$. Поэтому учитывая значения —

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{СПЛОШ}} &= \frac{\pi d_{\text{СПЛОШ}}^2}{4} = 0,25 \pi d_{\text{СПЛОШ}}^2; \\ A_{\text{ПОЛ}} &= \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi [D^2 - (0,6D)^2]}{4} = 0,16 \pi D^2 \end{aligned} \right\} -$$

получаем: $0,25 \pi d_{\text{СПЛОШ}}^2 = 0,16 \pi D^2 \rightarrow d_{\text{СПЛОШ}} = 0,8D$. (1)

② С учетом значения (1) и заданного соотношения $d = 0,6D$ определяем полярные моменты сопротивления для валов:

$$W_{\rho(\text{сплош})} = \frac{\pi d_{\text{сплош}}^3}{16} = \frac{\pi (0,8D)^3}{16} = \frac{0,512 \pi D^3}{16} = 0,1D^3; \quad (2)$$

$$W_{\rho(\text{пол})} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi [D^4 - (0,6D)^4]}{16D} = \frac{0,87\pi D^3}{16} = 0,17D^3.$$

③ Касательные напряжения в сечениях сплошного и полого валов на основании значений (2) соответственно равны —

$$\tau_{\max(\text{сплош})} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho(\text{сплош})}} = \frac{M_{\text{кр}}}{0,1D^3}; \quad (3)$$

$$\tau_{\max(\text{пол})} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho(\text{пол})}} = \frac{M_{\text{кр}}}{0,17D^3},$$

откуда:
$$\frac{\tau_{\max(\text{сплош})}}{\tau_{\max(\text{пол})}} = \frac{M_{\text{кр}}/0,1D^3}{M_{\text{кр}}/0,17D^3} = \frac{0,17}{0,1} = 1,7 \rightarrow$$

$$\tau_{\max(\text{сплош})} = 1,7\tau_{\max(\text{пол})}.$$

Таким образом, при одинаковом весе и одинаковой грузоподъемности валов максимальные касательные напряжения у вала сплошного сечения на 70% больше, чем у полого вала.

Задача 24

Лебедка поднимает груз $Q = 16 \text{ кН}$ со скоростью $V = 0,6 \text{ м/сек}$. Считая, что вал лебедки работает только на кручение, подобрать диаметр сплошного вала, вращаемого со скоростью $n = 200 \text{ об/мин}$, если для материала вала $[\tau] = 45 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем мощность, передаваемую валом, и закручивающий момент, действующий на вал:

$$N = \left[\text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{сек}} = \frac{\text{Нм}}{\text{сек}} = \text{Н} \frac{\text{м}}{\text{сек}} \right] = QV = 16 \cdot 10^3 \cdot 0,6 = 9600 \text{ Вт} = 9,6 \text{ кВт};$$

$$M_{кр} = 9,7 \frac{N}{n} = 9,7 \frac{9,6}{200} = 0,47 \text{ кНм.}$$

② Подбираем диаметр вала из **условия прочности**:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} = \frac{M_{кр}}{\pi d^3 / 16} \leq [\tau] \rightarrow$$

$$\boxed{d} = 3 \sqrt{\frac{16 M_{кр}}{\pi [\tau]}} = 3 \sqrt{\frac{16 \cdot 0,47 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 45}} = 38 \text{ мм.}$$

Задача 25

Карданный вал автомобиля при двух режимах работы передает одну и ту же мощность $N = 23$ л.с. Скорость вращения вала в одном случае $n_1 = 108$ об/мин, а в другом — $n_2 = 62$ об/мин. Каков должен быть наружный диаметр вала D , если $d = 0,9D$, а $[\tau] = 40$ МПа?

РЕШЕНИЕ:

① Полярный момент сопротивления кольцевого сечения с учетом заданного соотношения диаметров равен:

$$W_{\rho} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi [D^4 - (0,9d)^4]}{16D} = 0,067 D^3.$$

② Подбираем сечение вала для *первого режима* работы:

$$M_{кр(1)} = 7,2 \frac{N}{n_1} = 7,2 \frac{23}{108} = 1,53 \text{ кНм;}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр(1)}}{W_{\rho}} = \frac{M_{кр(1)}}{0,067 D^3} \leq [\tau], \text{ откуда}$$

$$\boxed{D} = 3 \sqrt{\frac{M_{кр(1)}}{0,067 \cdot [\tau]}} = 3 \sqrt{\frac{1,53 \cdot 10^6}{0,067 \cdot 40}} = 83 \text{ мм; } \boxed{d} = 0,9D = 75 \text{ мм.}$$

③ Подбираем сечение вала для *второго режима* работы:

$$M_{кр(2)} = 7,2 \frac{N}{n_2} = 7,2 \frac{23}{60} = 2,76 \text{ кНм;}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}(2)}}{W_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}(2)}}{0,067D^3} \leq [\tau], \text{ откуда}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}(1)}}{0,067 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{2,76 \cdot 10^6}{0,067 \cdot 40}} = 103 \text{ мм}; \quad d = 0,9D = 93 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем сечение: $D = 103 \text{ мм}; d = 93 \text{ мм}$.

Задача 26

Определить наименьшую длину стальной проволоки диаметром $d = 6 \text{ мм}$, которая может быть закручена на один оборот (угол 2π) при условии, что напряжения в ней не превысят $\tau_{\max} = 100 \text{ МПа}$. Принять для стальной проволоки: $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Вычисляем для проволоки полярные момент инерции и момент сопротивления:

$$I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{32} = 127,2 \text{ мм}^4; \quad W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 6^3}{16} = 42,4 \text{ мм}^3.$$

② Определяем крутящий момент в сечении проволоки:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} \rightarrow M_{\text{кр}} = \tau_{\max} W_{\rho} = 100 \cdot 42,4 = 4,24 \text{ Нм}.$$

③ Из условия для угла закручивания — $\varphi = M_{\text{кр}} \ell / G I_{\rho} = 2\pi$ — определяем длину стальной проволоки:

$$\ell = \frac{2\pi \cdot G I_{\rho}}{M_{\text{кр}}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 127,2}{4,24 \cdot 10^3} = 15 \text{ м}.$$

Задача 27

Труба, имеющая средний диаметр $d_{\text{ср}} = 30 \text{ см}$ и толщину стенок $t = 8 \text{ мм}$, подвергается закручиванию. Определить τ_{\max} при действии на трубу крутящего момента $M_{\text{кр}} = 11,5 \text{ кНм}$.

РЕШЕНИЕ:

① По заданным размерам определяем наружный D и внутренний d диаметры сечения тонкостенной трубы —

$$\boxed{D} = d_{\text{ср}} + t = 30 + 0,8 = 30,8 \text{ см}; \quad \boxed{d} = D - 2t = 30,8 - 1,6 = 29,2 \text{ см}$$

и вычисляем полярный момент сопротивления сечения:

$$W_{\rho} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} = \frac{3,14 (30,8^4 - 29,2^4)}{16 \cdot 30,8} = 1101,8 \text{ см}^3.$$

② Определяем в сечении трубы максимальные напряжения:

$$\boxed{\tau_{\text{max}}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \frac{11,5 \cdot 10^6}{1101,8 \cdot 10^3} = 10,4 \text{ МПа}.$$

Примечание.

При кручении тонкостенных труб касательные напряжения на внутренней и наружной поверхностях в силу тонкостенности сечения мало отличаются друг от друга, поэтому расчет можно вести на среднее напряжение $\tau_{\text{ср}}$, которое вычисляется по приближенной формуле как —

$$\boxed{\tau_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_{\rho}} r_{\text{ср}}}, \text{ где полярный момент инерции также можно вычислить}$$

приближенно — $\boxed{I_{\rho} = 2\pi r_{\text{ср}}^3 t}$ (см. Задачу 22). Тогда напряжение с учетом

$$\text{этого значения принимает вид — } \boxed{\tau_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_{\rho}} r_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{кр}} r_{\text{ср}}}{2\pi r_{\text{ср}}^3 t} = \frac{M_{\text{кр}}}{2\pi (d_{\text{ср}}/2)^2 t}}$$

и для данной задачи будет равно:

$$\boxed{\tau_{\text{ср}}} = \frac{M_{\text{кр}}}{2\pi (d_{\text{ср}}/2)^2 t} = \frac{11,5 \cdot 10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 150^2 \cdot 8} = 10,2 \text{ МПа},$$

что соответствует погрешности расчета порядка 2%.

Задача 28

К тонкостенной стальной трубке со средним диаметром $d_{\text{ср}} = 12,5$ см приложен скручивающий момент $M_{\text{кр}} = 6,25$ кНм. Определить толщину стенок трубки, чтобы в ее сечении $\tau_{\text{max}} = 80$ МПа. Вычислить также угол закручивания трубки на длине $\ell = 1$ м. Принять для стали: $G = 8 \times 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем толщину стенки трубки. Максимальные касательные напряжения записываем по приближенной формуле, которая с учетом значения полярного момента инерции I_ρ для тонкостенных элементов имеет вид:

$$\tau_{\text{ср}} = \tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_\rho} r_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{кр}} r_{\text{ср}}}{2\pi r_{\text{ср}}^3 t} = \frac{M_{\text{кр}}}{2\pi (d_{\text{ср}}/2)^2 t}, \text{ откуда}$$

$$t = \frac{M_{\text{кр}}}{2\pi (d_{\text{ср}}/2)^2 \tau_{\text{max}}} = \frac{6,25 \cdot 10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot (125/2)^2 \cdot 80} = 3,2 \text{ мм.}$$

② Определяем угол закручивания:

$$\varphi^\circ = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_\rho} = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{G 2\pi (d_{\text{ср}}/2)^3 t} = \frac{6,25 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 3,14 (125/2)^3 \cdot 3,2} = 0,016 \text{ рад.}$$

Задача 29

Вал трубчатого сечения длиной $\ell = 1,8 \text{ м}$, $d_{\text{ср}} = 30 \text{ см}$ при толщине стенок $t = 3 \text{ мм}$ вращается со скоростью $n = 100 \text{ об/мин}$. Определить мощность, передаваемую валом, если $\tau_{\text{max}} = 63 \text{ МПа}$. Вычислить также угол закручивания вала. Принять для вала: $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① По заданным размерам определяем наружный D и внутренний d диаметры сечения тонкостенной трубы —

$$D = d_{\text{ср}} + t = 30 + 0,3 = 30,3 \text{ см; } d = D - 2t = 30,3 - 0,6 = 29,7 \text{ см}$$

и вычисляем геометрические характеристики сечения, необходимые для расчета на кручение:

$$I_\rho = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32} = \frac{3,14 (30,3^4 - 29,7^4)}{32} = 6359,1 \text{ см}^4; \quad (1)$$
$$W_\rho = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} = \frac{3,14 (30,3^4 - 29,7^4)}{16 \cdot 30,3} = 419,7 \text{ см}^3.$$

- ② Определяем крутящий момент в сечении вала:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} \rightarrow M_{\text{кр}} = \tau_{\max} W_{\rho} = 63 \cdot 419,7 \cdot 10^3 = 26,4 \text{ кНм}.$$

- ③ Определяем мощность, передаваемую валом:

$$M_{\text{кр}} = 9,7 \frac{N}{n} [\text{кНм}] \rightarrow N = \frac{M_{\text{кр}} \cdot n}{9,7} = \frac{26,4 \cdot 100}{9,7} = 272,2 \text{ кВт}.$$

- ④ Вычисляем угол закручивания вала:

$$\varphi^{\circ} = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_{\rho}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{26,4 \cdot 10^6 \cdot 1,8 \cdot 10^3 \cdot 180^{\circ}}{8 \cdot 10^4 \cdot 6359,1 \cdot 10^4 \cdot 3,14} = 0,54^{\circ}.$$

Задача 30

Полый стальной вал $D=8\text{ см}$ и $d=6\text{ см}$ длиной $\ell=60\text{ см}$ делает $n=500$ об/мин. На вал по углом 45° к оси наклеен датчик, с помощью которого измерена величина относительного удлинения наклонного волокна вала, равная $\varepsilon=0,00034$. Определить мощность, передаваемую валом, и величину угла взаимного поворота торцов вала при упругом деформировании. Принять для вала: $E=2 \times 10^5$ МПа; $G=8 \times 10^4$ МПа; $\mu=0,25$.

РЕШЕНИЕ:

- ① Вычисляем геометрические характеристики кольцевого сечения, необходимые для решения задачи:

$$I_{\rho} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{3,14(8^4 - 6^4)}{32} = 274,8 \text{ см}^4. \quad (1)$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{3,14(8^4 - 6^4)}{16 \cdot 8} = 68,7 \text{ см}^3. \quad (2)$$

- ② Согласно обобщенному закону Гука наибольшая линейная деформация при объемном напряженном состоянии определяется как:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (3)$$

Учитывая, что при кручении все точки поперечного сечения работают в условиях **чистого сдвига** — $\sigma_1 = +\tau_{\max}; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\tau_{\max}$ и наибольшее удлинение волокна возникает под углом 45° к оси вала, выражение (3) принимает вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\tau_{\max} - \mu(-\tau_{\max})] = \frac{(1+\mu)\tau_{\max}}{E}, \text{ откуда}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\varepsilon_1 E}{(1+\mu)}. \quad (4)$$

③ Но с другой стороны, согласно теории кручения —

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho}. \quad (5)$$

④ Приравниваем выражения (4) и (5) и с учетом заданных величин и значения (2) определяем крутящий момент $M_{\text{кр}}$:

$$\frac{\varepsilon_1 E}{(1+\mu)} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho} \rightarrow M_{\text{кр}} = \frac{\varepsilon_1 E W_\rho}{(1+\mu)} = \frac{0,00034 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 68,7 \cdot 10^3}{1+0,25} = 3,7 \text{ кНм}.$$

⑤ Определяем мощность, передаваемую валом:

$$M_{\text{кр}} = 7,2 \frac{N}{n} [\text{кНм}] \rightarrow [N] = \frac{M_{\text{кр}} n}{7,2} = \frac{3,7 \cdot 500}{7,2} = 257 \text{ л.с.}$$

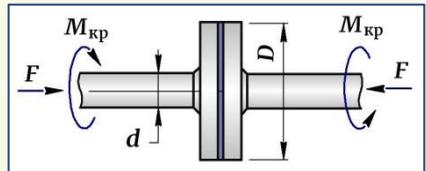
⑥ С учетом заданных величин, значения $M_{\text{кр}}$ и I_ρ (1) вычисляем величину угла взаимного поворота торцов вала:

$$\varphi^\circ = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_\rho} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{3,7 \cdot 10^6 \cdot 600 \cdot 180^\circ}{8 \cdot 10^4 \cdot 274,8 \cdot 10^4 \cdot 3,14} = 0,58^\circ.$$

Задача 31

Дисковая муфта служит для передачи крутящего момента от одного вала к другому. Диаметры дисков и валов соответственно равны $D = 30 \text{ см}$

и $d = 5 \text{ см}$. Сила прижатия дисков $F = 40 \text{ кН}$. Определить наибольший крутящий момент, который будет передаваться муфтами, и максимальные напряжения в валах. Принять: $f = 0,25$; $k = 1,15$.



РЕШЕНИЕ:

① При прижатии дисков друг к другу возникает сила трения —

$$F_{\text{тр}} = fF, \quad (1)$$

а момент трения $M_{\text{тр}}$ этой силы относительно центра дисков с учетом значения (1) равен:

$$M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}R_{\text{ср}} = fF(D_{\text{ср}}/2), \quad (2)$$

где f — коэффициент трения фрикционной пары; $D_{\text{ср}} = (D+d)/2$ — средний диаметр фрикционных дисков.

② Условием работоспособности фрикционной муфты, т.е. работы без проскальзывания, является — $M_{\text{тр}} = M_{\text{кр}}$, откуда с учетом значения

(2) можно вычислить крутящий момент, возникающий в сечениях валов. Однако следует учитывать, что для обеспечения качества сцепления $M_{\text{тр}}$ задается с запасом, поэтому **расчетный крутящий момент** будет определяться как:

$$M_{\text{кр}} = kfiF \frac{D_{\text{ср}}}{2} = kfiF \frac{D+d}{4} = 1,15 \cdot 0,25 \cdot 40 \cdot \frac{0,3+0,05}{4} = 1 \text{ кНм},$$

где k — коэффициент запаса сцепления; i — число фрикционных пар сцепления (здесь $i = 1$).

③ Максимальные касательные напряжения в валах равны:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}}}{\pi d^3/16} = \frac{1 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 50^3/16} = 40,8 \text{ МПа}.$$

Примечание.

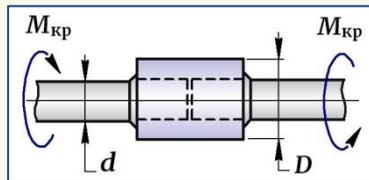
Фрикционные муфты служат для плавного сцепления вращающихся с любыми скоростями валов и передачи крутящего момента от одного вала другому за счет прижатия дисков муфты, обеспечивающего фрикционную связь между ними. Передача вращающего момента осуществляется силами трения между трущимися поверхностями деталей муфты. В начальный момент включения за счет относительного проскальзывания рабочих поверхностей разгон ведомого вала происходит плавно, без удара, с постепенным нарастанием передаваемого вращающего момента по мере увеличения нажимной силы. При установившемся движении проскальзывание отсутствует и оба вала вращаются с одинаковой угловой скоростью. В случае перегрузок фрикционные муфты пробуксовывают, предохраняя машину от поломок, поэтому фрикционная муфта помимо своего основного назначения выполняет одновременно функцию предохранительного устройства.

Задача 32

Для соединения двух валов сплошного круглого поперечного сечения диаметром $d = 80$ мм используется втулочная муфта.

Определить наружный диаметр муфты D

из условия ее равнопрочности с валом, если для обоих элементов — вала и муфты — $[\tau] = 100$ МПа, а также вычислить наибольший крутящий момент, передаваемый валом.



РЕШЕНИЕ:

① Втулочная муфта предназначена для жесткого соединения строго соосных валов и передачи вращательного движения, что с целью предотвращения проворачивания обеспечивается соединением втулки и валов с помощью штифтов, шпонок и других конструктивных решений. В результате узел работает как единое целое и во всех элементах соединения возникает одинаковый крутящий момент $M_{кр}$.

Записываем **условия прочности** для валов и муфты —

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho(\text{вал})}} = [\tau] \rightarrow M_{кр} = W_{\rho(\text{вал})} [\tau]; \quad (1)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho(\text{муф})}} = [\tau] \rightarrow M_{кр} = W_{\rho(\text{муф})} [\tau], \quad (2)$$

где
$$W_{\rho(\text{вал})} = \frac{\pi d^3}{16}; \quad W_{\rho(\text{муф})} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}. \quad (3)$$

Приравниваем моменты (1) и (2) и с учетом значений полярных моментов сопротивления (3) получаем:

$$\frac{\pi d^3 [\tau]}{16} = \frac{\pi(D^4 - d^4) [\tau]}{16D} \rightarrow D^4 - d^4 - d^3 D = 0 \rightarrow \boxed{D} = 98 \text{ мм}.$$

② На основании выражения (1) определяем крутящий момент $M_{кр}$, передаваемый валом:

$$\boxed{M_{кр}} = W_{\rho(\text{вал})} [\tau] = \frac{\pi d^3}{16} [\tau] = \frac{3,14 \cdot 80^3 \cdot 100}{16} = 10 \text{ кНм}.$$

Задача 33

Для вала длиной $\ell = 2$ м определить величину крутящего момента, при котором расчет вала по прочности дает такой же диаметр, что и расчет по жесткости, если $[\tau] = 40$ МПа и $[\varphi^\circ] = 1,2^\circ$. Определить величину этого диаметра. Принять: $G = 8 \times 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Записываем для вала **условие прочности**:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho} \leq [\tau] \rightarrow W_\rho = \frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}. \quad (1)$$

② Записываем для вала **условие жесткости**:

$$\varphi^\circ = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GI_\rho} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\varphi^\circ] \rightarrow I_\rho = \frac{M_{\text{кр}} \ell \cdot 180^\circ}{G \pi [\varphi^\circ]}. \quad (2)$$

③ Учитывая, что $W_\rho = \frac{I_\rho}{d/2} = \frac{2I_\rho}{d}$, на основании (1) и (2) получаем:

$$\frac{\cancel{M_{\text{кр}}}}{[\tau]} = \frac{2 \cancel{M_{\text{кр}}} \ell \cdot 180^\circ}{G \pi [\varphi^\circ] d},$$

откуда
$$d = \frac{2\ell \cdot 180^\circ [\tau]}{G \pi [\varphi^\circ]} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 180^\circ \cdot 40}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 1,2^\circ} = 95,5 \text{ мм}.$$

④ На основании выражения (1) определяем $M_{\text{кр}}$:

$$M_{\text{кр}} = W_\rho [\tau] = \frac{\pi d^3}{16} [\tau] = \frac{3,14 \cdot 95,5^3 \cdot 40}{16} = 6,8 \text{ кНм}.$$

Задача 34

Сплошной вал диаметром d усилен надетой на него втулкой с диаметрами наружным D и внутренним d соответственно. Вал и втулка выполнены из одного материала и работают как одно целое. Определить отношение " D/d ", чтобы усиление вала позволило увеличить его грузоподъемность в 4 раза.

РЕШЕНИЕ:

① Грузоподъемность вала при кручении определяется максимальными касательными напряжениями τ_{\max} , возникающими при заданном крутящем моменте $M_{\text{кр}}$, а увеличение грузоподъемности означает возможность увеличения $M_{\text{кр}}$ в n – раз при сохранении таких же напряжений. Поэтому, сравнивая τ_{\max} вала и соединения «вал-втулка», условием сохранения прочности является:

$$\tau_{\max(\text{вал+вт})} = \tau_{\max(\text{вал})}, \quad (1)$$

где, принимая, что пара «вал-втулка» работают как одно целое –

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max(\text{вал+вт})} &= \frac{M_{\text{кр}(\text{вал+вт})}}{W_{\rho(\text{вал+вт})}} = \frac{M_{\text{кр}(\text{вал+вт})}}{\pi D^3/16}; \\ \tau_{\max(\text{вал})} &= \frac{M_{\text{кр}(\text{вал})}}{W_{\rho(\text{вал})}} = \frac{M_{\text{кр}(\text{вал})}}{\pi d^3/16}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

② Учитывая, что $M_{\text{кр}(\text{вал+вт})} = 4 M_{\text{кр}(\text{вал})}$, согласно равенству (1)

приравниваем значения (2) и получаем:

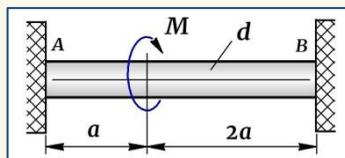
$$\frac{4M_{\text{кр}(\text{вал})}}{\pi D^3/16} = \frac{M_{\text{кр}(\text{вал})}}{\pi d^3/16} \rightarrow \frac{D^3}{d^3} = 4 \rightarrow \boxed{\frac{D}{d}} = 1,6.$$

Примечание.

К соединениям «вал–втулка» относятся соединения с соосными охватываемой и охватывающей поверхностями, предназначенные для передачи вращающего момента. Термин «вал» следует относить как к валам, так и к осям, и к другим деталям с охватываемой поверхностью. В качестве втулки могут быть зубчатые колеса, установленные на вал, полумуфты, шкивы, звездочки.

Задача 35

Стержень круглого поперечного сечения, жестко защемленный с двух концов, нагружен внешним моментом $M = 12 \text{ кНм}$. Подобрать диаметр стержня " d ", если для материала $[\tau] = 80 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Раскрываем статическую неопределимость МЕТОДОМ ДЕФОРМАЦИЙ и определяем реактивные моменты в заделках:

а) Статическая сторона. Под действием внешнего закручивающего момента M в защемлениях возникают реактивные моменты M_A и M_B (рис. 1, а). Так как вся система активных и реактивных сил должна находиться в равновесии, записываем для стержня уравнение равновесия:

$$\sum M_Z = 0: M_A + M_B - M = 0. \quad (1)$$

б) Геометрическая сторона. Отбрасываем от стержня одну из опор, например, опору B , заменяем ее действие реактивным моментом M_B (рис. 1, б) и записываем условие

по угловому перемещению сечения на этой опоре. Так как сечение B находится в заделке, то здесь — $\Phi_B = 0$, который на основании принципа независимости действия сил определяется как алгебраическая сумма углов поворота этого сечения от каждого момента в отдельности:

$$\Phi_B = \Phi_B(M) + \Phi_B(M_B) = 0. \quad (2)$$

в) Физическая сторона. По закону Гука записываем значение угла поворота от каждого момента:

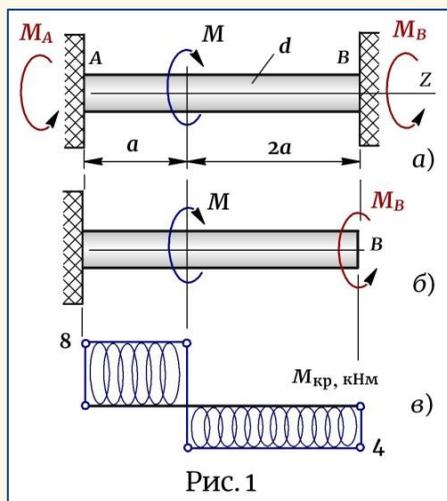


Рис. 1

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{B(M)} = \frac{Ma}{GI_{\rho}}; \quad \varphi_{B(M_B)} = -\frac{M_B \cdot 3a}{GI_{\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставляем (3) → (2) и с учетом уравнения (1) получаем:

$$\frac{Ma}{GI_{\rho}} - \frac{M_B \cdot 3a}{GI_{\rho}} = 0 \rightarrow \boxed{M_B = M/3} \rightarrow \boxed{M_A = 8 \text{ кНм}; M_B = 4 \text{ кНм}}.$$

② Методом сечений определяем крутящие моменты на участках стержня и строим эпюру крутящих моментов (рис. 1, в):

$$M_{\text{кр}(1)} = M_A = 8 \text{ кНм}; \quad M_{\text{кр}(2)} = M_B = 4 \text{ кНм}.$$

Опасным на стержне является участок с $M_{\text{кр}(\text{max})} = 8 \text{ кНм}$.

③ Подбираем диаметр стержня из **условия прочности**:

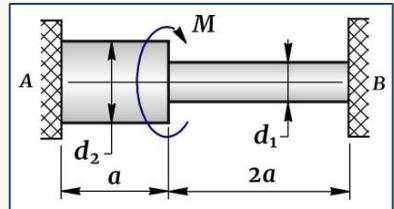
$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}}}{\pi d^3 / 16} \leq [\tau], \text{ откуда}$$

$$\boxed{d} = 3 \sqrt{\frac{M_{\text{кр}}}{\pi [\tau]}} = 3 \sqrt{\frac{16 \cdot 8 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 80}} = 79,9 = 80 \text{ мм}.$$

Задача 36

Для ступенчатого вала ($d_1 = 30 \text{ мм}$, $d_2 = 40 \text{ мм}$, $a = 0,5 \text{ м}$), работающего на кручение, определить грузоподъемность, т.е. максимальный внешний закручивающий момент "М", который он способен выдержать, если для материала вала $[\tau] = 40 \text{ МПа}$.

Принять для вала: $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Первоначально для вала определяем геометрические характеристики, необходимые для решения задачи:

$$\left. \begin{aligned} I_{\rho 1} &= \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 3^4}{32} = 7,95 \text{ см}^4; \\ I_{\rho 2} &= \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{32} = 25,12 \text{ см}^4. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{\rho_1} &= \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 3^3}{16} = 5,3 \text{ см}^3; \\ W_{\rho_2} &= \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} = 12,56 \text{ см}^3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

② Раскрываем статическую неопределимость МЕТОДОМ ДЕФОРМАЦИЙ и определяем реактивные моменты в заделках:

а) Статическая сторона. Под действием закручивающего момента M в заделках возникают реакции опор – моменты M_A и M_B (рис. 1, а). Записываем для стержня уравнение равновесия:

$$\sum M_Z = 0: M_A + M_B - M = 0. \quad (3)$$

б) Геометрическая сторона. Отбрасываем от стержня опору B , заменяем ее действие реактивным моментом M_B (рис. 1, б) и записываем условие по углу поворота на этой опоре – $\varphi_B = 0$, которое на основании принципа независимости действия сил можно представить в виде:

$$\varphi_B = \varphi_{B(M)} + \varphi_{B(M_B)} = 0. \quad (4)$$

в) Физическая сторона. Так как участки стержня имеют различную жесткость GI_{ρ} , то физическую сторону следует рассчитывать с учетом соответствующих геометрических характеристик. Тогда по закону Гука с учетом значений (1) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{B(M)} &= \frac{Ma}{GI_{\rho_2}} = \frac{M \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 25,12 \cdot 10^4} = 0,0249 M; \\ \varphi_{B(M_B)} &= - \left(\frac{M_B a}{GI_{\rho_2}} + \frac{M_B 2a}{GI_{\rho_1}} \right) = \\ &= - \left(\frac{M_B \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 25,12 \cdot 10^4} + \frac{M_B \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 7,95 \cdot 10^4} \right) = -0,1821 M_B. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

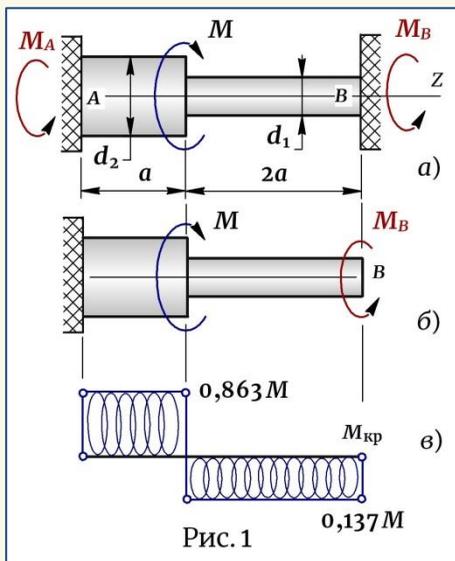


Рис. 1

Подставляем (5) → (4): $0,0249M - 0,1821M_B = 0$, откуда

$$\boxed{M_B = 0,137M} \rightarrow (3) \rightarrow \boxed{M_A = 0,863M}.$$

③ Методом сечений определяем крутящие моменты на участках стержня и строим эпюру крутящих моментов (рис. 1, в):

$$M_{кр(1)} = M_B = 0,137M; \quad M_{кр(2)} = M_A = 0,863M.$$

④ С учетом значений (2) определяем напряжения на участках вала:

$$\tau_{\max(1)} = \frac{M_{кр(1)}}{W_{\rho_1}} = \frac{0,137M \cdot 10^6}{5,3 \cdot 10^3} = 25,85M \text{ (МПа)};$$

$$\tau_{\max(2)} = \frac{M_{кр(2)}}{W_{\rho_2}} = \frac{0,863M \cdot 10^6}{12,56 \cdot 10^3} = 68,71M \text{ (МПа)}.$$

Наиболее опасным является участок 2. Здесь возникают наибольшие напряжения – $\tau_{\max(2)} = 68,71M$ (МПа).

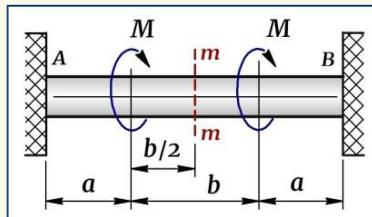
⑤ По опасному участку из условия прочности определяем максимальный допустимый момент M :

$$\tau_{\max(2)} = 68,71M \leq [\tau], \text{ откуда } \boxed{M} = \frac{[\tau]}{68,71} = \frac{40}{68,71} = 0,58 \text{ кНм}.$$

Задача 37

Стержень круглого поперечного сечения диаметром $d = 10$ см жестко зацелен с двух концов и нагружен внешними моментами $M = 8$ кНм. Определить угол закручивания среднего сечения $m - m$.

Принять для вала: $a = 0,6$ м; $b = 0,8$ м; $G = 8 \times 10^4$ МПа.



РЕШЕНИЕ:

① Раскрываем статическую неопределенность:

а) Статическая сторона (рис. 1, а) →

$$\sum M_Z = 0: \quad M_A + M_B - 2M = 0. \quad (1)$$

б) Геометрическая сторона. Отбрасываем от стержня одну из опор, например, опору B , заменяем ее действие реактивным моментом M_B (рис. 1, б) и записываем условие по угловому перемещению сечения на этой опоре \rightarrow

$$\boxed{\varphi_B = 0} \rightarrow \varphi_B = \varphi_{B(M)} + \varphi_{B(M_B)} = 0. \quad (2)$$

в) Физическая сторона. По закону Гука записываем значение угла поворота от каждого момента \rightarrow

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{B(M)} &= \frac{Ma}{GI_\rho} + \frac{M(a+b)}{GI_\rho} = \frac{M(2a+b)}{GI_\rho}; \\ \varphi_{B(M_B)} &= -\frac{M_B(2a+b)}{GI_\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставляем (3) \rightarrow (2) и с учетом уравнения (1) получаем:

$$\frac{M(2a+b)}{GI_\rho} - \frac{M_B(2a+b)}{GI_\rho} = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{M_A = M_B = M = 8 \text{ кН}}.$$

Примечание.

В силу симметрии внешних моментов и одинаковом их значении будем предполагать и равенство реактивных моментов на опорах.

② Методом сечений определяем крутящие моменты на участках стержня и строим эпюру крутящих моментов (рис. 1, в).

③ Определяем угол поворота среднего сечения $m-m$. Так как на участке " b " крутящий момент равен нулю, угол поворота любого сечения здесь будет определяться углом поворота сечения C относительно сечения A , либо углом поворота сечения D относительно сечения B , имеющим такое же направление закручивания. В результате получаем:

$$\boxed{\varphi_{m-m}} = \varphi_{C-A} = \frac{M_A a}{GI_\rho} = \frac{M_A a}{G(\pi d^4/32)} = \frac{32 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 0,6 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 100^4} = 0,006 \text{ рад.}$$

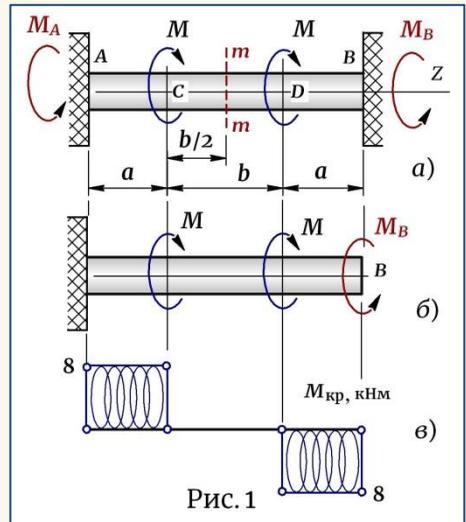
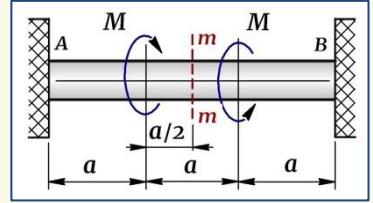


Рис. 1

Задача 38

К стержню круглого поперечного сечения, защемленному с двух концов, приложены два равных и противоположно направленных внешних закручивающих момента, равных $M=6 \text{ кНм}$. Определить диаметр стержня "d", если для материала стержня $[\tau]=60 \text{ МПа}$, и вычислить угол закручивания среднего сечения $m-m$.



РЕШЕНИЕ:

① Раскрываем статическую неопределимость:

а) Статическая сторона (рис. 1, а) →

$$\sum M_Z = 0: M_A - M + M - M_B = 0 \rightarrow M_A = M_B. \quad (1)$$

б) Геометрическая сторона. Отбрасываем от стержня опору В, заменяем ее действие реактивным моментом M_B (рис. 1, б) и записываем условие по угловому перемещению сечения на этой опоре →

$$\varphi_B = 0 \rightarrow \varphi_B = \varphi_B(M) + \varphi_B(M_B) = 0. \quad (2)$$

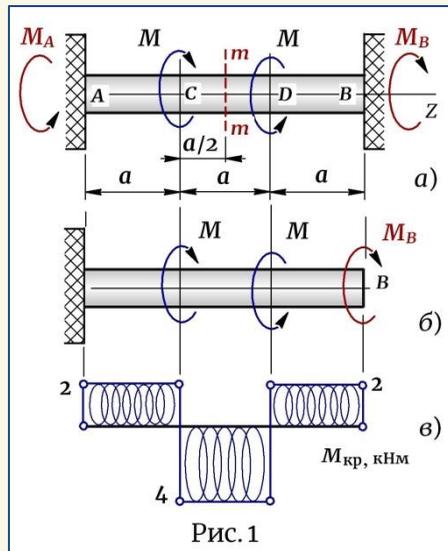


Рис. 1

в) Физическая сторона. По закону Гука записываем значение угла поворота от каждого момента →

$$\left. \begin{aligned} \varphi_B(M) &= \frac{Ma}{GI_\rho} - \frac{M \cdot 2a}{GI_\rho} = -\frac{Ma}{GI_\rho}; \\ \varphi_B(M_B) &= \frac{M_B \cdot 3a}{GI_\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставляем (3) → (2) и с учетом уравнения (1) получаем:

$$-\frac{Ma}{GI_\rho} + \frac{M_B \cdot 3a}{GI_\rho} = 0 \rightarrow$$

$$M_A = M_B = M/3 = 2 \text{ кН}.$$

② Определяем крутящие моменты на участках стержня и строим эпюру крутящих моментов (рис. 1, в):

$$M_{кр(AC)} = M_A = 2 \text{ кНм}; \quad M_{кр(CD)} = M_A - M = -4 \text{ кНм};$$

$$M_{кр(DB)} = M_B = 2 \text{ кНм}.$$

Опасным на стержне является участок с $M_{кр(max)} = 4 \text{ кНм}$.

③ Подбираем диаметр стержня из условия прочности:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр(max)}}{W_p} = \frac{M_{кр(max)}}{\pi d^3 / 16} \leq [\tau],$$

откуда
$$d = 3 \sqrt{\frac{M_{кр(max)}}{\pi [\tau]}} = 3 \sqrt{\frac{16 \cdot 4 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 60}} = 70 \text{ мм}.$$

④ Определяем угол поворота среднего сечения $m-m$:

$$\varphi_{m-m} = \varphi_{C-A} + \varphi_{m-C} = \frac{M_{кр(AC)} a}{GI_p} - \frac{M_{кр(CD)} (a/2)}{GI_p},$$

где согласно расчетам — $M_{кр(CD)} = 2M_{кр(AC)}$.

В результате получаем:
$$\varphi_{m-m} = \frac{M_{кр(AC)} a}{GI_p} - \frac{2M_{кр(AC)} (a/2)}{GI_p} = 0.$$

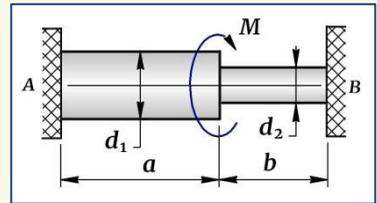
Задача 39

Ступенчатый стержень длиной $(a+b) = 4,2 \text{ м}$ с диаметрами участков $d_1 = 6 \text{ см}$ и $d_2 = 5 \text{ см}$ жестко защемлен с двух концов и нагружается крутящим моментом M , приложенным на границе изменения диаметра. Определить длину участков "a" и "b" из условия, чтобы в обеих частях стержня в результате кручения возникали одинаковые τ_{max} .

РЕШЕНИЕ:

① Первоначально для вала определяем геометрические характеристики, необходимые для решения задачи:

$$\left. \begin{aligned} I_{p1} &= \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{32} = 127,17 \text{ см}^4; \\ I_{p2} &= \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,33 \text{ см}^4; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



$$\left. \begin{aligned} W_{\rho 1} &= \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 6^3}{16} = 42,39 \text{ см}^3; \\ W_{\rho 2} &= \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{16} = 24,53 \text{ см}^3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

② Рассмотрим *статическую сторону* задачи (рис. 1, а):

$$\sum M_Z = 0: M_A - M + M_B = 0, \quad (3)$$

где $M_A = M_{\text{кр}(1)}; M_B = M_{\text{кр}(2)}$. (4)

③ Исходя из условия равенства напряжений на участках стержня —

$\tau_{\text{max}(1)} = \tau_{\text{max}(2)}$ и с учетом значений (2) и (4), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\text{max}(1)} &= \frac{M_{\text{кр}(1)}}{W_{\rho(1)}} \\ \tau_{\text{max}(2)} &= \frac{M_{\text{кр}(2)}}{W_{\rho(2)}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{M_A}{W_{\rho(1)}} = \frac{M_B}{W_{\rho(2)}} \rightarrow M_A = \frac{W_{\rho(1)}}{W_{\rho(2)}} M_B \rightarrow$$

$$M_A = 1,728 M_B. \quad (5)$$

Объединяем соотношение реактивных моментов (5) и статическое уравнение (3) и определяем моменты в заделках —

$$\begin{cases} M_A - M + M_B = 0 \\ M_A = 1,728 M_B, \end{cases}$$

откуда $M_A = 0,634 M$
 $M_B = 0,366 M$. (6)

Согласно значениям (6) и на основании (4) строим эпюру крутящих моментов (рис. 1, в).

④ Рассмотрим *геометрическую сторону* задачи и запишем условие для угла поворота опорного сечения В $\varphi_B = 0$ (рис. 1, б):

$$\varphi_B = \varphi_B(M) + \varphi_B(M_B) = 0, \quad (7)$$

где согласно закону Гука —

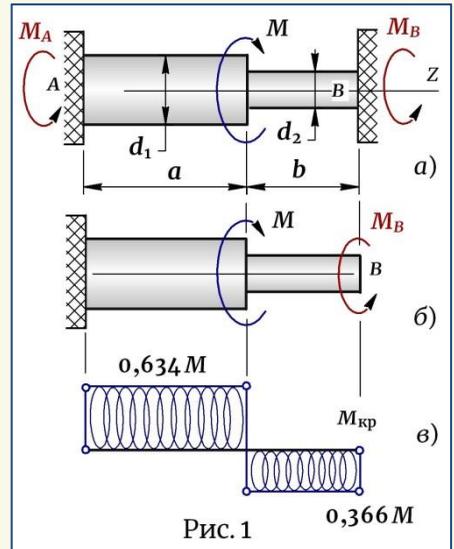


Рис. 1 0,366 M

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{B(M)} &= \frac{Ma}{GI_{\rho 1}}; \\ \varphi_{B(M_B)} &= - \left(\frac{M_B a}{GI_{\rho 1}} + \frac{M_B b}{GI_{\rho 2}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Подставляем (8) → (7) и с учетом значений (6) и (1) приводим выражение к виду:

$$\begin{aligned} \frac{Ma}{GI_{\rho 1}} - \frac{M_B a}{GI_{\rho 1}} - \frac{M_B b}{GI_{\rho 2}} = 0 &\rightarrow \frac{Ma}{GI_{\rho 1}} - \frac{0,366 Ma}{GI_{\rho 1}} - \frac{0,366 Mb}{GI_{\rho 2}} = 0 \rightarrow \\ \frac{M}{G} \left[\frac{a(1-0,366)}{I_{\rho 1}} - \frac{0,366 b}{I_{\rho 2}} \right] = 0 &\rightarrow \frac{0,634 a \cdot 10^3}{127,17 \cdot 10^4} - \frac{0,366 b \cdot 10^3}{61,33 \cdot 10^4} = 0 \rightarrow \\ \boxed{0,0005a - 0,0006b = 0}, & \quad (9) \end{aligned}$$

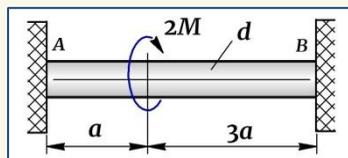
где значения "a" и "b" представлены в [м].

⑤ Решаем полученное уравнение (9) совместно с заданным условием относительно полной длины стержня и получаем:

$$\begin{cases} 0,0005a - 0,0006b = 0 \\ a + b = 4,2 \text{ м} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2,3 \text{ м} \\ b = 1,9 \text{ м} \end{cases}.$$

Задача 40

Стержень круглого поперечного сечения диаметром $d = 7 \text{ см}$, жестко заземленный с двух концов, нагружен внешним закручивающим моментом. Определить, какой наибольший момент "M" способен выдержать вал, если для материала вала $[\tau] = 80 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Раскрываем статическую неопределимость и определяем реактивные моменты в заделках, выраженные через момент "M":

а) Статическая сторона (рис. 1, а) →

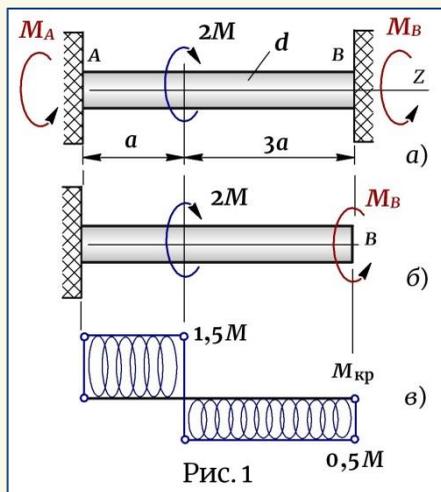
$$\sum M_Z = 0: M_A + M_B - 2M = 0. \quad (1)$$

б) *Геометрическая сторона.* Отбрасываем опору В, заменяем ее действие опорным моментом M_B и записываем условие по углу поворота сечения В (рис. 1, б) — $\Phi_B = 0 \rightarrow$

$$\Phi_B = \Phi_{B(2M)} + \Phi_{B(M_B)} = 0. \quad (2)$$

в) *Физическая сторона.* По закону Гука записываем значение угла поворота опорного сечения В от каждого момента \rightarrow

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{B(2M)} &= \frac{2Ma}{GI_\rho}; \\ \Phi_{B(M_B)} &= -\frac{M_B \cdot 4a}{GI_\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Подставляем (3) \rightarrow (2) и с учетом уравнения (1) получаем:

$$\frac{2Ma}{GI_\rho} - \frac{M_B \cdot 4a}{GI_\rho} = 0 \rightarrow \begin{cases} M_B = 0,5 M \\ M_A = 1,5 M \end{cases}.$$

По расчетным данным строим эпюру крутящих моментов (рис. 1, в).

Опасным на стержне является участок с $M_{кр(max)} = 1,5 M$.

② По опасному участку из условия прочности определяем максимальный допустимый момент "M":

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр(max)}}{W_\rho} = \frac{1,5 M \cdot 10^6}{\pi d^3 / 16} \leq [\tau] \rightarrow$$

$$[M] = \frac{\pi d^3 [\tau]}{1,5 \cdot 16 \cdot 10^6} = \frac{3,14 \cdot 70^6 \cdot 80}{1,5 \cdot 16 \cdot 10^6} = 3,6 \text{ кНм}.$$

Задача 41

Медная трубка наружного диаметра $D_M = 7,5$ см помещена внутри стальной трубки такого же внутреннего диаметра $d = 7,5$ см. Обе трубки имеют одинаковую толщину стенок $t = 3$ мм и одинаковую длину $\ell = 3$ м. Концы трубок жестко скреплены между собой и в местах скрепления нагружаются закручивающим моментом $M = 1$ кНм.

Определить, как распределится закручивающий момент между трубками, на какой угол они закрутятся и чему равны в них максимальные касательные напряжения τ_{\max} . Принять для трубок:
 $G_M = 4 \cdot 10^4$ МПа; $G_{СТ} = 8 \cdot 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем для трубок геометрические характеристики сечений, необходимые для решения задачи:

Медная трубка —

$$\left. \begin{array}{l} D_M = 7,5 \text{ см} \\ t = 3 \text{ мм} \\ d_M = 6,9 \text{ см} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} I_{\rho(M)} = \frac{\pi(D_M^4 - d_M^4)}{32} = 88 \text{ см}^4; \\ W_{\rho(M)} = \frac{\pi(D_M^4 - d_M^4)}{16D_M} = 23,5 \text{ см}^3. \end{array} \quad (1)$$

Стальная трубка —

$$\left. \begin{array}{l} d_{СТ} = 7,5 \text{ см} \\ t = 3 \text{ мм} \\ D_{СТ} = 8,1 \text{ см} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} I_{\rho(СТ)} = \frac{\pi(D_{СТ}^4 - d_{СТ}^4)}{32} = 112 \text{ см}^4; \\ W_{\rho(СТ)} = \frac{\pi(D_{СТ}^4 - d_{СТ}^4)}{16D_{СТ}} = 27,65 \text{ см}^3. \end{array} \quad (2)$$

② Раскрываем статическую неопределимость:

а) Статическая сторона $\rightarrow \sum M_Z = 0: M_M + M_{СТ} - M = 0.$ (3)

б) Геометрическая сторона. Так как трубки жестко соединены между собой, углы закручивания их должны быть одинаковыми \rightarrow

$$\varphi_M = \varphi_{СТ}. \quad (4)$$

в) Физическая сторона $\rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi_M = \frac{M_{кр(M)} \ell}{G_M I_{\rho(M)}}; \\ \varphi_{СТ} = \frac{M_{кр(СТ)} \ell}{G_{СТ} I_{\rho(СТ)}}. \end{array} \right\} (5)$

Поставляем (5) \rightarrow (4), объединяем решение со статическим уравнением (3) и с учетом значений (1) и (2) получаем:

$$\frac{M_{кр(M)} \cancel{\ell}}{G_M I_{\rho(M)}} = \frac{M_{кр(СТ)} \cancel{\ell}}{G_{СТ} I_{\rho(СТ)}} \rightarrow$$

$$M_{кр(M)} = \frac{G_M}{G_{СТ}} \cdot \frac{I_{\rho(M)}}{I_{\rho(СТ)}} M_{кр(СТ)} = \frac{4 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^4} \cdot \frac{88}{112} M_{кр(СТ)} = 0,393 M_{кр(СТ)}.$$

$$\begin{cases} M_{\text{кр}(M)} = 0,393M_{\text{кр}(CT)} \\ M_{\text{кр}(M)} + M_{\text{кр}(CT)} = M \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_{\text{кр}(M)} = 0,28 \text{ кНм} \\ M_{\text{кр}(CT)} = 0,72 \text{ кНм} \end{cases}.$$

③ Определяем угол закручивания составной трубки:

$$\boxed{\varphi_M} = \frac{M_{\text{кр}(M)} \ell}{G_M I_{\rho(M)}} = \frac{0,28 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^4 \cdot 88 \cdot 10^4} = 0,024 \text{ рад};$$

$$\boxed{\varphi_{CT}} = \frac{M_{\text{кр}(CT)} \ell}{G_{CT} I_{\rho(CT)}} = \frac{0,72 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 112 \cdot 10^4} = 0,024 \text{ рад},$$

что соответствует *геометрическому уравнению (4)*.

④ С учетом значений (1) и (2) определяем напряжения в трубках:

$$\boxed{\tau_{\text{max}(M)}} = \frac{M_{\text{кр}(M)}}{W_{\rho(M)}} = \frac{0,28 \cdot 10^6}{23,5 \cdot 10^3} = 12 \text{ МПа};$$

$$\boxed{\tau_{\text{max}(CT)}} = \frac{M_{\text{кр}(CT)}}{W_{\rho(CT)}} = \frac{0,72 \cdot 10^6}{27,65 \cdot 10^3} = 26 \text{ МПа}.$$

Задача 42

По заданной эпюре углов закручивания установить нагрузку, действующую на вал (рис. 1, а), и определить максимальные напряжения τ_{max} . Принять для вала: $d = 9 \text{ см}$; $a = 0,5 \text{ м}$; $GI_{\rho} = 1 \times 10^{12} \text{ Нмм}^2$.

РЕШЕНИЕ:

① Согласно эпюре углов закручивания (рис. 1, б) углы поворота граничных сечений соответственно равны:

$$\boxed{\varphi_A} = 0; \quad \boxed{\varphi_{B-A}} = 0,002 \text{ рад}; \quad \boxed{\varphi_{C-A}} = -0,004 \text{ рад}; \quad \boxed{\varphi_{D-A}} = 0.$$

С учетом знака углов закручивания определяем крутящие моменты на участках вала:

$$\varphi_{B-A} = \frac{M_{\text{кр}(AB)} \cdot a}{GI_{\rho}} = 0,002 \text{ рад} \rightarrow$$

$$\boxed{M_{\text{кр}(AB)}} = \frac{\varphi_{B-A} \cdot GI_{\rho}}{a} = \frac{1 \times 10^{12} \cdot 0,002}{0,5 \cdot 10^3} = +4 \text{ кНм};$$

$$\varphi_{C-A} = \varphi_{B-A} + \frac{M_{кр(BC)} \cdot a}{GI_{\rho}} = 0,002 + \frac{M_{кр(BC)} \cdot a}{GI_{\rho}} = -0,004 \text{ рад} \rightarrow$$

$$M_{кр(BC)} = \frac{(\varphi_{C-A} - \varphi_{B-A})GI_{\rho}}{a} = \frac{(-0,004 - 0,002) \cdot 1 \times 10^{12}}{0,5 \cdot 10^3} = -12 \text{ кНм};$$

$$\varphi_{D-A} = \varphi_{C-A} + \frac{M_{кр(CD)} \cdot a}{GI_{\rho}} = -0,004 + \frac{M_{кр(CD)} \cdot a}{GI_{\rho}} = 0 \rightarrow$$

$$M_{кр(CD)} = \frac{\varphi_{C-A} \cdot GI_{\rho}}{a} = \frac{0,004 \cdot 1 \times 10^{12}}{0,5 \cdot 10^3} = +8 \text{ кНм}.$$

По значениям $M_{кр}$ строим эпюру крутящих моментов (рис. 1, в).

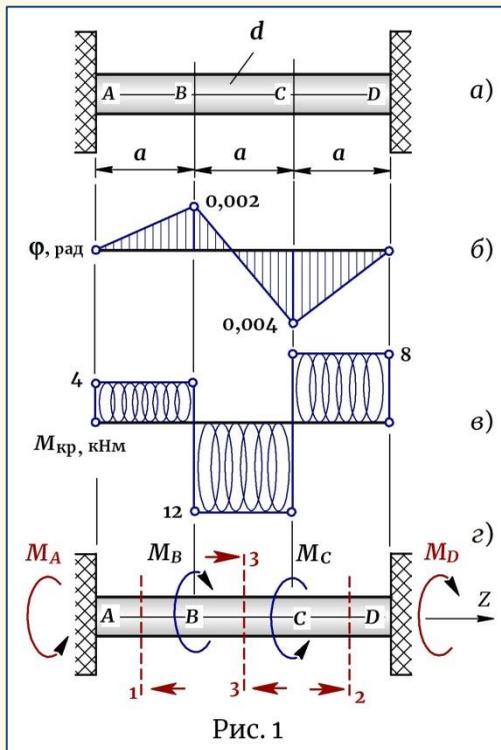


Рис. 1

② Устанавливаем нагрузку, действующую на вал. Следует помнить, что знак крутящего момента в сечении определяется направлением внешних моментов, действующих на рассматриваемую часть стержня. Согласно ПРАВИЛУ ЗНАКОВ внешний момент считается **положительным**, если при взгляде со стороны сечения он имеет направление против часовой стрелки, и **отрицательным** – если по часовой стрелке.

Учитывая, что крутящий момент в опорном сечении равен реактивному моменту в заделке, а скачок на эпюре моментов равен внешнему моменту, приложенному в этом сечении, получаем (рис. 1, з):

Сечение 1: $M_{кр(AB)} = \boxed{M_A = 4 \text{ кНм}}$ (против часовой стрелки).

Сечение 2: $M_{кр(CD)} = \boxed{M_D = 8 \text{ кНм}}$ (против часовой стрелки).

Сечение 3 (справа налево): $M_{кр(BC)} = M_A - M_B = -12 \text{ кНм} \rightarrow$

$\boxed{M_B = 16 \text{ кНм}}$ (по часовой стрелке).

Сечение 3 (слева направо): $M_{кр(BC)} = M_D - M_C = -12 \text{ кНм} \rightarrow$

$\boxed{M_C = 20 \text{ кНм}}$ (по часовой стрелке).

Полученные значения крутящих моментов и их направление удовлетворяют условию равновесия вала:

$$\sum M_Z = 0: M_A - M_B + M_C - M_D = 0 \rightarrow 4 - 16 + 20 - 8 = 0.$$

③ Вычисляем максимальные касательные напряжения в вале. Они возникают на наиболее нагруженном участке и равны:

$$\boxed{\tau_{\max}} = \frac{M_{кр(BC)}}{W_\rho} = \frac{M_{кр(BC)}}{\pi d^3 / 16} = \frac{12 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 90^3 / 16} = 84 \text{ МПа}.$$

Задача 43

Взаимный угол поворота сечения C относительно сечения B составляет $0,008$ рад (рис. 1, а). Определить в вале наибольшее касательное напряжение τ_{\max} . Принять для вала: $d = 20$ см; $a = 40$ см; $G = 8 \times 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① По значению угла закручивания сечения C относительно сечения B определяем крутящий момент на участке BC :

$$\varphi_{C-B} = \frac{M_{кр(BC)} \cdot 4a}{GI_\rho} = \frac{M_{кр(BC)} \cdot 4a}{G \cdot \pi d^4 / 32} \rightarrow$$

$$M_{кр(BC)} = \frac{G \cdot \pi d^4 \cdot \varphi_{C-B}}{32 \cdot 4a} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 200^4 \cdot 0,008}{32 \cdot 4 \cdot 400} = 62,8 \text{ кНм}. \quad (1)$$

② Вал является *статически неопределимым*. Составляем для вала уравнение равновесия (рис. 1, б) –

$$\sum M_Z = 0: M_A - M + M - M_D = 0 \rightarrow \boxed{M_A = M_D} \quad (2)$$

и согласно условию по перемещению $\boxed{\varphi_D = 0}$ на основании закона Гука получаем (рис. 1, в):

$$\frac{Ma}{GI_\rho} - \frac{M \cdot 5a}{GI_\rho} + \frac{M_D \cdot 6a}{GI_\rho} = 0 \rightarrow \boxed{M_D = M_A = \frac{2}{3} M}.$$

По значениям внешних моментов строим эпюру крутящих моментов (рис. 1, г), где – $\boxed{M_{кр(BC)} = (1/3) M}$, откуда согласно (1):

$$M = 3 M_{кр(BC)} = 3 \cdot 62,8 = 188,4 \text{ кНм}. \quad (3)$$

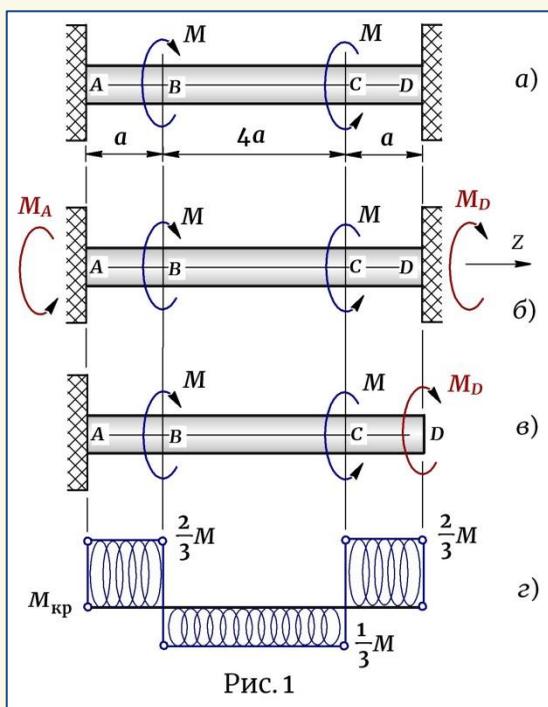


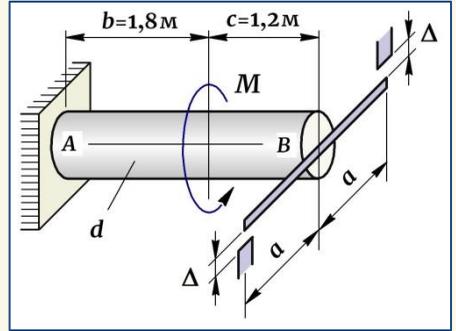
Рис. 1

③ Наиболее нагруженными являются крайние участки, где возникают τ_{max} , с учетом значения (3) равные:

$$\boxed{\tau_{max}} = \frac{M_{кр}}{W_\rho} = \frac{(2/3)M}{\pi d^3/16} = \frac{(2/3) \cdot 188,4 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 200^3/16} = 80 \text{ МПа}.$$

Задача 44

К свободному концу вала прикреплена абсолютно жесткая траверса длиной $2a = 1$ м. Поворот траверсы ограничен упорами, между которыми и траверсой до нагружения имеется зазор $\Delta = 10$ мм. Вал имеет диаметр $d = 12$ см и нагружается моментом $M = 60$ кНм. Определить наибольшие касательные напряжения τ_{\max} в вале. Также определить, при какой величине зазора Δ будет обеспечена равнопрочность вала и на сколько при этом повысится его грузоподъемность по сравнению со случаем, когда $\Delta = 0$. Принять для вала: $G = 8 \times 10^4$ МПа.



РЕШЕНИЕ:

① Геометрические характеристики вала, необходимые для решения:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 12^4}{32} = 2034,72 \text{ см}^4; \quad (1)$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 12^3}{16} = 339,12 \text{ см}^3. \quad (2)$$

② Под действием момента M вал закручивается, но поворот торцевого сечения, где прикрепена траверса, ограничен упорами, и угол поворота здесь составляет:

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \frac{\Delta}{a} = \frac{10}{500} = 0,02 \rightarrow \varphi_B = 1,15^\circ = 0,02 \text{ рад}. \quad (3)$$

③ Так как упоры фиксируют угловое перемещение, в сечении B , а также в заделке A возникают реактивные моменты, удовлетворяющие условию равновесия вала (рис. 1, а):

$$\sum M_Z = 0: M - M_A - M_B = 0. \quad (4)$$

④ Определим на торце B реактивный момент. Для этого рассмотрим вал под действием моментов M и M_B и на основании принципа независимости действия сил представим угол поворота сечения B как алгебраическую сумму углов поворота этого сечения от каждого момента в отдельности:

$$\varphi_B = \varphi_{B(M)} + \varphi_{B(M_B)} = 0,02 \text{ рад}, \quad (5)$$

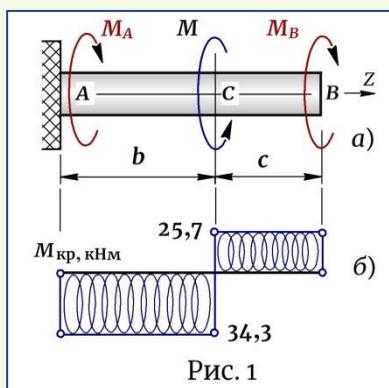
где согласно закону Гука и с учетом значения (1) —

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{B(M)} &= \frac{Mb}{GI_\rho} = \frac{60 \cdot 10^6 \cdot 1,8 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 2034,72 \cdot 10^4} = 0,0663; \\ \varphi_{B(M_B)} &= -\frac{M_B(b+c)}{GI_\rho} = -\frac{M_B \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 2034,72 \cdot 10^4} = -0,0018 M_B. \end{aligned} \right\} (6)$$

Подставляем (6) в (5) и с учетом статического уравнения (4) определяем моменты в сечениях А и В:

$$0,0663 - 0,0018 M_B = 0,02 \rightarrow \begin{cases} M_B = 25,7 \text{ кНм} \\ M_A = 34,3 \text{ кНм} \end{cases}.$$

По полученным значениям строим эпюры моментов (рис. 1, б).



⑤ Наиболее нагруженным на валу является участок "b", где крутящий момент имеет большее значение. Определяем на этом участке τ_{\max} и с учетом значения (2) получаем:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_\rho} = \frac{34,3 \cdot 10^6}{339,12 \cdot 10^3} = 100 \text{ МПа}.$$

⑥ Определим, при какой величине зазора Δ будет обеспечена равнопрочность вала. Равнопрочность предполагает, что во всех сечениях будут действовать одинаковые по величине максимальные касательные напряжения, равные $\tau_{\max} = M_{\text{кр}}/W_\rho$.

А это значит, что на обоих участках при постоянном по длине сечении вала должны быть одинаковыми крутящие моменты:

$$M_{\text{кр}}(AC) = M_{\text{кр}}(CB).$$

Но так как крутящие моменты на участках соответственно равны $M_{\text{кр}}(AC) = M_A$; $M_{\text{кр}}(CB) = M_B$, то условием равнопрочности вала является равенство реактивных моментов и на основании статического уравнения (4) →

$$M_A = M_B = M/2 = 30 \text{ кНм}. \quad (7)$$

Теперь, учитывая (7), снова рассмотрим вал под действием моментов M и M_B , и на основании принципа независимости действия сил определим угол поворота сечения B :

$$\varphi_B = \varphi_{B(M)} + \varphi_{B(M_B)} = \frac{Mb}{GI_\rho} - \frac{M_B(b+c)}{GI_\rho} =$$

$$= \frac{60 \cdot 10^6 \cdot 1,8 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 2034,72 \cdot 10^4} - \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 2034,72 \cdot 10^4} = 0,011 \text{ рад},$$

откуда согласно выражению (3) получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi_B \approx \varphi_B = \frac{\Delta}{a} \rightarrow \boxed{\Delta} = \varphi_B \cdot a = 0,011 \cdot 500 = 5,5 \text{ мм}.$$

⑦ В случае, когда $\Delta = 0$, и следовательно, $\boxed{\varphi_B = 0}$, что соответствует жесткому заземлению сечения B , моменты в заделках A и B на основании выражений (6) и уравнения (4) будут равны:

$$\varphi_B = \frac{Mb}{GI_\rho} - \frac{M_B(b+c)}{GI_\rho} = 0 \rightarrow \boxed{\begin{matrix} M_B = 0,6M \\ M_A = 0,4M \end{matrix}},$$

а значит, и крутящие моменты на участках вала будут иметь соответствующее значение.

Сравниваем два последних варианта нагружения. Принимая, что в обоих случаях прочность вала должна быть обеспечена и напряжения в них должны быть равны $\boxed{\tau_{\max} = M_{\max} / W_\rho = [\tau]}$, получаем:

★ для равнопрочного вала —

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_\rho} = \frac{M/2}{W_\rho} = [\tau] \rightarrow \boxed{M} = 2 W_\rho [\tau].$$

★ для жестко закрепленного вала —

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_\rho} = \frac{0,6M}{W_\rho} = [\tau] \rightarrow \boxed{M} = 1,67 W_\rho [\tau].$$

Таким образом, грузоподъемность равнопрочного вала на 20% выше грузоподъемности вала жестко закрепленного, так как достижение напряжений $[\tau]$ в последнем происходит при нагрузке, примерно в 1,2 раза меньшей, чем в равнопрочном валу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: Учебник. / М.Д. Подскребко – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.С. Вольмир [и др.]; под ред. Вольмира А.С. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: Учебник./В.И. Феодосьев – М.: Наука, 1986. – 512 с.
4. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: Учебник. / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро – М.: Высшая школа, 1975. – 742 с.
5. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев – М.: Наука, 1976. – 607 с.
6. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов: Учебник./ Г.С. Писаренко [и др.]; под ред. Писаренко Г.С. – Киев: Вища школа, 1979. – 696 с.
7. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов: Учебник. / Г.К. Татур – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.