УДК 517.956.3

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГО-РЕЛАКСИРУЮЩЕГО СТЕРЖНЯ: КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ И КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

В. И. Корзюк[1,2)*], Я. В. Рудько[3)**], В. В. Колячко[2)***]
[1)] Институт математики Национальной академии наук Беларуси,
ул. Сурганова, 11, 220012, г. Минск, Беларусь
[2)] Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь
[3)] ООО «Открытые информационные системы»,
ул. В. Гастинец, 143Б, к. 579, 220030, г. Молодечно, Беларусь,
e-mail: *korzyuk@bsu.by, **janycz@yahoo.com, ***vlad.kolyachko@yandex.ru

В настоящей работе исследуется корректность по Адамару задачи Коши для одномерной гиперболической системы уравнений в частных производных, описывающей продольные колебания упруго-релаксирующего стержня постоянного поперечного сечения. Показывается, что механическая энергия системы затухает. Также обсуждаются некоторые важные качественные свойства решений: принцип причинности, области зависимости и влияния, конечная скорость распространения волн.

Ключевые слова: продольные колебания; модель Максвелла; гиперболическая система уравнений; задача Коши; корректно поставленная задача.

Введение. В строительстве различных сооружений очень часто приходиться иметь дело с колебаниями сплошных сред. Поэтому изучение математических моделей таких явлений является целесообразным. В данной работе мы исследуем одну из таких моделей, представляющую систему двух дифференциальных уравнений в частных производных, исследуем задачу Коши для нее и обсуждаем качественные свойства решений.

Постановка задачи. Требуется найти решение системы уравнений

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)=\frac{\partial w}{\partial x}(t,x), \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(t,x)=\beta\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)+w(t,x), (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}, \tag{1}$$

при начальных условиях

$$w(0,x)=\mu(x), u(0,x)=\varphi(x), \partial_t u(0,x)=\psi(x), x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

в предположении достаточной гладкости функций μ, φ, ψ.

В уравнениях (1) постоянная $\rho>0$ – плотность материала стержня, $\beta>0$ – время релаксации, $\gamma\beta^{-1}>0$ – мгновенный модуль упругости, u – дилатации (смещения) стержня, w – напряжения стержня, x – пространственная координата, t – временная координата.

Если $\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}>0$, то система (1) является гиперболической по классификации, предложенной Д. Стриквердой [1].

Затухание энергии. Определим «энергию» системы (1) как

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\frac{\beta}{\gamma}w^2\right)(t,x)dx+\frac{1}{2\gamma}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}w^2(\tau,x)dx \tag{3}$$

Исходя из соображений теории упругости [2], можно показать, что при некоторых дополнительных предположениях функция (3) действительно определяет энергию стержня, деленную на площадь поперечного сечения этого стержня. Справедливо утверждение о том, что эта «энергия» не возрастает.

Пусть пара функций u, w есть классическое решение уравнения (1) и функции $u(t,\cdot)$ и $w(t,\cdot)$ имеют компактный носитель в пространстве для любого t. Тогда E невозрастающая функция.

В самом деле, легко рассчитать

$$E'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\beta}{\gamma}w\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t,x)dx + \frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(t,x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\gamma}w\left(\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} - w\right) + \frac{1}{2\gamma}w^2\right)(t,x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,x)dx - \frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(t,x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)(t,x)dx - \frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(t,x)dx \le 0.$$

Интегрирование по частям в этом доказательстве корректно, поскольку функции u и w имеют компактный носитель в пространстве для любой временной координаты.

Из затухания энергии следует, что задача (1), (2) имеет не более одного классического решения, если оно существует.

Задача Коши. Дифференцируя первое уравнение системы (1) по x, а второе по t и выражая $\partial_t^2\partial_x u$ из обеих уравнений, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\gamma}{\rho\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) + \frac{1}{\beta}\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) = 0, \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R},$$

$$w(0,x) = \mu(x), \qquad \partial_t w(0,x) = \frac{\gamma}{\beta}\psi'(x) - \frac{1}{\beta}\mu(x), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Такая задача Коши легко интегрируется, и ее классическое решение существует [3–5], и может быть записано в явном аналитическом виде [4,6]

$$w(t,x) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right)\Bigg\{\left(\mu\left(x - t\sqrt{\gamma\rho^{-1}\beta^{-1}}\right) + \mu\left(x + t\sqrt{\gamma\rho^{-1}\beta^{-1}}\right)\right) +$$

$$+\sqrt{\rho\beta\gamma^{-1}}\int_{x-t\sqrt{\gamma\rho^{-1}\beta^{-1}}}^{x+t\sqrt{\gamma\rho^{-1}\beta^{-1}}} I_0\left(\frac{1}{2\beta}\sqrt{t^2 - \rho\beta\gamma^{-1}(x-\xi)^2}\right)\left(\frac{\gamma}{\beta}\psi'(\xi) - \frac{1}{\beta}\mu(\xi)\right)d\xi +$$

$$\frac{t}{2}\sqrt{\rho\beta^{-1}\gamma^{-1}}\int_{x-t\sqrt{\gamma\rho^{-1}\beta^{-1}}}^{x+t\sqrt{\gamma\rho^{-1}\beta^{-1}}}\frac{1}{4\beta}\,{}_0F_1\left(2;\frac{t^2 - \gamma^{-1}\rho\beta(x-\xi)^2}{16\beta^2}\right)\mu(\xi)d\xi\Bigg\},$$

$$(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}, \ (4)$$

Тогда,

$$u(t,x) = \varphi(x) + t\psi(x) + \frac{1}{\rho}\int_0^t d\lambda\int_0^\lambda \frac{\partial w}{\partial x}(\tau,x)d\tau. \qquad (5)$$

В формуле (4) использованы обозначения: I_n – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка n и ${}_0F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Таким образом, построено в явном аналитическом виде классическое решение задачи Коши (1) – (2), если $\mu \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^2(\mathbb{R})$.

Непрерывная зависимость решения от начальных данных легко доказывается с помощью априорных оценок и многомерной леммы Гронволла. Хотя есть более простой способ доказательства корректности задачи Коши – использование матричного критерия [1].

Из формул (4) и (5) явным образом следует, что решения системы обладают конечной скорость распространения колебаний.

Область зависимости. Из приведенной выше формулы видно, что для вычисления решения задачи (1), (2) в точке (t_0, x_0) необходимо задать значение функции φ всего в одной точке, а значения функций μ, ψ – на отрезке $[x_0 - t_0\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}, x_0 + t_0\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}]$.

Иными словами, если мы рассмотрим два набора начальных условий (μ, φ, ψ) и $(\mu_1, \varphi_1, \psi_1)$, совпадающих на отрезке $[x_0 - t_0\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}, x_0 + t_0\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}]$, то решения обеих задач Коши совпадают в точке (t_0, x_0). В частности, изменение начальных данных вне интервала $[x_0 - t_0\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}, x_0 + t_0\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}]$ не влияет на решение в точке (t_0, x_0).

Таким образом, областью зависимости точки (t_0, x_0) является интервал $[x_0 - t_0\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}, x_0 + t_0\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}]$.

Область влияния. Область влияния точки x_0, лежащей на действительной оси, это множество всех точек (t_0, x_0), область зависимости которых содержит точку $(0, x_0)$. И ее можно явно указать как

$$\left\{(t,x)\middle| t \in [0,\infty) \wedge x \in \mathbb{R} \wedge x - t\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}} \le x_0 \le x + t\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}\right\}.$$

Аналогично определяется область влияния любого множества. В частности, область влияния отрезка $[a, b]$ задается выражением

$$\left\{(t,x)\middle| t \in [0,\infty) \wedge x \in \mathbb{R} \wedge x - t\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}} \le b \wedge a \le x + t\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}\right\}.$$

Принцип причинности. Пусть пара функций u, w есть классическое решение задачи (1), (2). Тогда значения $u(t_0, x_0)$ и $w(t_0, x_0)$ зависят только от значений μ, φ и ψ на отрезке $[x_0 - t_0\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}, x_0 + t_0\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}]$.

Доказательство принципа непосредственно следует из формул (4) и (5). Однако, можно привести доказательство этого результата без использования явных формул. Например, вместо (4) можно использовать интегральное представление [3].

Заключение. В данной работе показано, что задача Коши для одномерной системы уравнений в частных производных, описывающей продольные колебания упруго-релаксирующего стержня, является корректной. Найдено ее решение в явном аналитическом виде. Также указаны некоторые качественные свойства решений.

Литература

1. Strikwerda, J. C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations / J. C. Strikwerda. – 2nd ed. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. – 439 p.

2. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособ.: для вузов: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – Т. VII: Теория упругости. – 264 с.

3. Korzyuk, V. I. Classical solution of the initial-value problem for a one-dimensional quasilinear wave equation / V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko // XX Международная научная

конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2022): материалы международной научной конференции, Новополоцк, 31 мая – 03 июня 2022 г.: в 2 ч. / Полоцкий государственный университет; редкол.: А. А. Козлов [и др.]. – Новополоцк: 2022 – Ч. 2. – С. 38–39.
4. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики: учеб. пособие / В. И. Корзюк. – 2-е изд. – М.: ЛЕНАНД, 2021. – 480 с.
5. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 2. – С. 174–184.
6. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

УДК 624.072

СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ НА УПРУГОМ СЛОЕ

К.А. Сирош1), О.В.Козунова2)
1) Белорусский государственный университет транспорта,
ул. Кирова, 33, г. Гомель, Беларусь, e-mail: kris.sirosh@mail.ru
2) Белорусский национальный технический университет,
ул. Ф. Скорины, 25/3, г. Минск, Беларусь, e-mail: kozunova@gmail.com

Рассматривается бесконечная регулярная система железобетонных плит, расположенная на упругом слое. Слой ограничен по толщине и жестко соединен с недеформируемым основанием.

Упругий слой заменяется расчетной областью, которая аппроксимируется симметричной объемной разбивочной сеткой с постоянными шагами в осях XYZ, состоящая из объемных ячеек. При решении поставленной задачи в перемещениях энергия деформации подсчитывается для каждой объемной ячейки расчетной области, после чего интегрируется по всему объему упругого основания.

Статический анализ бесконечной регулярной системы плит на упругом слое под воздействием пространственной нагрузки выполняется итерационным алгоритмом вариационно-разностного метода (ВРМ), для которого характерна замена дифференциальных уравнений конечно-разностными аппроксимациями, используя метод конечных разностей. ВРМ является численно-аналитическим методом расчета строительных конструкций и приближен к реальным условиям работы системы «фундамент – основание».

Ключевые слова: бесконечная регулярная система железобетонных плит, вариационно-разностный метод, упругий слой, контактная зона, прогибы, осадки, контактные напряжения, внутренние усилия.

В работе авторами рассматривается бесконечная регулярная система железобетонных плит на упругом слое. Система разбивается в силу симметрии на базовые расчетные элементы – плиты, свободно опирающиеся на упругий слой. Линейные размеры конструкций – lx, ly. Поперечные сечения плит приняты постоянными.

Основание моделируется упругим однородным изотропным слоем, ограниченным по толщине и соединенным с несжимаемым основанием. Внешняя сосредоточенная нагрузка F перпендикулярна плоскости упругого слоя и приложена в центре плиты.