

конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2022): материалы международной научной конференции, Новополоцк, 31 мая – 03 июня 2022 г.: в 2 ч. / Полоцкий государственный университет; редкол.: А. А. Козлов [и др.]. – Новополоцк: 2022 – Ч. 2. – С. 38–39.

4. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики: учеб. пособие / В. И. Корзюк. – 2-е изд. – М.: ЛЕНАНД, 2021. – 480 с.

5. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 2. – С. 174–184.

6. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

УДК 624.072

## СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ НА УПРУГОМ СЛОЕ

К.А. Сирош<sup>1</sup>), О.В.Козунова<sup>2</sup>)

1) Белорусский государственный университет транспорта,  
ул. Кирова, 33, г. Гомель, Беларусь, e-mail: kris.sirosh@mail.ru

2) Белорусский национальный технический университет,  
ул. Ф. Скорины, 25/3, г. Минск, Беларусь, e-mail: kozunova@gmail.com

Рассматривается бесконечная регулярная система железобетонных плит, расположенная на упругом слое. Слой ограничен по толщине и жестко соединен с недеформируемым основанием.

Упругий слой заменяется расчетной областью, которая аппроксимируется симметричной объемной разбивочной сеткой с постоянными шагами в осях XYZ, состоящая из объемных ячеек. При решении поставленной задачи в перемещениях энергия деформации подсчитывается для каждой объемной ячейки расчетной области, после чего интегрируется по всему объему упругого основания.

Статический анализ бесконечной регулярной системы плит на упругом слое под воздействием пространственной нагрузки выполняется итерационным алгоритмом вариационно-разностного метода (ВРМ), для которого характерна замена дифференциальных уравнений конечно-разностными аппроксимациями, используя метод конечных разностей. ВРМ является численно-аналитическим методом расчета строительных конструкций и приближен к реальным условиям работы системы «фундамент – основание».

**Ключевые слова:** бесконечная регулярная система железобетонных плит, вариационно-разностный метод, упругий слой, контактная зона, прогибы, осадки, контактные напряжения, внутренние усилия.

В работе авторами рассматривается бесконечная регулярная система железобетонных плит на упругом слое. Система разбивается в силу симметрии на базовые расчетные элементы – плиты, свободно опирающиеся на упругий слой. Линейные размеры конструкций –  $l_x$ ,  $l_y$ . Поперечные сечения плит приняты постоянными.

Основание моделируется упругим однородным изотропным слоем, ограниченным по толщине и соединенным с несжимаемым основанием. Внешняя сосредоточенная нагрузка  $F$  перпендикулярна плоскости упругого слоя и приложена в центре плиты.

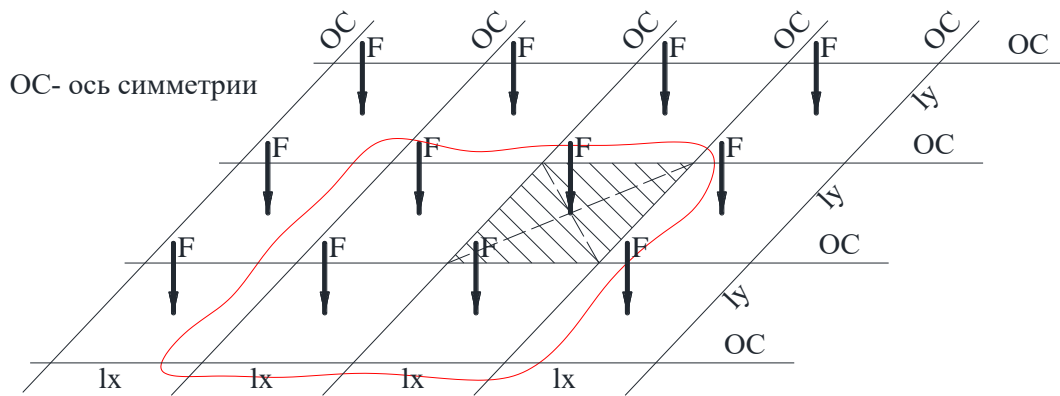


Рис. 1. Регулярная система железобетонных плит под действием внешней нагрузки

Граничные условия задачи. На границах расчетной области основания горизонтальные перемещения  $u(x)$ ,  $v(y)$  равняются нулю. В зоне контакта осадки упругого слоя и прогиб плиты равны. Для крайних точек плиты регулярной системы введены смешанные граничные условия

$$Q_z|_{x=\pm \frac{lx}{2}} = -D_x \frac{d^3 w}{dx^3} = 0, \quad Q_z|_{y=\pm \frac{ly}{2}} = -D_y \frac{d^3 w}{dy^3} = 0,$$

$$\varphi_x|_{y=\pm \frac{ly}{2}} = \frac{dw}{dy} = 0, \quad \varphi_y|_{x=\pm \frac{lx}{2}} = \frac{dw}{dx} = 0. \quad (1)$$

Расчетный элемент (плита) разбивается на равные участки размерами  $\Delta x \times \Delta y$ . В контактной зоне касательные напряжения не учитываются. Для решения пространственной задачи основание (упругий слой) заменяется расчетной областью из совокупности ячеек и узловых точек, полученных путем аппроксимации [1] симметричной объемной разбивочной сеткой с постоянными шагами в осях глобальной системы координат. Ячейка расчетной области является параллелепипедом с размерами граней  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ .

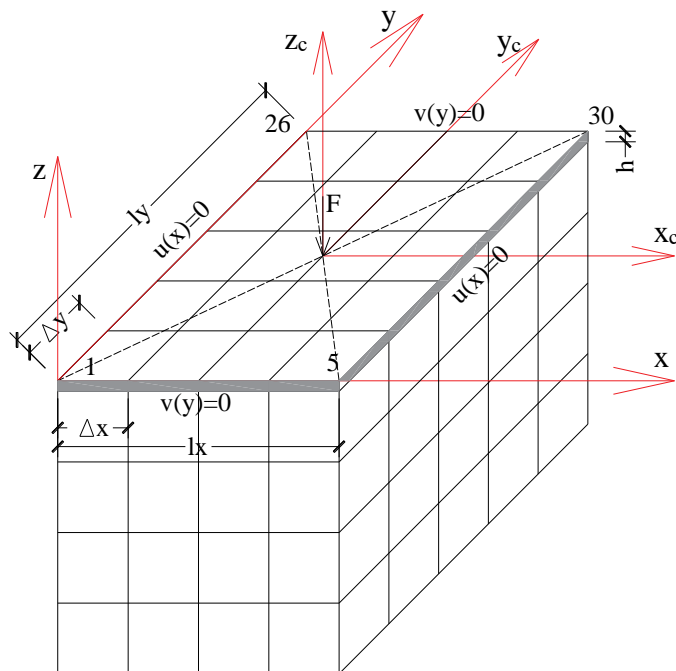


Рис. 2. Расчетная область для решения пространственной задачи

Согласно вариационному принципу Лагранжа [2] при нагружении статической нагрузкой на упругом слое расчетного элемента исследуемой бесконечной системы ее полная потенциальная энергия в состоянии равновесия принимает минимальное значение.

Величина полной потенциальной энергии конструкции (плиты) состоит из энергий деформации конструкции  $\Omega$  и упругого основания  $U$ , а также работы внешней нагрузки  $\Pi$

$$\mathcal{E} = U + \Omega + \Pi. \quad (2)$$

Удельная энергия деформации определяется для каждой ячейки через конечно-разностные аппроксимации, а после по объему упругого слоя интегрируется [1, 3].

После замены интегро-дифференциальных выражений функционалов энергий конечно-разностными аппроксимациями система дифференциальных уравнений преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений. Решение СЛАУ позволяет найти неизвестные компоненты вектора  $u_i(x,y,z)$ ,  $v_i(x,y,z)$ ,  $w_i(x,y,z)$ . Система линейных алгебраических уравнений представлена в общем виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_i} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

где  $N$  – число узловых точек параллелепипеда.

В [4] рассматривалось упругое равновесие плоской однородной анизотропной пластинки постоянной толщины, закрепленной по всему краю (или по его части) под воздействием деформируемой изгибающей нагрузки, распределенной по плоским поверхностям и нормальной к срединной поверхности в недеформированном состоянии. Плоскостью изгиба (плоскость  $XY$ ) принимается срединная плоскость недеформированной плиты. Ось  $Z$  направляется в сторону ненагруженной внешней поверхности и в силу симметрии поставленных задач в дальнейшем является одной из главных осей, а точка приложения осей совпадает с центром тяжести плиты. Объемными силами можно пренебречь [5].

Обычно энергию деформации и энергию изгиба конструкции отождествляют (деформации сдвига не учитываются). Учет кручения плиты в плоскости  $XY$  возможен через потенциальную энергию деформаций ортотропной плиты по Лехницкому [4]

$$\Omega = V = \frac{1}{2} \iint \left[ D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (4)$$

где  $D_x, D_y$  – цилиндрические жесткости изгиба ортотропной плиты вокруг осей  $Y$  и  $X$  соответственно (которые совпадают с главными осями);

$D_k (D_{xy})$  – жесткость кручения плиты.

Цилиндрические жесткости изгиба плиты с учетом ортотропии имеют вид [4]

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \quad (5)$$

где  $E_x, E_y, \nu_x, \nu_y$  – главные модули упругости и коэффициенты Пуассона материала плиты.

В расчетах учитывается жесткость кручения плиты (для определения которой применена формула из монографии С.П. Тимошенко [6])

$$D_k = D_{xy} = \frac{\nu_x + \nu_y}{2} \sqrt{D_x \cdot D_y}. \quad (6)$$

Для определения изгибающих моментов  $M_x, M_y$  и крутящего  $M_k$  ортотропной изолированной плиты справедливы следующие соотношения [5]

$$\begin{aligned} M_x &= -D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_k &= -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (7)$$

При определении энергии деформации упругого слоя на основании закона сохранения энергии ее заменяют работой реактивных давлений в контактной зоне конструкции [7]. Если пренебрегать реактивными касательными усилиями в контактной зоне, то энергия деформации упругого слоя для плиты определяется [8] как:

$$U = \frac{1}{2} \iint_S p(x, y) w(x, y) dx dy; \quad (8)$$

где  $q(x, y)$  – реактивные давления в контактной зоне конструкции.

Работа внешней нагрузки  $q(x, y)$  для прямоугольной плиты [8]

$$\Pi = - \iint_S q(x, y) w(x, y) dx dy. \quad (9)$$

Следует отметить, интегрирование в формулах (8), (9) производится по области  $S$  контакта конструкции (плиты) с упругим слоем.

**Зависимость «жесткость-кривизна».** Для железобетонных конструкций (балок и плит) с возможным трещинообразованием ТНПА в статических расчетах рекомендует использовать приведенный модуль упругости (деформации) для нахождения соответствующих переменных жесткостей. Алгоритм такого расчета дан в работе [7], в которой нелинейный расчет железобетонных балок базируется на зависимости «жесткость-кривизна» по В.И. Соломину [9], взаимосвязанной с диаграммой «момент-кривизна» через переменную (секущую) жесткость

$$\operatorname{tg}\beta_i = B_i = \frac{M_k}{\chi_k}, \quad (10)$$

где  $B_i$  – переменная (секущая) жесткость при изгибе конструкции (балки, плиты)  $i$ -том состоянии, представляющая собой тангенс угла наклона секущей к оси кривизны, проведенной к точке  $K$  диаграммы «момент – кривизна».

При нахождении переменной (секущей) жесткости плиты на каждой итерации используется зависимость «жесткость – кривизна» (рис. 3) в направлениях  $X$ ,  $Y$ . Зависимость построена в [10], с использованием приведенной цилиндрической жесткости плиты по направлению осей ортотропии.

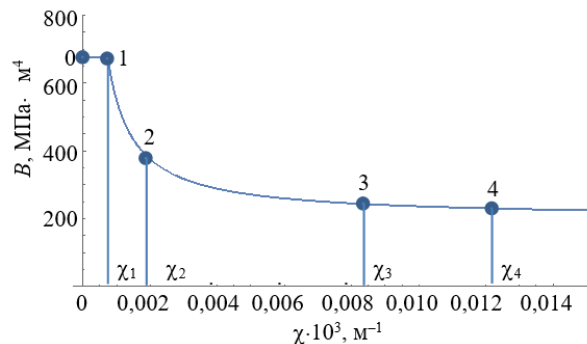


Рис. 3. Зависимость «жесткость – кривизна» по [9]

Упругий расчет выполнен для дорожной железобетонной плиты размерами  $4 \times 3 \times 0,14$  м из бетона класса С20/25 с характеристиками: модуль деформации бетона  $E_b = 29,05$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu_b = 0,17$ . Упругий изотропный слой мощностью (толщиной)  $H = 7$  м жестко соединен с недеформируемым основанием. Параметры упругого слоя: модуль деформации  $E_0 = 20$  кПа, коэффициент Пуассона  $\nu_0 = 0,33$ . Внешняя нагрузка  $Q = 65$  кН распределялась по площади  $0,4 \times 0,4$  м и была приложена в центре плиты. В расчете учитывался собственный вес плиты  $q = 3,5$  кН/м<sup>2</sup>.

Использование зависимости «жесткость-кривизна» помогает сократить промежуточные вычисления, также эта зависимость легче аппроксимируется, чем зависимость «момент-кривизна» [7].

Контактная поверхность конструкции с упругим слоем разбивается на равные прямоугольные участки и определяются перемещения центра каждого участка от единичной силы, равномерно распределенной по площади каждого выделенного участка. Таким образом, образуется матрица податливости упругого слоя, из которой в дальнейшем будет получена матрица жесткости упругого слоя [7].

Организуется итерационный алгоритм, при котором на каждой итерации по зависимости «жесткость – кривизна» уточняется изгибная жесткость на каждом участке железобетонной плиты.

#### Литература

1. Козунова, О. В. Расчет бесконечной системы перекрестных балок на упругом основании вариационно-разностным методом / О. В. Козунова, К. А. Сирош // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2021. – № 16. – С. 65-71
2. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высшая школа, 1990. – 400 с.
3. Козунова, О. В. Нелинейный расчет регулярной системы железобетонных балок на упругом основании на симметричную нагрузку / О. В. Козунова, К. А. Сирош // Механика.

Исследования и инновации: международный сборник научных трудов / БелГУТ. – Гомель, 2021. – Вып. 14. – С. 97-104.

4. Лехницкий, С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. М.: Госуд. изд-во технико-теор. лит-ры, 1957. 387 с.

5. Козунова О.В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 1. Теория расчета. / О.В. Козунова // Наука и техника. – 2022. – 21(3). – С. 211-221.

6. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки/ С.П. Тимошенко, С.Войновский-Кригер М., Фитматгиз, 1963.– 536 с

7. Козунова, О.В. Нелинейный расчет железобетонной балки на упругом основании с помощью зависимости «жесткость-кривизна» / О.В. Козунова/ НТЖ: Строительная механика и расчет сооружений. М. – №1– 2022 – с.37-46.

8. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости: монография / С. В. Босаков. – Брест : БрГТУ, 2006. – 107 с.

9. Соломин, В.И. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций // В.И. Соломин, С.Б. Шматков/ М., Стройиздат –1986. –208с.

10. Козунова, О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 2. Результаты расчета = Improvement of Calculation Technique for Flexible Orthotropic Plates on Elastic Base. Part 2. Calculation Results / О. В. Козунова // Наука и техника. – 2022. – № 4. – С. 290-296.

УДК 624.072

## **НЕЛИНЕЙНЫЙ РАСЧЕТ КЛИНОВИДНОГО ОСНОВАНИЯ ПОД БАЛОЧНОЙ ПЛИТОЙ С УЧЕТОМ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ В ЗОНЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

О.В. Козунова<sup>1)</sup>, А.Г. Пусенков<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет,

Минск, Беларусь, e-mail: [kozunova@gmail.com](mailto:kozunova@gmail.com)

<sup>2)</sup> ОАО «Гомельский ДСК»,

Гомель, Беларусь

Расчет упругого основания и балочной плиты с учетом сил сцепления в общем виде является чрезвычайно сложной биконтактной задачей.

Взаимодействие балочной плиты и упругого основания с учетом касательных напряжений в зоне контактного взаимодействия по сути является разновидностью контактных задач теории упругости, решение которой возможно в нелинейной постановке при работе упругих сред в зоне небольших упруго-пластических деформаций, то есть с учетом физической нелинейности.

Учет нелинейности деформирования балочной плиты позволяет увеличить, как правило, допустимую нагрузку на плиту за счет перераспределения и уменьшения максимальных значений усилий, но при этом обнаруживается резкое возрастание неравномерности осадок. Данные нелинейного расчета позволяют выполнить достоверную оценку работы конструкции по предельным состояниям эксплуатационной пригодности.

Для решения рассматриваемой задачи авторами применяется вариационно-разностный метод (ВРМ), который реализуется в перемещениях через конечно-разностные соотношения теории упругости при использовании в решении функционала полной потенциальной энергии деформации системы, состоящей из плиты, упругого основания и зоны контактного взаимодействия.

Предлагаемая методика статического расчета позволяет определить внутренние усилия в балочной плите и осадки упругого основания под плитой с учетом касательных