

Исследования и инновации: международный сборник научных трудов / БелГУТ. – Гомель, 2021. – Вып. 14. – С. 97-104.

4. Лехницкий, С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. М.: Госуд. изд-во технико-теор. лит-ры, 1957. 387 с.

5. Козунова О.В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 1. Теория расчета. / О.В. Козунова // Наука и техника. – 2022. – 21(3). – С. 211-221.

6. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки/ С.П. Тимошенко, С.Войновский-Кригер М., Фитматгиз, 1963.– 536 с

7. Козунова, О.В. Нелинейный расчет железобетонной балки на упругом основании с помощью зависимости «жесткость-кривизна» / О.В. Козунова/ НТЖ: Строительная механика и расчет сооружений. М. – №1– 2022 – с.37-46.

8. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости: монография / С. В. Босаков. – Брест : БрГТУ, 2006. – 107 с.

9. Соломин, В.И. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций // В.И. Соломин, С.Б. Шматков/ М., Стройиздат –1986. –208с.

10. Козунова, О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 2. Результаты расчета = Improvement of Calculation Technique for Flexible Orthotropic Plates on Elastic Base. Part 2. Calculation Results / О. В. Козунова // Наука и техника. – 2022. – № 4. – С. 290-296.

УДК 624.072

НЕЛИНЕЙНЫЙ РАСЧЕТ КЛИНОВИДНОГО ОСНОВАНИЯ ПОД БАЛОЧНОЙ ПЛИТОЙ С УЧЕТОМ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ В ЗОНЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

О.В. Козунова¹⁾, А.Г. Пусенков²⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет,

Минск, Беларусь, e-mail: kozunova@gmail.com

²⁾ ОАО «Гомельский ДСК»,

Гомель, Беларусь

Расчет упругого основания и балочной плиты с учетом сил сцепления в общем виде является чрезвычайно сложной биконтактной задачей.

Взаимодействие балочной плиты и упругого основания с учетом касательных напряжений в зоне контактного взаимодействия по сути является разновидностью контактных задач теории упругости, решение которой возможно в нелинейной постановке при работе упругих сред в зоне небольших упруго-пластических деформаций, то есть с учетом физической нелинейности.

Учет нелинейности деформирования балочной плиты позволяет увеличить, как правило, допустимую нагрузку на плиту за счет перераспределения и уменьшения максимальных значений усилий, но при этом обнаруживается резкое возрастание неравномерности осадок. Данные нелинейного расчета позволяют выполнить достоверную оценку работы конструкции по предельным состояниям эксплуатационной пригодности.

Для решения рассматриваемой задачи авторами применяется вариационно-разностный метод (ВРМ), который реализуется в перемещениях через конечно-разностные соотношения теории упругости при использовании в решении функционала полной потенциальной энергии деформации системы, состоящей из плиты, упругого основания и зоны контактного взаимодействия.

Предлагаемая методика статического расчета позволяет определить внутренние усилия в балочной плите и осадки упругого основания под плитой с учетом касательных

напряжений в контактной зоне, достаточно полно исследовать эту зону взаимодействия балочной плиты с упругим основанием, а также получить полную картину влияния касательных напряжений на напряженно-деформированное состояние упругого основания. Численная реализация ВРМ производится методом конечных разностей в вариационной постановке в программном пакете Mathematica.

Ключевые слова: балочная плита, упругое основание, клиновидное основание, силы сцепления.

Введение. Из-за разнообразия конструктивных решений балочных плит и грунтовых условий в настоящее время нет возможности дать строгое решение пространственной задачи. В связи с этим допускают использование приближенного решения, согласно которому влияние жесткости балочной плиты и реактивных касательных напряжений на расчетные величины плитного фундамента определяют строго в плоской постановке. Затем результаты такого расчета используют для приблизительной оценки влияния указанных факторов на результаты расчетов по действительной пространственной схеме, выполненных по существующим методам без учета этих факторов [1].

Взаимодействие балочной плиты и упругого основания ленточного фундамента с учетом касательных напряжений в зоне контактного взаимодействия по сути является разновидностью одной из контактных задач теории упругости [2], решение которой возможно в нелинейной постановке при работе упругих сред в зоне малых упруго-пластических деформаций по А.А. Илюшину.

Постановка задачи. Граничные условия. Балочная плита ленточных фундаментов мелкого заложения находится на упругом неоднородном (двухслойном) основании глубиной (толщиной) H с приложенной внешней нагрузкой $q(x)$ (рис. 1а). Параметры плиты: высота h , ширина $2l$, изгибная жесткость EJ , жесткость на растяжение EA .

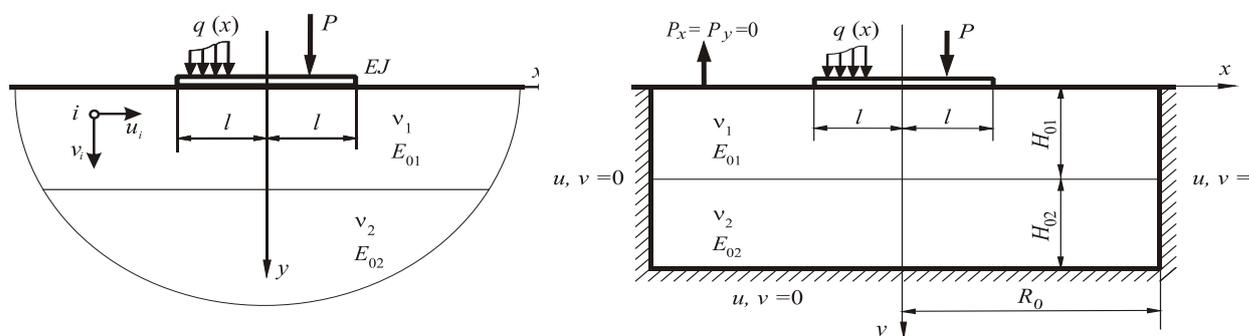


Рис. 1 Балочная плита на двухслойном основании:
 а) параметры плиты и упругого основания;
 б) расчетная область. Граничные условия задачи.

Для расчета балочных плит на упругом основании с учетом касательных напряжений в контактной зоне вводим следующие гипотезы и допущения:

1. гипотезы и допущения теории упругости, которые справедливы для рассчитываемой области упругого основания;
2. гипотезы плоского изгиба балки (плиты), справедливые для балочной плиты;
3. допущение о том, что при моделировании контактной зоны между балочной плитой и основанием могут возникать и растягивающие, и сжимающие напряжения. Кроме того, при моделировании учитываются силы трения, как и касательные напряжения в зоне контактного взаимодействия.

Рассматриваемая контактная задача замыкается кинематическими и статическими граничными условиями.

Кинематические граничные условия реализуются на границе принятой расчетной области и в контактной зоне (см. рисунок 1б), а именно:

на границе принятой расчетной области перемещения в направлении осей X и Y принимается равными нулю $u=0$ и $v=0$;

в контактной зоне справедливо равенство осадок основания прогибам плиты.

Статические граничные условия.

На рисунке 1б отражены статические граничные условия в усилиях вне контактной зоны, а именно $P_x = P_y = 0$.

Для крайних точек k балочной плиты вводятся статические граничные условия (см. формулу 2.29 [3])

$$Q^{(k)} \Big|_{x=\pm l} = -EJ \frac{d^3 y_k}{dx^3} = 0; \quad M^{(k)} \Big|_{x=\pm l} = -EJ \frac{d^2 y_k}{dx^2} = 0, \quad (1)$$

из условия свободного опирания балочной плиты на упругое полупространство.

Алгоритм решения нелинейной задачи ВРМ. Для решения рассматриваемой задачи авторами применяется вариационно-разностный метод (ВРМ) [4], который реализуется в перемещениях через конечно-разностные соотношения теории упругости (плоская деформация) при использовании в решении функционала полной потенциальной энергии деформации системы, состоящей из энергии изгиба плиты, энергии деформации упругого основания с учетом продольных сил в зоне контактного взаимодействия и работы внешней нагрузки.

Основание аппроксимируется разбивочной сеткой конечных размеров с постоянным шагом по осям (рис. 2).

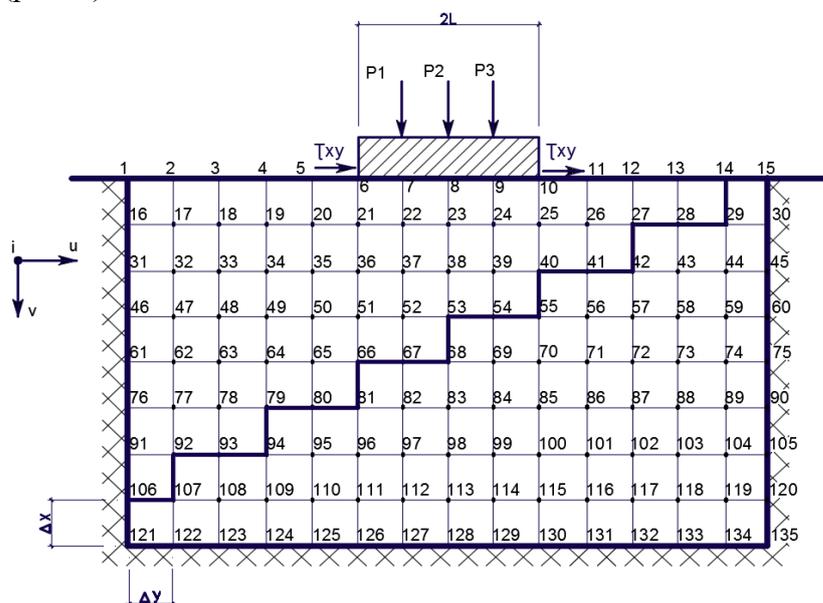


Рис. 2 Разбивочная сетка расчетной области

За неизвестные принимаем: $u_i(x,y)$, $v_i(x,y)$ – компоненты вектора перемещения i -той узловой точки основания, направленные вдоль осей X и Y соответственно; $p_y^{(i)}(x,y)$ – реактивные давления в зоне контакта балочной плиты с основанием.

Решение краевой задачи строится в перемещениях и реализуется методом конечных разностей, то есть заменой дифференциальных уравнений конечно-разностными соотношениями.

Рассматривается прямоугольная ячейка метода конечных разностей (рис.3)

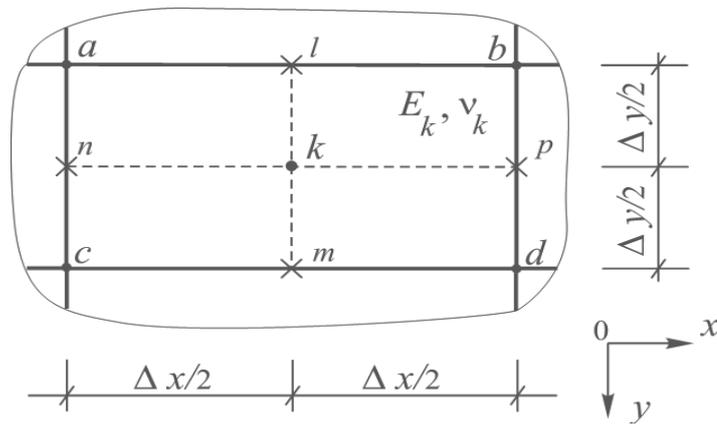


Рис. 3 Прямоугольная ячейка метода конечных разностей

Соотношение Коши в выражениях деформаций в точке k [3]

$$\varepsilon_x^{(k)} = \frac{\partial u_k}{\partial x} = \left(\frac{u_b + u_d}{2} - \frac{u_a + u_c}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{u_b + u_d - u_a - u_c}{2\Delta x}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_y^{(k)} = \frac{\partial v_k}{\partial y} = \left(\frac{v_c + v_d}{2} - \frac{v_a + v_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} = \frac{v_c + v_d - v_a - v_b}{2\Delta y};$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^{(k)} &= \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} = \left(\frac{u_c + u_d}{2} - \frac{u_a + u_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} + \left(\frac{v_b + v_d}{2} - \frac{v_a + v_c}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \\ &= \frac{u_c + u_d - u_a - u_b}{2\Delta y} + \frac{v_b + v_d - v_a - v_c}{2\Delta x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Энергия деформаций прямоугольной ячейки [3]

$$U_{i,j}^{(k)} = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \left[\frac{\nu_k}{1-2\nu_k} (\varepsilon_x^{(k)} + \varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_x^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)})^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^{(k)})^2 \right] \Delta x \Delta y. \quad (4)$$

Величина полной потенциальной энергии балочной плиты на упругом основании \mathcal{E} состоит из энергии изгиба плиты U , энергии деформации упругого основания A с учетом энергии продольных деформаций (сцепления) в контактной зоне плиты с основанием U_t и работы внешней нагрузки Π :

$$\mathcal{E} = U + A + \Pi. \quad (5)$$

Хотелось бы отметить, что при составлении соотношения полной энергии деформации упругого основания A в формуле (5), авторами был выполнен учет касательных напряжений в контактной зоне в дополнительном слагаемом: энергия продольных деформаций в контактной зоне плиты с основанием, то есть

$$A = U_f + U_t, \quad (6)$$

где U_f – энергия деформации упругого основания (плоская деформация) [3]; U_t – энергия продольных деформаций (сцепления) в контактной зоне плиты с основанием.

Энергия деформаций упругого основания

$$U_f = \sum_{j=1}^{MY-1} \left(\sum_{i=1}^{NX-1} U_{i,j}^{(k)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{MY-1} \left(\sum_{i=1}^{NX-1} \left(\frac{E_k}{1+\nu_k} \cdot \left[\frac{\nu_k}{1-2\nu_k} \cdot \left(\frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) + \frac{1}{2\Delta y} (v_c + v_d - v_a - v_b) \right)^2 + \left(\frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) \right)^2 + \left(\frac{1}{2\Delta y} (v_c + v_d - v_a - v_b) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\Delta y} (u_c + u_d - u_a - u_b) + \frac{1}{2\Delta x} (v_b + v_d - v_a - v_c) \right)^2 \right] \Delta x \Delta y \right) \right) \quad (7)$$

где NX – число узлов по оси X ; и MY – число узлов по оси Y .

Энергия продольных деформаций (сцепления) в контактной зоне плиты с основанием

$$U_t = \sum_{i=I+1}^{K1-1} EA_{i=I+1} \cdot \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right)^2 \Delta x. \quad (8)$$

Энергия изгиба балочной литы

$$U = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=I+1}^{K1-1} EJ_{i=I+1} \cdot \left(\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2} \right)^2 \quad (9)$$

Потенциал внешней нагрузки

$$\Pi = - \sum_{i=I+1}^{K1-1} q_i(x) v_i \Delta x \quad (10)$$

При составлении функционала энергии деформаций упругого основания (5) не учитывается работа сил собственного веса упругого основания. Дело в том, что силы собственного веса упругого основания уравновешены начальным напряженным состоянием уже в упругом основании, а работа самоуравновешенной системы сил на малых возможных перемещениях равна нулю. Это означает, что при поиске полного напряженного состояния рассматриваемой задачи необходимо на полученное решение наложить напряженное состояние от сил собственного веса основания.

Так как в состоянии статического равновесия функционал полной энергии \mathcal{E} должен иметь минимум, то неизвестные перемещения $u_i(x), v_i(y)$ найдем из условия обращения в нуль производных от полной энергии по каждому из перемещений, то есть

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (11)$$

где N – число узловых точек основания.

В результате получается система дифференциальных уравнений, порядок которой равен $2N$, то есть числу неизвестных перемещений.

Вначале решается задача в линейной постановке. По вычисленным значениям перемещений i -той узловой точки $u_i(x, y)$, $v_i(x, y)$, используя геометрические уравнения Коши и конечно-разностные соотношения (2, 3), определяется интенсивность деформаций и интенсивность напряжений в центрах ячеек (см. формулы теории упругости).

Имея значения напряжений и перемещений, полученных в результате решения задачи в первом приближении, определяется касательный или секущий модули деформации для каждой ячейки и задача решается во втором и последующих приближениях, с учетом изгибной жесткости балочной плиты.

Итерационный процесс заканчивается, как только разница между последующим и предыдущим приближением исследуемой функции будет соответствовать требуемой точности решения задачи.

Заключение. Предложенная авторами методика расчета системы балочной плиты с неоднородным упругим основанием вариационно-разностным методом с использованием конечно-разностных уравнений полной потенциальной энергии, позволяет определить внутренние усилия в балочной плите и осадки упругого основания под плитой, более полно исследовать эту зону биконтактного взаимодействия с учетом сил сцепления.

Учет физической нелинейности при деформировании балочной плиты на упругом основании позволяет увеличить, как правило, допустимую нагрузку на плиту за счет перераспределения и уменьшения максимальных значений усилий, но при этом обнаруживается резкое возрастание неравномерности осадок. Результаты нелинейного расчета позволяют выполнить достоверную оценку работы конструкции по предельным состояниям эксплуатационной пригодности.

Литература

1. Руководство по проектированию плитных фундаментов каркасных зданий и сооружений башенного типа. Разработано к СНиП II-15-74. М.: Стройиздат., 1984. – 265 с.
2. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности: уч. для строит. спец. вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2002. – 400 с.
3. Козунова, О. В. Статический анализ системы "балочная плита — нелинейно-упругое неоднородное основание" вариационно-разностным методом: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: специальность 05.23.17 Строительная механика / Козунова О.В., Минск – 2017 – 168 с.
4. Козунова, О. В. Особенности проектирования плитных фундаментов на многослойных основаниях со слабыми слоями грунтов / О. В. Козунова // Рекомендации по проектированию и устройству рациональных фундаментов на основаниях, сложенных озерно-ледниковыми и лессовидными грунтами : Р 5.01.056.09 : введ. 01.10.09. – Минск : Стройтехнорм, 2009. – Гл. 8. – С. 39–47.
5. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 127 с.
6. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М. : Стройиздат, 1984. – 631 с.
7. Федоровский, В. Г. Жесткий штамп на нелинейно-деформируемом связном основании (плоская задача) / В. Г. Федоровский, С. Е. Кагановская // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1975. – № 1. – с. 41–44.