ЛИТЕРАТУРА

1. Лустенков М.Е. Эллипсоидные шариковые передачи: недостатки и преимущества // Приводная техника. — 2003. — №3(43). — С.20–22. 2. Лустенков М.Е. Ключ для демонтажа ведущих колес грузовых автомобилей ЗИЛ и ГАЗ // Автомобильная промышленность. — 2003. — №5. — С.24–25. 3. Скойбеда А.Т. Детали машин и основы конструирования: Учеб. / А.Т. Скойбеда, А.В. Кузьмин, Н.Н. Макейчик; Под общ. ред. А.Т.Скойбеды. — Мн.: Высш. шк., 2000. — 584 с.

УДК 621.941

М.Л. Протасеня, Л.В. Ларченков

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО КОНУСУ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Прямой усеченный круговой конус (рис. 1) высотой **H** и радиусами оснований: нижнего — **r** и верхнего — **R** развернем в плоскость, проходящую через образующую **AB,** которая представляет из себя сектор **OBB′**, дуга **BB′,** которого является длиной окружности **2πR.** Радиус сектора — **OB**, центральный угол — $\gamma = 2\pi R/OA$.

Из точки **A** построим спираль Архимеда и снова свернем сектор в конус. Получим на поверхности конуса винтовую линияю. Расстояние **AB=L** между двумя точками винтовой линии, расположенными на пересечении ее с этой образующей, — шаг винтовой линии. Отношение $L/2\pi = p$ — **параметр** винтовой линии.

Из этого определения следует, что расстояние **S** между проекциями точек M и M_1 винтовой линии на горизонтальной плоскости xo_1y пропорционально углу ωt между радиусами, проведенными через точки проекций и точку o_1, а также отношение **S** к ωt равно параметру винтовой линии: $S/\omega t = p = L/2\pi$. Проекции точек винтовой линии на горизонтальную плоскость также образуют спираль Архимеда. При движении точки за каждый последующий относительно малый промежуток времени Δt длина пройденного пути становится больше.

Траекторию движения точки можно записать в виде уравнений:

$$x = \rho_i \cos \omega t; \quad y = \rho_i \sin\omega t; \quad z = p\omega t,$$

где ρ_i — переменный радиус окружностей при изменении времени t; t — текущая координата времени.

Постоянными величинами являются только ρ и ω.

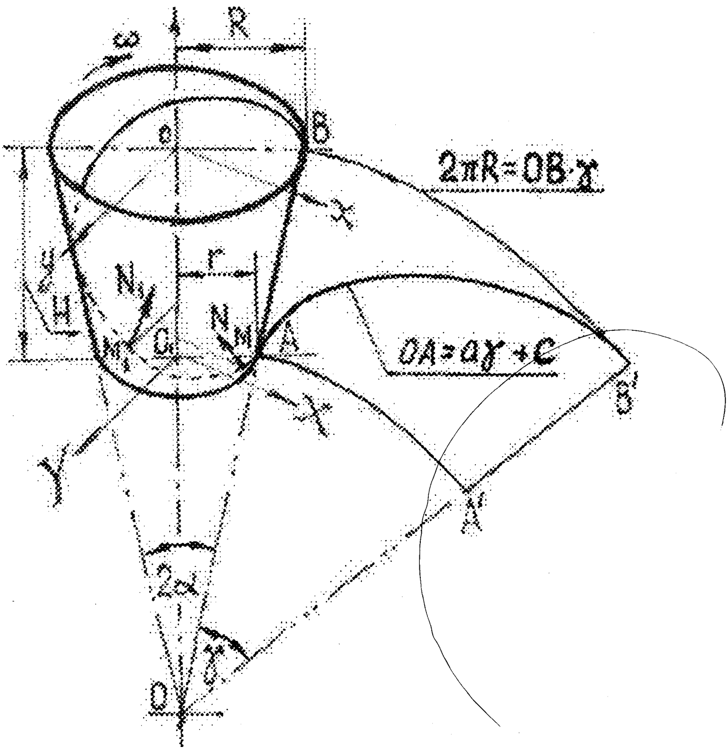

Рис. 1.

Возводя почленно первые два уравнения в квадрат и складывая, получим: $x^2 + y^2 = \rho_i^2$. Так как величина ρ_i является пременной, то траектория движения точки лежит на круговом конусе, ось его совпадает с осью oZ.

Найдем проекции скорости и ускорения точек. Дифференцируя уравнения движения по времени, получим: $v_x = -\rho_i\omega \sin \omega t$; $v_y = \rho_i\omega \cos \omega t$; $v_z = \omega p$. Скорость движения точки выразится как $v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{0,5} = \omega(\rho_i^2 + p^2)^{0,5}$.

Дифференцируя составляющие уравнений скорости по времени, получим значения ускорений: $a_x = -\rho_i\omega^2 \cos \omega t$; $a_y = -\rho_i\omega^2 \sin \omega t$; $a_z = 0$. Откуда ускорение точки будет: $a = (a_x^2 + a_y^2)^{0,5} = \rho_i\omega^2$.

Скорость точки направлена по касательной к траектории движения ее по конической поверхности. При каждом обороте угол наклона касательной к оси конуса увеличивается. На рис.2 представлен график изменения угла наклона касательной (скорости) в зависимости от оборотов. Но т.к. скорость точки изменяется еще по модулю, то ее касательное ускорение не может быть равным нулю, поэтому определим только мгновенные скорости в средней части конуса и в крайних точках **A** и **B.** На материальную точку действуют: сила тяжести **F** и нормальная сила реакции внутренней поверхности конуса **N.** Исходя из этих условий находим:

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_r^2\,\mathbf{tg\alpha/g} \quad \text{и} \quad \mathbf{R} = \mathbf{v}_R^2\,\mathbf{tg\alpha/g},$$

откуда находим скорости движения

$$\mathbf{v}_r^2 = \mathbf{gr/tg\alpha} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_R^2 = \mathbf{gR/tg\alpha}.$$

В данном случае точка движется принудительно и за один оборот (шаг) скорость точки возрастет за счет увеличения радиуса.

Для решения задачи примем $\rho_i = \rho_{ср} = 1/2(R+\rho)$, тогда модуль скорости можно выразить через среднее значение радиуса и будет иметь мгновенное значение: $v_{ср} = \omega(\rho_{ср}^2+p^2)$. В этом случае полное ускорение, равное по модулю $a = \rho_{ср}\omega^2$, будет только нормальным ускорением, определяемым по формуле: $a = a_n = v_{ср}/\rho_т$, где $\rho_т$ — радиус кривизны винтовой линии. И он определяется $\rho_т = v_{ср}/a_n = \omega^2(\rho_{ср}^2+p^2)/\rho_{ср}\omega^2 = \rho_{ср}+p^2/\rho_{ср}$.

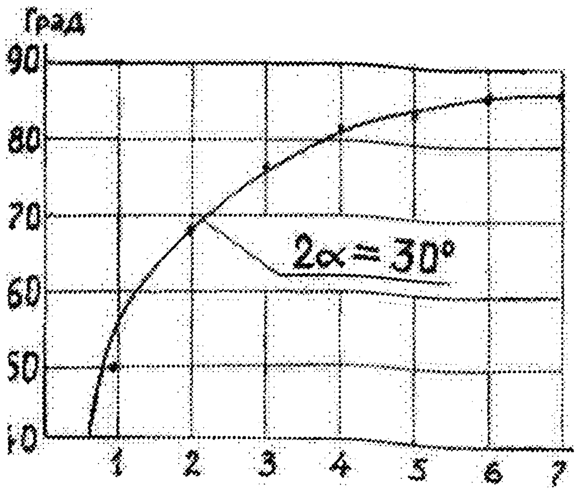

Рис. 2.

Теперь определим реакции в средней части конуса и крайних точках:

$$N_{ср} = ma_п = mv_{ср}^2/\rho_т = m[\omega^2(\rho_{ср}^2+p^2)\rho_{ср}]/(\rho_{ср}^2+p^2) = m\rho_{ср}\omega^2 = 1/2(R+r)m\omega^2;$$

$$N_R = m\omega^2(r+2Htga)\ ; \quad N_r = mr\omega^2.$$

Из анализа этих формул следует, что существует прямая пропорционалльная зависимость нормальных сил от изменения радиуса, если силы трения не являются движущими.

Если же имеем дело с телом переменной массы движущейся за счет сил трения, траектория такого движения будет иметь другой вид. К числу проблем современной механики относятся задачи теории колебаний, динамики твердого тела, теории устойчивости движения, а также механики тел переменной массы.

Во всех областях механики все большее значение приобретают задачи, в которых вместо **детерминированных,** т.е. заранее известных величин, например, действующих сил или законов движения отделных частей. приходится рассматривать **вероятностные** величины, т.е. величины для которых известна лишь вероятность того, что они могут иметь те или иные значения или их не иметь.

К числу вероятностных величин относится **сплошная изменяемая среда.** Это понятие применимо, когда при изучении движения изменяемой среды (жидкость или псевдожидкость) можно пренебречь мелекулярной структурой среды. К этой задаче не применимы известные принципы Д′ Аламбера, Д′ Аламбера — Лагранжа и уравнения Лагранжа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Учебное пособие для ВТУзов. В 3-х т. Т.!!., динамика — М., Наука, 1991, — 640с. 2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. — М., Высшая школа, 2001, — 380с. 3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. — М., Наука, 1969, — 298с.