УДК 534.211

С.В. Корчеменко

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДЕФЕКТНЫХ СТРУКТУР МАТЕРИАЛА АКУСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Военная академия Республики Беларусь
Минск, Беларусь

Обратная задача рассеяния, состоящая в восстановлении внутренней структуры объекта, исследуемого посредством зондирования его волновыми полями, является нелинейной некорректной задачей [1, 2]. Это сочетание свойств усложняет и вместе с тем делает актуальным анализ возможностей ее устойчивого и единственного решения. Некорректность задачи естественным образом приводит к неустойчивости решения. Метод статистического обращения [1, 2] позволяет находить устойчивое решение обратной задачи, строится оператор обращения, с помощью которого по наблюдениям детерминированных флуктуаций волнового поля можно восстановить структуру конкретной реализации среды, используя информацию о ее интегральных свойствах.

Пусть R_3 — неограниченная однородная среда, находящаяся в покое и характеризующаяся постоянными c_0 (акустическая скорость), ρ_0 — плотность, причем

$$c_0 = \frac{\omega^2}{\kappa_0^2},$$

где κ_0 — волновое число.

В R_3 содержится неоднородная конечная область V, которая находится в покое и характеризуется полями материальных коэффициентов $c(\boldsymbol{r})$, $\rho(\boldsymbol{r})$, которые по границе S объема V плавно переходят в c_0, ρ_0, где $c(\boldsymbol{r})|_S = c_0$, $\rho(\boldsymbol{r})|_S = \rho_0$. Обозначим через Q область, в которой расположены излучатели волн (передающие антенны), через P — область, в которой производится наблюдение волновых полей, рассеянных на неоднородной области V. В общем случае $Q \cap V = \emptyset$, $Q \cup V = \emptyset$, $P \cap V = \emptyset$, $Q \cap P = \emptyset$. В случае моно статической схемы акустического зондирования $Q = P$.

При распространении упругих волн в изотропной однородной среде потенциалы продольной и поперечной гармонических волн удовлетворяют уравнениям Гельмгольца. В неоднородной среде в общем случае провести расщепление динамических уравнений теории упругости не удается. Определенные достижения здесь имеются для коротких волн [3]. Предположим, что в упругой изотропной среде имеется неоднородное включение объема V с жидкоподобными свойствами.

Обозначим $f_0(x)$ функцию распределения излучателей в области Q. Давление в акустической волне $p(r)$ удовлетворяет уравнению [4]

$$\Delta p(x)+\frac{\omega^2}{c_0^2}p(x)=f_0(x),\quad x\in R, \tag{1}$$

$$\Delta p(r)+\frac{\omega^2}{c^2(r)}p(r)=f_0(r)+\frac{\nabla\rho(r)}{\rho(r)}\ \nabla p(r),\quad r\in V. \tag{2}$$

Проведем замены полевых величин в (2) [5]

$$\frac{1}{c_0^2}-\frac{1}{c^2(r)}=h(x),\quad \eta(r)=ln\left(\frac{\rho(r)}{\rho_0}\right), \tag{3}$$

$$c(r)=\frac{c_0}{\sqrt{1-h(r)c_0^2}},\quad n(r)=\omega^2 h(r),\quad \rho(r)=\rho_0\ \exp(\eta(r)).$$

Подстановка (3) в (2) приводит к

$$\Delta p(r)+k_0^2 p(r)=n(r)p(r)+\nabla\eta(r)\bullet\nabla p(r)+f_0(r). \tag{4}$$

При формулировке обратной задачи рассеяния считаются известными $f_0(r)$ при $r\in Q$, $p(r)$ при $r\in P$, а искомыми $n(r)$ и $\eta(r)$ при $r\in V$.

Правая часть уравнения (4) определяет источник первичного поля $f_0(r)$ и вторичного поля, рассеянного по области V неоднородностями $n(r)$, $\eta(r)$.

Обычно относительные изменения плотности среды меньше, чем относительные флуктуации скорости распространения волн в среде, поэтому в первом приближении положим $\rho(r)=\rho_0$ эквивалентно интегральному уравнению

$$p(x)=p_0(x)+\int_V G(x-r)\ \ n(r)p(r)dr\quad \forall\ \ x\in R_3, \tag{5}$$

где $p_0(x)=\int_Q G(x-r)\ \ f_0(r)dr$ — первичное облучающее поле. Поле $p(x)$ измеряется в области P, а в области V должно находиться из уравнений (4) или (5).

Уравнение, на основе которого решается обратная задача, имеет вид

$$p(y)=p_0(y)+\int_V G(y-r)\ \ n(r)p(r)dr,\quad y\in P,\quad r\in V, \tag{6}$$

а волновое поле $p(r)$ в области V удовлетворяет уравнению

$$p(\boldsymbol{r}) = p_0(\boldsymbol{r}) + \int_V G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\ n(\boldsymbol{r}_1)p(\boldsymbol{r}_1)d\boldsymbol{r}_1, \quad \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}_1 \in V. \tag{7}$$

Нахождение $p(\boldsymbol{r})$ из уравнения (7) представляет собой прямую задачу рассеяния первичного поля $p_0(\boldsymbol{x})$ на неоднородном объеме V.

Процессы излучения, рассеяния и приема опишем с помощью операторов $\hat{Q},\ \hat{S},\ \hat{P}$ $p_0(\boldsymbol{r}) = \hat{Q}\ f_0(\boldsymbol{x}) = \int_Q G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x})\ f_0(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{r} \in V, \quad \boldsymbol{x} \in Q$.

Оператор $\hat{Q}$ отображает излучаемое поле $f_0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in Q$ в первичное поле в $p(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} \in V$ области рассеяния V или в области наблюдения P, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y} \in P$.

Оператор $\hat{S}$ определяет рассеяние и перерассеяние волнового поля в области V

$$\tilde{p}(\boldsymbol{r}) = \hat{S}\ \phi(\boldsymbol{r}) = \int_V G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\ \phi(\boldsymbol{r}_1)d\boldsymbol{r}_1, \quad \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}_1 \in V, \tag{8}$$

где $\phi(\boldsymbol{r}) = n(\boldsymbol{r})p_0(\boldsymbol{r})$; $\tilde{p}(\boldsymbol{r}) = p(\boldsymbol{r})p_0$.

Оператор $\hat{P}$ отображает поле, рассеянное на неоднородностях $n(\boldsymbol{r})$ объема V в поле, наблюдаемое в области P

$$\tilde{p}(\boldsymbol{y}) = \hat{P}\ \phi(\boldsymbol{r}) = \int_V G(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{r})\ \phi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r} \in V, \quad \boldsymbol{y} \in P. \tag{9}$$

Введение операторов $\hat{Q},\ \hat{S},\ \hat{P}$ позволяет использовать символическую операторную запись, не указывая в явном виде соответствующие аргументы.

Запишем уравнения (6) и (7) обратной и прямой задач в виде

$$p - p_0 = \hat{P}np, \tag{10}$$

$$p - p_0 = \hat{S}np. \tag{11}$$

При изменении характера излучения изменяется только оператор $\hat{Q}$, при изменении характера наблюдения — только оператор $\hat{P}$. Изменение частоты зондирования вызывает изменение операторов $\hat{Q},\ \hat{S},\ \hat{P}$.

Рассмотрим решение прямой задачи — уравнения (11) в операторном виде с учетом многократного рассеяния

$$p = \left[E - \hat{S}n\right]^{-1} p_0, \tag{12}$$

где E — тождественный оператор.

Подставляя (12) в (10), получим выражение для рассеянного поля в области приема P

$$\tilde{p} = \hat{P}\left[E - n\hat{S}\right]^{-1} np_0 . \qquad (13)$$

Получим другое представление для рассеянного поля в области наблюдения. Умножим (11) слева на $n(\boldsymbol{r})$

$$np - np_0 = n\hat{S}np . \qquad (14)$$

Переход от уравнений (6), (7) к уравнениям (12), (13) накладывает определенные ограничения на свойства параметра $c(\boldsymbol{r})$ рассеивающей среды.

Рассмотрим представление рассеянного поля в виде ряда рассеяния Борна-Неймана

$$p = p_0 + \hat{P}np_0 + \hat{P}n\hat{S}np_0 + \ldots + \hat{P}n\left(\hat{S}n\right)^{m-1} p_0 + \hat{P}n\left(\hat{S}n\right)^{m} p_0 + \ldots \qquad (15)$$

При $\left\|\hat{S}n\right\| < 1$ найдем сумму ряда

$$p = \hat{P}n\left[E + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\hat{S}n\right)^{m}\right]p_0 . \qquad (16)$$

Или

$$p = \hat{P}\left[E + \sum_{m=1}^{\infty}\left(n\hat{S}\right)^{m}\right]np_0 . \qquad (17)$$

В рядах (16), (17) Борна-Неймана m-й член ряда учитывает m-кратно рассеянную в области V волну. При идентификации рассеивающей среды представление решения в виде ряда Борна-Неймана позволяет структурировать рассеянное поле. Кроме того, условие сходимости $\left\|\hat{S}n\right\| < 1$ ряда (16) и $\left\|n\hat{S}\right\| < 1$ ряда (17) позволяют провести предварительную классификацию неоднородности объема V по величине отклонения $\left(c(\boldsymbol{r}) - c_0\right)c(\boldsymbol{r})^{-1} = \delta$ l по масштабу неоднородности a относительно длины волны l: $m=al^{-1}$.

Различают короткие волны $al^{-1}>>1$, средние $al^{-1} \approx 1$, длинные волны $al^{-1} << 1$. Слабонеоднородные среды $\delta << 1$, средненеоднородные $\delta \approx 1$, сильнонеоднородные среды $\delta >> 1$.

Для слабонеоднородной среды в ряде Борна-Неймана ограничиваются приближением однократно рассеянной волны [6]

$$\tilde{p}(y) = \hat{P}np_0 \cdot \qquad (18)$$

Уравнение (18) является уравнением Фредгольма 1-го рода, поэтому восстановление $n(\boldsymbol{r})$ на его основе является некорректной задачей.

Изменение однократно рассеянного поля в левой части уравнения (18) проводится на фоне многократно рассеянного поля и ошибок измерений. Представим (18) в виде

$$\tilde{p}(\boldsymbol{y}) = \hat{P}\phi(\boldsymbol{r}) + \partial(\boldsymbol{y}), \quad \phi(\boldsymbol{r}) = n(\boldsymbol{r})p_0(\boldsymbol{r}), \tag{19}$$

где $\partial(\boldsymbol{y})$ представляет собой ошибку измерения, которая на множестве измерений является случайной функцией. Применяя преобразование Фурье к (19), получим

$$\tilde{p}(\boldsymbol{q}) = G(\boldsymbol{q})\phi(\boldsymbol{q}) + \partial(\boldsymbol{q}), \tag{20}$$

где $\tilde{p}(\boldsymbol{q}),\ G(\boldsymbol{q}),\ \phi(\boldsymbol{q}),\ \partial(\boldsymbol{q})$ — спектры функций $\tilde{p}(\boldsymbol{y}),\ G(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{r}),\ \phi(\boldsymbol{r}),\ \partial(\boldsymbol{y})$.

Постановка задачи обращения. Требуется найти оператор обращения $\hat{M}$ такой, чтобы отображение $\hat{M}\tilde{p}$ было как можно ближе к искомой функции $\phi(\boldsymbol{y})$.

Найдем спектр $M(\boldsymbol{q})$ оператора обращения так, чтобы

$$\left\langle \left| M(\boldsymbol{q})p(\boldsymbol{q}) - \phi(\boldsymbol{q}) \right|^2 A \right\rangle = \min, \tag{21}$$

где A — произвольная константа.

Предположим $\langle\partial\rangle = 0, \langle\phi\rangle = 0, \langle\tilde{p}\rangle = 0$. Из условия (21) с учетом предположения получаем

$$M(q) = \bar{R}_{p\phi}(q)\left(\bar{R}_{pp}(q)\right)^{-1}, \tag{22}$$

где $R_{p\phi}(q),\ R_{pp}(q)$ — спектральные плотности корреляционных функций $R_{p\phi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1);\ R_{pp}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_1)$, чертой обозначается величина, комплексно-сопряженная

$$\bar{R}_{\bar{p}\bar{\phi}} = \overline{\left\langle \tilde{p}\bar{\phi} \right\rangle} = \left\langle \phi \quad \bar{\tilde{p}} \right\rangle = \left\langle \phi\left(\overline{G\phi + \partial}\right) \right\rangle = R_{\phi\bar{\phi}}\bar{G} + R_{\phi\bar{\partial}}, \tag{23}$$

$$R_{p\bar{p}} = \left\langle (G\phi + \partial)\left(\overline{G\phi + \partial}\right) \right\rangle = GR_{\phi\bar{\phi}}\bar{G} + R_{\partial\bar{\phi}}\bar{G} + GR_{\phi\bar{\partial}} + R_{\partial\bar{\partial}}, \tag{24}$$

где $R_{\phi\bar{\partial}} = \left\langle \phi\bar{\partial} \right\rangle;\ R_{\partial\bar{\phi}} = \left\langle \partial\bar{\phi} \right\rangle = \bar{R}_{\phi\bar{\partial}};\ R_{\partial\bar{\partial}} = \left\langle \partial\bar{\partial} \right\rangle$.

Подстановка (23) и (24) в (22) приводит к $\phi(q) = M(q)\tilde{p}(q)$, где

$$M(q) = \left(R_{\phi\bar{\phi}}\bar{G} + R_{\phi\bar{\partial}}\right)\left(GR_{\phi\bar{\phi}}\bar{G} + \bar{R}_{\phi\bar{\partial}}\bar{G} + GR_{\phi\bar{\partial}} + R_{\partial\bar{\partial}}\right)^{-1}.$$

Если ошибки измерения ∂ и ϕ независимы, то $R_{\phi\bar{\partial}} = 0$ и $M(q)$ примет вид

$$M(q) = \left(R_{\phi\bar{\phi}}\bar{G}\right)\left(GR_{\phi\bar{\phi}}\bar{G} + R_{\partial\bar{\partial}}\right)^{-1}. \qquad (25)$$

Применяя к $\phi(q) = M(q)\tilde{p}(q)$ обратное преобразование Фурье, получим искомое поле

$$\phi(r) = \int_P M(r-y)\tilde{p}(y)dy. \qquad (26)$$

Ядро $M(r-y)$ интегрального оператора $\hat{M}$ находится с помощью обратного преобразования Фурье из формулы (25). Как следует из (25), для нахождения $M(q)$ необходимо знать $R_{\phi\bar{\phi}}$, $R_{\partial\bar{\partial}}$, т.е. иметь информацию о корреляционной функции $R_{\phi\bar{\phi}}$ или спектральной плотности $R_{\phi\bar{\phi}}(q)$ реконструируемой функции ϕ и корреляционной функции $R_{\partial\bar{\partial}}$ (или $R_{\partial\bar{\partial}}(q)$) ошибки измерения.

Алгоритм нахождения $\phi(r)$ по формуле (26) дает решение, устойчивое по отношению к малым погрешностям измерений.

Обозначим через $\Delta\partial$ относительную ошибку определения функции (спектра) $\Delta\phi = |\partial\phi||\phi|^{-1}$. норма оператора $\hat{M}$ или $|M(q)|$ значительно меньше нормы $\hat{M}^{-1}$ или $|M(q)|^{-1}$, поэтому максимальная ошибка $\Delta_{\max}F$ в определении ϕ или $n(r)$ имеет порядок $\Delta\partial$, т.к. связь между $\Delta_{\max}F$ и $\Delta\partial$ имеет вид

$$\Delta_{\max}F = |G(q)||M(q)|\Delta\partial. \qquad (27)$$

Доказательство устойчивости решения следует из пропорциональности связи (27) между $\Delta_{\max}F$ и $\Delta\partial$.

Как правило, корреляционная функция (спектральная плотность) $R_{\partial\partial}$ известна априори. В некоторых задачах также заранее может быть известна корреляционная функция (спектральная плотность) $R_{\phi\bar{\phi}}$, однако в большинстве случаев $R_{\phi\bar{\phi}}$ (или $R_{n\bar{n}}$) необходимо находить на основании измерений.

Уравнение, которому удовлетворяет корреляционная функция $R_{p\bar{p}}(y_1, y_2) = \langle\tilde{p}(y_1)\bar{\tilde{p}}(y_2)\rangle$ находится на основе уравнения (18) с учетом $\langle\partial\rangle = 0$, $\langle\phi\rangle = 0$, $\langle\tilde{p}\rangle = 0$ и имеет вид

$$R_{p\bar{p}}(y_1, y_2) = \hat{P}\hat{\bar{P}}R_{\phi\bar{\phi}}(r_1, r_2). \qquad (28)$$

Задача определения $R_{\phi\bar{\phi}}$ из уравнения (28) по измеренной корреляционной функции $R_{p\bar{p}}(y_1, y_2)$ является некорректной. Устойчивое решение уравнения (28) может быть получено методом статистического обращения аналогично тому, как это было выполнено выше. Однако в этом случае для получения устойчивого решения $R_{\phi\bar{\phi}}$ потребуется информация о моментах функции

ϕ четвертого порядка. Для моментов четвертого порядка получим уравнение типа (28), для получения устойчивого решения которого требуется знать моменты более высокого порядка.

Рассмотрим способ определения $R_{\phi\bar{\phi}}$ в рамках модели эффективной среды. В этом случае не требуется знание моментов более высокого порядка. Такие параметры волны, как затухание (рассеяние), дисперсия скорости, зависят от интегральных свойств рассеивающей среды, в частности, от корреляционной функции неоднородности $R_{\phi\bar{\phi}}$ (или $R_{n\bar{n}}$). Коэффициент затухания, дисперсия скорости волны измеряются при наблюдении волнового поля $p(y)$. Наблюдения проводятся комплексно. Вычисляются макро- и микроструктурные параметры волны, несущие информацию соответственно о макро- и микроструктурных параметрах рассеивающей среды.

Первое приближение метода осреднения $\langle p\rangle$, описывающее поле в эффективной среде, удовлетворяет уравнению

$$\Delta\langle p\rangle+\kappa_0^2\langle p\rangle=\hat{n}^*\langle p\rangle, \tag{29}$$

где $\hat{n}^*$ — эффективный интегральный оператор, вычисленный с учетом многократного рассеяния.

Предположим, что зондируемое поле $k^2(\boldsymbol{r})=\omega^2c^{-2}(\boldsymbol{r})$ статистически изотропное и однородное. В этом случае оператор $\hat{n}^*$ представляет собой интегральный оператор с разностным ядром

$$\hat{n}^*\Psi=\int n^*(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\Psi(\boldsymbol{r}_1)d\boldsymbol{r}_1\,. \tag{30}$$

Собственными функциями оператора $\hat{n}^*$ являются функции e^{iqr}. Дисперсионное уравнение, соответствующее (29), имеет вид

$$q^2=k_0^2-n^*(q), \tag{31}$$

где $q=k+i\delta$; $n^*(q)$ — спектр эффективного интегрального оператора $\hat{n}^*$, ядро которого имеет вид

$$n^*(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)R_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1), \tag{32}$$

где $R_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)$ — корреляционная функция реконструируемой функции $n(\boldsymbol{r})$; $G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)$ — функция Грина однородной среды с параметрами c_0, φ_0. Ядро $n^*(\mathbf{z})$ вычисляется по известному спектру $n^*(q)$:

$$n^*(\mathbf{z})=\frac{1}{(8\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}n^*(\boldsymbol{q})\ \ exp(i\boldsymbol{q}\mathbf{z})d\boldsymbol{q},\quad \mathbf{z}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1. \tag{33}$$

Из эксперимента определяется коэффициент затухания (рассеяния) $\delta(\omega)=\langle u\rangle u_0^{-1}$.

По измерению фазовой $c_f = \dfrac{\omega}{k(\omega)}$ или групповой $c_g = \left(\dfrac{dk}{d\omega}\right)^{-1}$ скоростей находится $\mathrm{Re}_\psi\, q = k(\omega)$ в формуле (31).

Подставляя найденные выражения для $q = k(\omega) + i_\psi\, \delta(\omega)$ в (31) определяем $n^*(q)$, а затем по формуле (33) находим ядро $n^*(\mathbf{z})$. Далее из формулы (32) определяем $R_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)$.

Таким образом, на основе измерения рассеянного поля проводится идентификация интегральных и локальных параметров структуры неоднородной среды. Последовательное решение задачи реконструкции параметров структуры среды проводится по схеме, описанной выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Franklin J.N. // J. Math. Anal. Appl. — 1970. — V. 31. — P. 682–691. 2. Исимару А. распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. — М.: Мир, 1981. — Т. 2. — 317 с. 3. Мухина И.В. Приближенное сведение к уравнениям Гельмгольца уравнения теории упругости и электродинамики для неоднородных сред. // ПММ. — 1972. — Т. 36, №4. — С. 667–671. 4. Исакович М.А. Общая акустика. — М.: Наука, 1973. — 496 с. 5. Stone W. Ross. The inverse medium (or inhomogeneous medium remote probing) problem and a closed-form inverse scattering solution to the medium synthesis problem // Radio Science. — 1981. — V.16, № 6. — P. 1029–1035. 6. Keys R.G., Weglein A.B. Generalized linear inversion and the first Born theory for acoustic media // J. Math. Phys. — 1983. — V.24, № 6. — P. 1444–1449.

УДК 629.3.027

И.Е. Кракова

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОЛЬЦА ПРИ КАЧЕНИИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Белорусский государственный университет транспорта
Гомель, Беларусь

Автомобильная шина является основным звеном, связывающим автомобиль с дорожной поверхностью. Поэтому от технических характеристик шин существенно зависят динамические качества колесных транспортных