

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-91-95>

УДК 629.7

## Форсированное управление квадрокоптером

Асп. Гу Пэнхао<sup>1)</sup>, канд. техн. наук Ю. А. Леоновец<sup>2)</sup>,  
докт. техн. наук, проф. А. А. Лобатый<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь),

<sup>2)</sup>Китайско-Белорусское ЗАО «Авиационные технологии и комплексы» (Китайско-Белорусский  
индустриальный парк «Великий камень», Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2023  
Belarusian National Technical University, 2023

**Реферат.** Решается задача аналитического синтеза управляющего ускорения беспилотного летательного аппарата (БЛА) мультироторного типа применительно к легкому квадрокоптеру с высокой продолжительностью полета. Аналитически определяется оптимальное управление при заданном минимизируемом функционале качества в виде минимального времени, необходимого для перевода БЛА из заданного начального в заданное конечное положение в пространстве. Рассматривается математическая модель движения центра масс БЛА в заданной плоскости относительно земной поверхности. Особенностью предлагаемой методики является решение задачи максимального быстродействия (форсированного управления) на основе рассмотрения законов кинематики равноускоренного движения твердого тела. При заданных характеристиках максимально допустимых значений скорости и управляющего ускорения БЛА аналитически вычисляются моменты переключения управляющего сигнала, которые могут быть реализованы в автопилоте БЛА. Это позволяет в отличие от классических методов решения задачи форсированного управления избавиться от необходимости решения двухточечной краевой задачи и рассмотрения дополнительных условий трансверсальности. Проведенное компьютерное моделирование полученных аналитических результатов в виде процессов изменения управляющего ускорения, а также параметров движения БЛА показало работоспособность предлагаемой методики и перспективность ее использования на первоначальном этапе синтеза системы управления БЛА.

**Ключевые слова:** беспилотный летательный аппарат, квадрокоптер, максимальное быстродействие, форсированное управление, ускорение, математическое моделирование

**Для цитирования:** Пэнхао, Гу. Форсированное управление квадрокоптером / Гу Пэнхао, Ю. А. Леоновец, А. А. Лобатый // *Наука и техника*. 2023. Т. 22, № 2. С. 91–95. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-91-95>

## Forced Quadcopter Control

Gu Penghao<sup>1)</sup>, J. A. Leonovets<sup>2)</sup>, A. A. Lobaty<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus),

<sup>2)</sup>Chinese-Belarusian CJSC “Aviation Technologies and Complexes” (China-Belarus Great Stone Industrial Park, Republic of Belarus)

**Abstract.** The problem of analytical synthesis of the control acceleration of an unmanned aerial vehicle (UAV) of a multirotor type is being solved in relation to a light quadcopter with a high flight duration. The optimal control is analytically determined for a given minimized quality functional in the form of the minimum time required to transfer the UAV from

---

### Адрес для переписки

Лобатый Александр Александрович  
Белорусский национальный технический университет  
просп. Независимости, 65/11,  
220013, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 29 346-82-56  
lobaty@bntu.by

### Address for correspondence

Lobaty Alexander A.  
Belarusian National Technical University  
65/11, Nezavisimosty Ave.,  
220013, Minsk, Republic of Belarus  
Tel.: +375 29 346-82-56  
lobaty@bntu.by

a given initial to a given final position in space. A mathematical model of the movement of the UAV mass center in a given plane relative to the earth's surface is considered. A feature of the proposed technique is the solution of the problem of maximum speed (forced control) based on the consideration of the laws of kinematics of uniformly accelerated motion of a rigid body. For given characteristics of the maximum allowable speed and control acceleration of the UAV, the moments of switching of the control signal are analytically calculated, which can be implemented in the UAV autopilot. This allows, in contrast to classical methods for solving the problem of forced control, to get rid of the need to solve a two-point boundary value problem and consider additional transversality conditions. The computer simulation of the obtained analytical results in the form of processes of changing the control acceleration, as well as the UAV motion parameters, has shown the efficiency of the proposed technique and the prospects for its use at the initial stage of the synthesis of the UAV control system.

**Keywords:** unmanned aerial vehicle, quadcopter, maximum performance, forced control, acceleration, mathematical modeling

**For citation:** Penghao Gu, Leonovets J. A., Lobaty A. A. (2023) Forced Quadcopter Control. *Science and Technique*. 22 (2). 91–95. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-91-95> (in Russian)

## Введение

Беспилотные летательные аппараты (БЛА) применяются в различных областях человеческой деятельности: от развлекательных игр до боевых систем военного назначения. Среди широкого круга БЛА различного назначения особое место занимают квадрокоптеры, представляющие летательные аппараты с четырьмя несущими винтами. Изменение направления движения квадрокоптера осуществляется путем изменения скорости вращения винтов [1]. Для перевода БЛА из одной точки воздушного пространства в другую заданную точку необходимо им управлять. Управление летательного аппарата в общем случае является изменение по величине и направлению его вектора скорости, приложенного к центру масс БЛА [2].

В зависимости от предназначения БЛА существуют различные способы формирования оптимальной траектории (оптимального закона управления) БЛА. Значительный класс БЛА предназначен для мониторинга объектов, находящихся на земной поверхности. К таким системам относится беспилотный авиационный комплекс (БАК) А10-Х1, представляющий собой легкий портативный квадрокоптер с высокой продолжительностью полета, применяемый для высотной разведки, мониторинга и аэросъемки, сопровождения в любое время суток (рис. 1).



Рис. 1. Квадрокоптер А10-Х1  
Fig. 1. Quadcopter А10-Х1

Беспилотный летательный аппарат в составе БАК А10-Х1 представляет собой легкий портативный квадрокоптер с высокой продолжительностью полета. Области его применения: высотная разведка, мониторинг, аэросъемка и т. д. БЛА А10-Х1 может оснащаться совмещенной целевой нагрузкой с ТВ-камерой, ИК-камерой и лазерным дальномером, а также высотной разведывательной платформой [3].

Для оперативного наблюдения за наземными объектами такой БЛА должен перемещаться в пространстве с максимальным быстродействием. Траектория движения БЛА между двумя точками в этом случае представляет собой прямую линию. Так как БЛА с помощью гироскопических устройств стабилизирован относительно центра масс, это позволяет разделить пространственное движение на два плоских движения в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно.

## Задача оптимального управления

Задача синтеза оптимального управления объектом состоит в минимизации соответствующего функционала качества при заданных ограничениях, которые, как правило, представляют математическую модель движения объекта в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

При решении задач синтеза управления летательным аппаратом обычно рассматривается «задача Больца», в которой минимизируемый функционал качества представляется в виде квадратичного функционала Летова–Калмана [4]

$$J = Y_k^T R Y_k + \int_{t_0}^{t_k} [Y(t)^T Q(t) Y(t) + U(t)^T S(t) U(t)] dt, \quad (1)$$

где  $Y_k = [x_k, y_k, z_k]^T$  – вектор, включающий минимальные отклонения (промах) БЛА относи-

тельно заданной промежуточной  $k$ -й точки маршрута;  $Y(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T$  – то же текущих координат центра масс БЛА в заданной системе координат;  $U(t) = [u_x(t), u_y(t), u_z(t)]^T$  – то же управлений размерности  $r \leq n$  с ограничениями:

$$U \in U_0, \quad |u_i| \leq u_{i0}, \quad i = \overline{1,3}. \quad (2)$$

Вектор управлений состоит из нормальных ускорений центра масс БЛА в заданной системе координат. В зависимости от поставленной задачи и условий применения БЛА могут быть разработаны различные полученные аналитически законы управления БЛА [5–8].

При управлении с максимальным быстродействием в качестве критерия качества рассматривается представляющий собой частный случай (2) функционал вида

$$J = \int_{t_0}^{t_k} dt = T, \quad (3)$$

где  $T = t_k - t_0$  – время управления, в течение которого объект (в данном случае БЛА) перемещается из начальной точки  $Y_0$  в конечную точку  $Y_k$ .

Управление, основанное на критерии максимального быстродействия (3), называется форсированным, или банг-банг, управлением [9].

В математической постановке задача решается следующим образом. Объект управления описывается  $n$ -мерным уравнением

$$\dot{Y}(t) = A(Y, t) + N(t)U(t), \quad Y(t_0) = Y_0, \quad (4)$$

где  $A(Y, t)$  – векторная функция;  $N(t)$  – матрица переменных коэффициентов.

Требуется определить вектор  $U(t)$ , обеспечивающий перевод объекта из точки  $Y_0$  в точку  $Y_k$  за минимальное время  $T = t_k - t_0$ . Решение такой задачи можно получить методом динамического программирования или с помощью принципа максимума. Применим принцип максимума [10]. Для этого расширим вектор состояния, введя дополнительную  $n + 1$ -ю координату  $y_{n+1} = t - t_0$ . При этом  $\dot{y}_{n+1} = 1$ ,  $y_{n+1}(t_0) = 0$ . Минимизируемый функционал принимает вид

$$\pi(t_k) = y_{n+1}(t_k) + \sum_{v=1}^n \lambda_v (y_v(t_k) - y_{vk}), \quad (5)$$

где  $\lambda_v(\dots)$  – неопределенные множители Лагранжа.

Составим функцию Гамильтона (Понтрягина) для данной задачи

$$H = \sum_{i=1}^n \Psi_i (a_i(Y, t) + N_i(t)u_i) + \Psi_{n+1}. \quad (6)$$

Функции  $\Psi_i (i = \overline{1, n})$ ,  $\Psi_{n+1}$  определяются из так называемых канонических уравнений Понтрягина [10]:

$$\dot{\Psi}_i = - \sum_{j=1}^n \Psi_j \frac{\partial a_j(y, t)}{\partial y_j}, \quad \Psi_i(t_k) = -\lambda_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$\dot{\Psi}_{n+1} = 0, \quad \Psi_{n+1}(t_k) = -1. \quad (8)$$

Согласно принципу максимума, оптимальные управления должны доставлять максимум функции  $H$ . Из выражения (6) следует, что для этого должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^n \Psi_i N_i(t)u_i > 0. \quad (9)$$

Следовательно, оптимальные управления  $u_i$ , минимизирующие время управления, с учетом ограничений (4) имеют релейный характер при  $N_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ :

$$u_i = u_{i0} \text{sign} \Psi_i, \quad (10)$$

$$\text{sign} \Psi_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \Psi_i > 0; \\ 0, & \text{если } \Psi_i = 0; \\ -1, & \text{если } \Psi_i < 0. \end{cases}$$

Для определения функций  $\Psi_i$  необходимо решить двухточечную задачу, состоящую из решения дифференциальных уравнений (4), (7), (8). В общем случае это возможно только путем численного интегрирования. Однако в некоторых случаях решить задачу форсированного управления (определить моменты времени смены знака управления) позволяют особенности кинематики прямолинейного равноускоренного движения.

### Синтез форсированного управления БЛА

В [11] предложено оригинальное решение задачи синтеза форсированного управления, основанное на том, что траектория перевода объекта из одной точки пространства в другую по прямой линии при форсированном управлении состоит в общем случае из трех участков  $S = S_1 + S_2 + S_3$  ( $S$  – расстояние между начальной и конечной точками траектории;

$S_1$  – участок траектории ускоренного движения объекта;  $S_2$  – то же траектории движения объекта с постоянной скоростью;  $S_3$  – то же траектории торможения движения объекта).

Система уравнений, описывающая плоское движение центра масс БЛА, имеет вид:

$$\dot{S}(t) = V(t), \quad S(t_0) = S_0; \quad (11)$$

$$\dot{v}(t) = a(t), \quad v(t_0) = v_0, \quad (12)$$

где  $S(t)$  – расстояние, пройденное БЛА;  $v(t)$  – скорость БЛА;  $a(t)$  – управляющее ускорение.

Необходимо определить управляющее ускорение  $a(t)$  при условии, что заданы максимально допустимые значения скорости  $v_{\max}$  и ускорения  $a_{\max}$  БЛА. В соответствии с (10) выражение для ускорения  $a(t)$  имеет вид

$$a(t) = a_{\max} \text{sign}(\tau - t), \quad (13)$$

где  $\tau$  – момент переключения релейного управления;  $t$  – текущее время.

Если считать, что время полета БЛА на соответствующих участках траектории  $S_1, S_2, S_3$  будет соответственно  $T_1, T_2, T_3$ , то моменты переключения релейного управления (13):  $\tau_1 = T_1, \tau_2 = T_1 + T_2, \tau_3 = T_1 + T_2 + T_3$ . В соответствии с законами кинематики равнопеременного движения при  $S_0 = 0$  и  $V_0 = 0$ :

$$S_1 = \frac{a_y T_1^2}{2}; \quad S_2 = v_{\max} T_2; \quad S_3 = v_{\max} T_3 - \frac{a_T T_3^2}{2}, \quad (14)$$

где  $a_y$  – максимальное значение ускорения БЛА;  $a_T$  – то же значение торможения БЛА.

Следовательно, с учетом того, что  $S = S_1 + S_2 + S_3$  и  $v_{\max} = a_{\max} t$  на основании формул (14) получаются значения временных интервалов движения БЛА:

$$T_1 = \frac{v_{\max}}{a_y}; \quad T_2 = \frac{2Sa_y a_T - v_{\max}^2 (a_y + a_T)}{2v_{\max} a_y a_T};$$

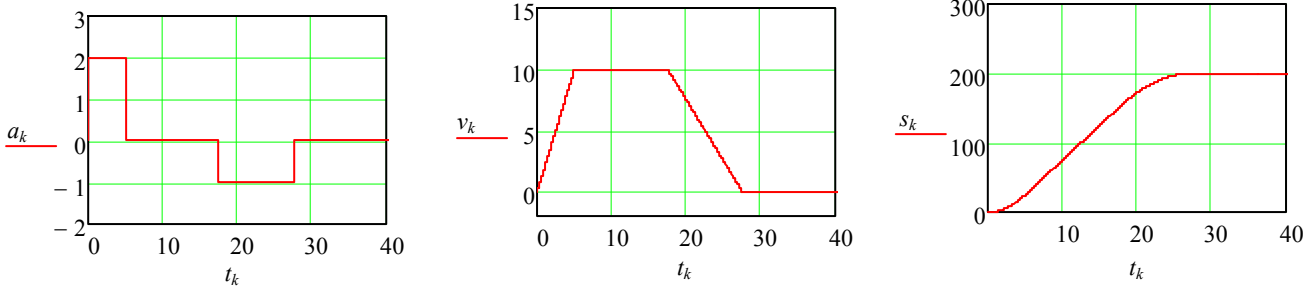


Рис. 2. Результаты моделирования форсированного управления

Fig. 2. Results of simulation of the UAV flight trajectory

$$T_3 = \frac{v_{\max}}{a_T}. \quad (15)$$

Так как на практике при форсированном управлении БЛА могут быть участки траектории, где БЛА не достигает максимальной скорости полета  $v_{\max}$  (отсутствует участок  $S_2$  траектории), в этом случае с учетом выражений (14)–(15) имеем [11]:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2Sa_T}{a_y(a_y + a_T)}}; \quad T_3 = \sqrt{\frac{2Sa_y}{a_T(a_y + a_T)}}. \quad (16)$$

В качестве примера рассмотрено математическое моделирование движения центра масс БЛА (квадрокоптера типа A10-X1) в среде Mathcad при следующих заданных значениях исходных данных:  $S = 200$  м;  $v_{\max} = 10$  м/с;  $a_y = 2$  м/с<sup>2</sup>;  $a_T = 1$  м/с<sup>2</sup>.

Результаты моделирования представлены на рис. 2. Интегрирование дифференциальных уравнений проводилось методом Эйлера. На рис. 2 обозначено:  $t_k$  – текущее время, с;  $a_k$  – ускорение движения центра масс БЛА, м/с<sup>2</sup>;  $v_k$  – скорость БЛА, м/с;  $s_k$  – расстояние, пройденное БЛА (м). При  $t_0 = 0$  моменты времени переключения релейного управления для данного примера следующие:  $\tau_1 = 5$  с;  $\tau_2 = 17,5$  с;  $\tau_3 = 27,5$  с.

Результаты моделирования данного примера показали работоспособность предложенного метода реализации форсированного управления.

Данный подход в определении управляющей перегрузки БЛА применим и для решения пространственной задачи его наведения. Это может производиться отдельным решением двух плоских задач с последующим их объединением или решением задачи в новой введенной вращающейся системе координат с последующим разделением по каналам управления БЛА с помощью матрицы преобразования координат (матрицы направляющих косинусов) [12].

## ВЫВОДЫ

1. Полученный закон изменения управляющей перегрузки является основой для формирования структуры построения автопилота БЛА в виде закона изменения угла отклонения рулевой поверхности (рулей по каждому каналу управления), в котором учитываются значения параметров, измеряемых датчиками, установленными на борту БЛА, и характеризующих его пространственное перемещение.

2. В зависимости от вида математических моделей, описывающих пространственное перемещение БЛА, в том числе относительно центра масс, для этого могут применяться различные известные методы синтеза регуляторов систем управления. Так как невозможно абсолютно точно описать математически все процессы, протекающие в БЛА и влияющие на его состояние на последнем этапе синтеза системы управления БЛА, как и любой другой сложной технической системы, приходится производить коррекцию параметров автопилота (параметрическую оптимизацию) под конкретную конструкцию БЛА и конкретные условия его применения. Таким образом, представленная методика синтеза закона изменения управляющей перегрузки БЛА  $a_y(t)$  является основой для последующего поэтапного синтеза системы управления БЛА.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гурьянов, А. Е. Моделирование управления квадрокоптером [Электронный ресурс] / А. Е. Гурьянов // Инженерный вестник. 2014. № 8. Режим доступа: <http://www.ainjournal.ru/doc/723331.html>.
2. Моисеев, В. С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами / В. С. Моисеев. Казань: ГБУ РЦМКО, 2013. 768 с.
3. Беспилотный авиационный комплекс А10-Х1 [Электронный ресурс] // Авиационные технологии и комплексы. Режим доступа: <https://aerotexsys.by/produktsiya/bespilotnyye-aviatsionnyye-kompleksy/multirotornogo-tipa/bespilotnyy-aviatsionnyy-kompleks-a10-x1.html>.
4. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
5. Лобатый, А. А. Аналитический синтез управления беспилотным летательным аппаратом / А. А. Лобатый, А. А. Антаневич, Ю. Ф. Икуас // Сборник статей Военной академии Республики Беларусь. 2009. № 17. С. 62–66.
6. Лобатый, А. А. Интервально-оптимальное программное управление летательным аппаратом / А. А. Лобатый, М. А. Аль-Машхадани // Вестник БНТУ. 2014. № 1. С. 25–29.
7. Лобатый А. А. Формирование оптимальных параметров траектории пролета беспилотного летательного аппарата через заданные точки пространства / А. А. Лобатый, А. Ю. Бумай, Ду Цзюнь // Доклады БГУИР. 2019. № 7–8. С. 50–57. <http://doi.org/10.35596/1729-7648-2019-126-8-50-57>.
8. Лобатый, А. А. Аналитический синтез управляющего ускорения беспилотного летательного аппарата / А. А. Лобатый, А. Ю. Бумай, С. С. Прохорович // Наука и техника. 2021. Т. 20, № 4. С. 338–344. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-4-338-344>.
9. Сейдж, Э. П. Оптимальное управление системами / Э. П. Сейдж, Ч. С. Уайт. М.: Радио и связь, 1982. 392 с.
10. Методы классической и современной теории автоматического управления: учеб.: в 5 т. / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления. 744 с.
11. Ким, Т. Ю. Форсированное управление движением мобильного робота / Т. Ю. Ким, Г. А. Прокопович, А. А. Лобатый // Информатика. 2022. Т. 19, № 3 С. 86–100. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-3-86-100>.
12. Дмитриевский, А. А. Внешняя баллистика / А. А. Дмитриевский, Л. Н. Лысенко. М.: Машиностроение, 2005. 608 с.

Поступила 14.11.2022

Подписана в печать 17.01.2023

Опубликована онлайн 31.03.2023

## REFERENCES

1. Guryanov A. E. (2014) Quadcopter Control Simulation. *Inzhenerny Vestnik = Instrument Engineering*, (8). Available at: <http://www.ainjournal.ru/doc/723331.html> (in Russian).
2. Moiseev V. S. (2013) *Applied Control Theory for Unmanned Aerial Vehicles*. Kazan, State Budget Institution Republican Center for Monitoring the Quality of Education. 768 (in Russian).
3. Unmanned Aircraft Complex A10-X1. *Aviation Technologies and Complexes*. Available at: <https://aerotexsys.by/produktsiya/bespilotnyye-aviatsionnyye-kompleksy/multirotornogo-tipa> (in Russian).
4. Krasovskii A. A. (ed.) (1987) *Handbook of Automatic Control Theory*. Moscow, Nauka Publ. 712 (in Russian).
5. Lobaty A. A., Antanovich A. A., Ikuas Yu. F. (2009) Analytical Synthesis of Unmanned Aerial Vehicle Control. *Sbornik Statei Voennoi Akademii Respubliki Belarus'* [Collected Papers of Military Academy of the Republic of Belarus], (17), 62–66 (in Russian).
6. Lobaty A. A., Al-Mashkhadani M. A. (2014) Interval-optimal Software Control of an Aircraft. *Vestnik BNTU* [Bulletin of Belarusian National Technical University], (1), 25–29 (in Russian).
7. Lobaty A. A., Bumai A. Yu., Du Jun (2019) Formation of Optimal Parameters the Trajectory of the Overflight of Unmanned Aerial Vehicle Through the Specified Points of Space. *Doklady BGUIR*, (7–8), 50–57. <http://doi.org/10.35596/1729-7648-2019-126-8-50-57> (in Russian).
8. Lobaty A. A., Bumai A. Yu., Prohorovich S. S. (2021) Analytical Synthesis of Control Acceleration of Unmanned Aerial Vehicle. *Nauka i Tekhnika = Science & Technique*, 20 (4), 338–344. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-4-338-344> (in Russian).
9. Sage E. P., White Ch. S. (1982) *Optimum Systems Control*. Moscow, Radio i Svyaz Publ. 392 (in Russian).
10. Pupkov K. A., Egupov N. D., Barkin A. I. [et al.] (2004) *Methods of Classical and Modern Theory of Automatic Control. Vol. 4: Theory of Optimization of Automatic Control Systems*. Moscow: Publishing House of Bauman Moscow State Technical University. 744 (in Russian).
11. Kim T. Yu., Prokopovich G. A., Lobaty A. A. (2022) Forced Motion Control of a Mobile Robot. *Informatika = Informatics*, 19 (3), 86–100. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-3-86-100> (in Russian).
12. Dmitrievsky A. A., Lysenko L. N. (2005) *External Ballistics*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 608 (in Russian).

Received: 14.11.2022

Accepted: 17.01.2023

Published online: 31.03.2023