УДК 629.341.062

О РЕШЕНИИ И ПРОГРАММИРОВАНИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Широкова Юлия Александровна
Научный руководитель – канд.техн.наук, доц. Ю.Е.Атаманов
(Белорусский национальный технический университет)

В работе предлагается использовать известные методы решения систем алгебраических уравнений для вычисления старших производных дифференциальных уравнений, не решенных относительно старших производных, что значительно облегчает процесс программирования задачи.

Инженер, занимающийся исследованием динамики машин и их узлов, должен владеть методами решения систем дифференциальных уравнений. Обычно для решения дифференциальных уравнений применяют метод Рунге-Кутта 4-го порядка. Этот метод предъявляет свои требования к исходной системе дифференциальных уравнений: все уравнения, входящих в систему, должны быть только первого порядка и решены относительно старшей производной.

Однако иногда встречаются системы дифференциальных уравнений, часть из которых содержит в себе несколько производных старшего порядка. Классическим примером таких систем уравнений является система дифференциальных уравнений, описывающих колебания подрессоренной и неподрессоренных масс колесной двухосной машины:

$$M_1\ddot{z}_1 + M_3\ddot{z}_2 + 2k_{p1}(\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1) + 2c_{p1}(z_1 - \xi_1) = 0;$$
$$M_2\ddot{z}_2 + M_3\ddot{z}_1 + 2k_{p2}(\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2) + 2c_{p2}(z_2 - \xi_2) = 0; \qquad (1)$$

$$m_{н1}\ddot{\xi}_1 - 2k_{p1}(\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1) + 2k_{ш1}(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1) - 2c_{p1}(z_1 - \xi_1) + 2c_{ш1}(\xi_1 - q_1) = 0;$$
$$m_{н2}\ddot{\xi}_2 - 2k_{p2}(\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2) + 2k_{ш2}(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2) - 2c_{p2}(z_2 - \xi_2) + 2c_{ш2}(\xi_2 - q_2) = 0 \cdot$$

В системе уравнений (1) первые два уравнения содержат производные второго порядка $\ddot{z}_1$ и $\ddot{z}_2$. Чтобы применить метод Рунге-Кутта 4-го порядка к системе уравнений (1) необходимо:

- решить первые два уравнения относительно старших производных $\ddot{z}_1$ и $\ddot{z}_2$;

- понизить порядок уравнений, входящих в систему (1) до первого (обычно не вызывает затруднений).

Решить первые два уравнения относительно старших производных $\ddot{z}_1$ и $\ddot{z}_2$ можно несколькими способами: вручную, с помощью формул Камера и методом Гаусса с ведущим элементом.

При ручном методе решения из одного уравнения выражается какая-либо производная и это значение подставляется во второе уравнение. Этот метод решения уравнений относительно старших производных требует значительного времени и внимания. В результате получается очень громоздкая система дифференциальных уравнений, которую и программировать затруднительно.

Значительно проще и удобнее для двух уравнений воспользоваться формулами Крамера. Для этого старшие производные первых двух уравнений оставляем в левой части, а все остальные члены переносим в правую часть и обозначаем их через b_i. Тогда

$$\ddot{z}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & M_3 \\ b_2 & M_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} M_1 & M_3 \\ M_3 & M_2 \end{vmatrix}; \qquad \ddot{z}_2 = \begin{vmatrix} M_1 & b_1 \\ M_3 & b_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} M_1 & M_3 \\ M_3 & M_2 \end{vmatrix}.$$

Представление исходных первых двух дифференциальных уравнений в каноническом виде системы алгебраических уравнений значительно облегчает их программирование и позволяет избежать многих типичных ошибок, возникающих при ручном преобразовании.

Если в исходную систему дифференциальных уравнений три и более уравнения, содержащих старшие производные, то, приведя ее к каноническому виду, удобнее использовать метод Гаусса с ведущим элементом. Корни этой системы и будут искомые старшие производные.

Таким образом, для решения и программирования системы двух дифференциальных уравнений, содержащих старшие производные, относительно этих производных рекомендуется использовать формулы Крамера. Если исходная система дифференциальных уравнений содержит три и более уравнений, включающих в себя старшие производные, рекомендуется применять метод Гаусса с ведущим элементом.

УДК 519.271

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Друтько Кирилл Иванович
Научный руководитель—канд. техн. наук, доцент А.С.Поварехо
(Белорусский национальный технический университет)

В работе проведен анализ существующих методик расчета собственных частот систем вращательного движения, и разработано программное обеспечение определения собственных частот и форм колебаний механических систем.

Одной из основных задач динамического расчета трансмиссий является определение собственных частот крутильных колебаний. При резонансе форма вынужденных колебаний практически совпадает с формой собственных колебаний, и при этом в валах трансмиссии возникают значительные по величине напряжения, опасные с точки зрения их прочности. Поэтому задача оценки собственных частот колебаний является весьма актуальной.

Для удобства исследования колебательных процессов в трансмиссиях последние представляют в виде динамической модели, состоящей из сосредоточенных масс, соединенных безинерционными упругими связями. Полученная в результате система является достаточно громоздкой, т.к. трансмиссия мобильной машины имеет сложную конструктивную форму. Расчеты таких систем на крутильные колебания очень трудоемки, а иногда и невыполнимы без использования ЭВМ и требуют разработки специальных программных средств.

В связи с этим были исследованы методики, использующиеся для определения собственных частот колебаний, и разработано программное обеспечение для их машинной реализации.