

**Белорусский национальный технический университет**

Факультет технологий управления и гуманитаризации

Кафедра ЮНЕСКО

«Энергосбережение и возобновляемые источники энергии»

---

---

**ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО  
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

«Механика жидкости и газа»

для специальности

1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии и  
энергетический менеджмент»

Составители: Баштовой Виктор Григорьевич  
Рекс Александр Георгиевич

Минск  
БНТУ  
2023

## Перечень материалов

### **Теоретический раздел**

- конспект лекций

### **Практический раздел**

- лабораторный практикум
- методическое пособие к практическим занятиям
- методические указания к курсовой работе

### **Контроль знаний**

- экзаменационные вопросы

### **Вспомогательный раздел**

- содержание учебного материала;
- список литературы

### **Пояснительная записка**

Целью ЭУМК «Механика жидкости и газа» является оказание помощи для приобретения студентами знаний и навыков, обеспечивающих осознанное использование ими возможностей жидкостей и газов в технических устройствах для обеспечения повышения эффективности их работы.

ЭУМК содержит четыре раздела. В теоретическом разделе представлены лекционные материалы. Практический раздел включает методические рекомендации для проведения лабораторных и практических занятий, рекомендации для выполнения курсовой работы. Раздел контроля знаний включает экзаменационные вопросы. Вспомогательный раздел содержит основные разделы учебного материала дисциплины и список рекомендуемой литературы.

Материалы учебно-методического комплекса представлены в формате *PDF*. Учебные материалы структурированы по разделам. Предусматривается навигация по разделам, что обеспечивает возможность быстрого поиска требуемой информации.

Может быть рекомендован для студентов энергетических специальностей

Открытие ЭУМК производится посредством запуска файла «Fluid and gas mechanics.pdf» без предварительной инсталляции.

## СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	9
1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ .....	9
1.1. Общие фундаментальные свойства жидкостей и газов .....	9
1.1.1. Сплошность.....	9
1.1.2. Текучесть.....	10
1.2. Индивидуальные физические свойства жидкостей и газов .....	12
1.2.1. Вязкость.....	12
1.2.2. Плотность и основные уравнения состояния.....	17
1.2.3. Поверхностное натяжение.....	24
2. СТАТИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ.....	33
2.1. Основные положения статики жидкостей и газов. Классификация сил, действующих в жидкостях и газах. ....	33
2.2. Равновесие жидкостей и газов в отсутствии массовых сил. Закон Паскаля. ....	35
2.3. Равновесие жидкостей и газов в присутствии массовых сил. Основное дифференциальное уравнение статики жидкостей и газов. ....	37
2.3.1. Условия возможности механического равновесия в однородной несжимаемой жидкости.....	40
2.3.2. Условие возможности механического равновесия в тяжелой неизотермической жидкости. Естественная конвекция. ....	41
2.4. Распределение давления в тяжелой несжимаемой жидкости.....	44
2.5. Распределение давления в тяжелом сжимаемом газе .....	47
2.6. Распределение давления в тяжелой несжимаемой жидкости в равномерно вращающемся сосуде.....	49
2.7. Сила давления на тела, погруженные в жидкость.....	51
2.7.1. Сила давления, действующая на криволинейную поверхность, погруженную в жидкость .....	51
2.7.2. Вертикальная составляющая силы давления, действующая на криволинейную поверхность, погруженную в тяжелую несжимаемую жидкость .....	52

2.7.3. Вертикальная составляющая силы давления, действующая на тело, погруженное в тяжелую несжимаемую жидкость. Закон Архимеда .....	55
2.7.4. Горизонтальные составляющие сил, действующих на тела, погруженные в тяжелую несжимаемую жидкость .....	57
2.8. Плавание тел в тяжелой несжимаемой жидкости .....	58
2.8.1. Плавание тел, полностью погруженных в жидкость, и его устойчивость .....	58
2.8.2. Особенности плавания тел, не полностью погруженных в жидкость.....	60
<b>3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ</b>	
<b>ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ.....</b>	<b>62</b>
3.1. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности.....	63
3.2. Закон сохранения энергии. Уравнение Бернулли .....	64
3.3. Закон сохранения импульса. Уравнение движения .....	68
<b>4. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ</b>	
<b>ЖИДКОСТИ.....</b>	<b>70</b>
4.1. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости.....	70
4.2. Уравнение Бернулли для идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости.....	71
4.3. Уравнение Бернулли для вязкой несжимаемой жидкости. Потери энергии, давления и напора .....	73
4.4. Качественные следствия из уравнений неразрывности и Бернулли .....	74
4.5. Кавитация .....	75
4.6. Эжекция .....	77
4.7. Течение несжимаемой жидкости через конфузторы и диффузоры.....	77
4.8. Истечение несжимаемой жидкости через отверстие в баке. Формула Торичелли .....	79
4.9. Внезапное расширение и сужение потока. Формула Борда....	81
4.10. Дроссельный расходомер.....	84
4.11. Основные задачи и методы гидравлического расчета трубопроводных систем .....	85
4.11.1. Потери давления в трубопроводе .....	85
<b>5. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА.....</b>	<b>92</b>

5.1 Распространение малых возмущений в жидкостях и газах. Звук.....	92
5.2. Основные уравнения одномерных течений сжимаемого газа.....	96
5.3. Истечение газа через отверстие в баке.....	102
5.4. Движение газа в канале переменного сечения.....	106
5.4.1. Движение газа через диффузор.....	107
5.4.2. Движение газа через конфузор.....	108
5.4.3. Условие перехода скорости газа через значение скорости звука.....	108
5.5. Распространение конечных возмущений в газе. Ударная волна.....	111
5.5.1. Уравнение ударной адиабаты.....	116
5.5.2. Соотношения между параметрами газа в ударной волне.	118
6. ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ И ГАЗА.....	122
6.1. Сила лобового сопротивления.....	123
6.2. Подъемная сила.....	126
6.3. Пограничный слой.....	127
7. КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ НЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ.....	134
7.1. Течение Пуазейля в круглой трубе.....	134
7.2. Плоскопараллельное течение Куэтта.....	139
7.3. Пленочное течение жидкости по наклонной плоскости.....	142
8. НЕНЬЮТОНОВСКИЕ ЖИДКОСТИ.....	145
8.1. Основные реологические законы неньютоновских жидкостей.....	145
8.1.1. Степенные неньютоновские жидкости.....	146
8.1.2.Течение Пуазейля степенных жидкостей в круглой трубе.....	149
8.2. Вязкопластичные жидкости.....	151
8.3. Электро- и магнитореологические суспензии.....	153
9. ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫЕ ЖИДКОСТИ.....	157
9.1. Основные положения магнитной гидродинамики.....	157
9.2. Практическое использование течений электропроводных жидкостей и газов.....	160

9.3. Особенности статики электропроводных жидкостей.....	165
9.3.1. Распределение давления в электропроводной жидкости в однородном магнитном поле .....	166
9.3.2. Пинч-эффект.....	167
9.4. Особенности течений электропроводных жидкостей в магнитном поле (течение Гартмана) .....	170
10. МАГНИТНЫЕ ЖИДКОСТИ.....	172
10.1. Основные механизмы взаимодействия магнитных жидкостей с магнитным полем.....	172
10.2. Особенности статики магнитных жидкостей.....	174
10.3. Перспективные направления применения магнитных жидкостей .....	176
ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ .....	178
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ .....	178
Лабораторная работа №1. Вязкость жидкостей .....	178
Лабораторная работа № 2. Поверхностное натяжение жидкостей .....	187
Лабораторная работа №3. Форма свободной поверхности жидкости .....	198
Лабораторная работа №4. Измерение скоростей и давлений в газовых потоках.....	203
Лабораторная работа № 5. Режимы течения жидкости.....	210
Лабораторная работа № 6. Уравнение Бернулли .....	217
Лабораторная работа № 7. Сопротивление движению тел в жидкостях и газах.....	223
Лабораторная работа № 8. Зависимость лобового сопротивления от формы тела и его ориентации в потоке .....	231
Лабораторная работа № 9. Подъемная сила в потоке газа.....	234
Лабораторная работа №10. Определение потерь напора и коэффициентов сопротивления на участках сложного трубопровода .....	238
МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ.....	246
1. Физические свойства жидкостей и газов .....	246
2. Статика.....	253

3. Одномерные течения жидкостей и газов .....	267
Приложение. Таблицы физических свойств жидкостей и газов .....	285
<b>МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ</b> .....	287
1. Основные физические свойства жидкостей .....	287
1.1. Плотность .....	287
1.2. Вязкость жидкостей .....	288
2. Основные характеристики течения жидкости .....	290
2.1. Средняя скорость течения и расход .....	290
2.2. Режимы течения .....	291
3. Основные уравнения движения жидкости .....	292
3.1. Уравнение неразрывности .....	292
3.2. Уравнение энергии (уравнение Бернулли) .....	292
4. Гидравлические сопротивления .....	295
4.1. Общие формулы для вычисления потерь давления .....	295
4.2. Шероховатость труб .....	296
4.3. Законы сопротивления .....	298
4.4. Местные сопротивления .....	300
5. Основные принципы расчета сложных трубопроводов .....	301
5.1. Общая характеристика трубопроводов .....	301
5.2. Простой трубопровод постоянного сечения .....	302
5.3. Последовательное соединение простых трубопроводов .....	303
5.4. Параллельное соединение трубопроводов .....	304
5.5. Разветвленный трубопровод .....	306
5.6. Сложный трубопровод с раздачей жидкости ответвлениями .....	308
5.7. Указания к выполнению курсовой работы .....	311
Литература .....	313
Приложение .....	314
<b>КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ</b> .....	317
Экзаменационные вопросы по дисциплине «Механика жидкости и газа» .....	317
<b>ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ</b> .....	322

Содержание учебного материала .....	322
Список рекомендуемой литературы .....	329

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

### 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

#### 1.1. Общие фундаментальные свойства жидкостей и газов

Общими фундаментальными свойствами жидкостей и газов являются сплошность и текучесть. То есть, все среды, обладающие этими свойствами относятся к разряду жидкостей и газов и, соответственно, являются объектами изучения механики жидкостей и газов.

##### 1.1.1. Сплошность

Одной из фундаментальных гипотез, принимаемых при описании движения жидкостей и газов является гипотеза их сплошности.

Проблема заключается в том, как определить характеристики жидкостей и газов и их потоков в данной точке пространства, тогда, как известно, что жидкости и газы состоят из дискретных элементов – молекул, а те, в свою очередь, состоят из атомов, а атомы из электронов и ядер, между которыми, очевидно, нет никакого вещества и, соответственно, в местах, расположенных между молекулами, а тем более между атомами, бессмысленно говорить о наличии в них жидкости или газа.

В связи с этим гипотеза сплошности предполагает, что характеристики жидкости, газа и их потоков в данной точке соответствуют этим величинам для физически бесконечно малого объема среды, находящегося в этой точке, который в дальнейшем будем называть частицей жидкости или газа.

Таким образом, гипотеза сплошности предполагает, что под точкой в пространстве понимается физически бесконечно малый объем (частица) жидкости или газа, имеющий размеры намного меньшие, чем масштабы рассматриваемых явлений, чтобы его можно было считать точкой, но обладающий всеми макроскопическими физическими свойствами и термодинамическими параметрами этих сред.

Поскольку физические свойства жидкостей и газов определяются совокупными свойствами и взаимодействием составляющих их молекул, находящихся в тепловом хаотическом движении, постольку, чтобы обладать макроскопическими физическими свойствами среды, рассматриваемая частица должна содержать достаточно большое число молекул. В связи с этим размеры частицы должны быть много больше, чем расстояния между молекулами.

Таким образом, под точкой в жидкости или газе будет пониматься малый объем среды (частица), размеры которого много меньше размеров рассматриваемых явлений, но много больше межмолекулярных расстояний, а характеристики жидкости, газа и их потоков в данной точке соответствуют этим величинам для частицы, находящейся в этой точке.

При принятии гипотезы сплошности считается, что масса вещества и все его свойства непрерывно распределены по всему его объему, а жидкость или газ непрерывным (сплошным) образом заполняют предоставленное им пространство.

Поскольку все получаемые далее результаты будут относиться к жидкостям и газам как сплошным средам, постольку реальные объекты, к которым они будут применяться, должны удовлетворять этому свойству. Это особенно относится к разреженным газам, которые при определенной степени разреженности, то есть при значительном увеличении межмолекулярных расстояний, могут перестать соответствовать принятому понятию сплошной среды.

### **1.1.2. Текучесть**

Вторым фундаментальным свойством жидкостей и газов является **текучесть**.

Этим свойством жидкости и газы принципиально отличаются от твердых тел и, соответственно механика жидкостей и газов отличается от механики твердого тела.

Это свойство подразумевает легкую подвижность или легкую деформируемость жидкостей и газов под действием приложенных к ним сил, в отличие от твердых тел.

Поэтому, **текучестью** называется способность жидкостей и **газов испытывать конечные деформации при сколь угодно малых касательных напряжениях.**

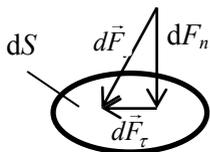


Рис. 1.1 Силы, действующие на поверхность

Напряжением  $\vec{\sigma}$  силы  $d\vec{F}$ , действующей на элементарную площадку  $dS$ , называется отношение этой силы к величине площади,  $\vec{\sigma} = d\vec{F} / dS$ . Соответственно, единицей измерения напряжения силы является Паскаль,  $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$ .

Действующую силу можно разложить на две составляющие – параллельную  $dF_\tau$  и перпендикулярную  $dF_n$  площадке (рис. 1.1). Соответственно, отношения этих составляющих к величине площади будут представлять собой касательные  $\vec{\sigma}_\tau = d\vec{F}_\tau / dS$  и нормальные напряжения  $\sigma_n = dF_n / dS$ .

Под действием приложенных напряжений тело испытывает деформации (рис.1.2).

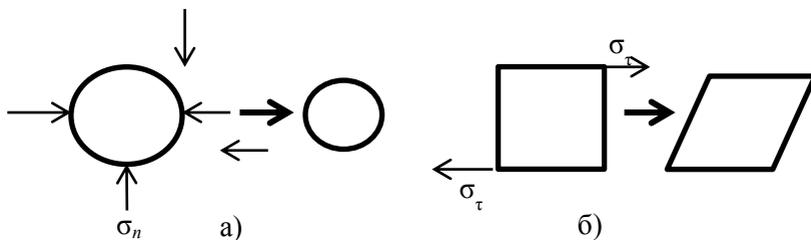


Рис.1.2 Деформации тел под действием разных напряжений  
а) нормальных, б) касательных

Под действием нормальных напряжений происходит деформация растяжения-сжатия и изменяются линейные размеры тела и его объем, рис. 1.2а). Под действием касательных напряжений происходит деформация сдвига, сопровождающаяся движением слоев тела вдоль относительно друг друга, рис. 1.2б). Именно такая деформация соответствует течению жидкостей и газов.

В отличие от твердых тел, величина деформации в которых в ответствии, например, с законом Гука пропорциональна приложенным напряжениям и стремится к нулю с их уменьшением, жидкости под действием даже малых касательных напряжений приходят в движение (текут) и соответственно могут испытывать конечные (большие) деформации сдвига.

В этом и состоит суть их свойства текучести.

## **1.2. Индивидуальные физические свойства жидкостей и газов**

Обладая общими свойствами сплошностью и текучестью, жидкости и газы отличаются друг от друга наличием других индивидуальных физических свойств, из которых рассмотрим вязкость, плотность и поверхностное натяжение.

### **1.2.1. Вязкость**

Как показывает опыт, у разных жидкостей свойство текучести проявляется по-разному. А именно, в одних и тех же условиях скорость течения разных жидкостей имеет разную величину. Достаточно сравнить течение, например, меда и воды по наклонной плоскости под действием силы тяжести. При этом мы говорим, что мед является более вязкой жидкостью по сравнению с водой.

Все это свидетельствует о том, что внутри жидкостей и газов существуют некоторые силы, которые затрудняют их течение, то есть перемещение слоев жидкости вдоль относительно друг друга. Такого рода силы, возникающие между слоями жидкости и газа при их продольном движении с разными скоростями, носят название силы внутреннего трения или силы вязкого трения.

Рассмотрим физический механизм возникновения силы вязкого трения на примере движения с разными скоростями двух плоскопараллельных слоев газа (рис.1.3).

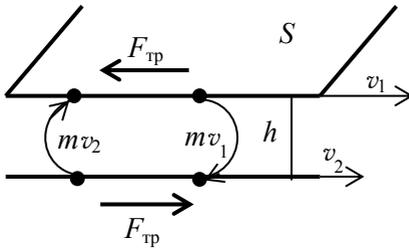


Рис. 1.3 Механизм действия сил вязкого трения

движется с меньшей скоростью  $v_2$ . Поскольку находящиеся в этих слоях сами молекулы газа имеют хаотические значения скорости, поскольку  $v_1$  и  $v_2$  представляют собой средние значения скоростей молекул в этих слоях.

В силу своего хаотического движения молекулы газа имеют возможность переходить из слоя в слой со своим значением скорости, если считать, что слои газа находятся достаточно близко друг к другу и перемещаясь между ними молекулы не испытывают столкновений между собой. Если молекула из медленного слоя попадает в быстрый слой, то она уменьшает среднюю скорость молекул этого слоя, а молекула из быстрого слоя, попадая в медленный слой, увеличивает среднюю скорость его молекул. В результате такого постоянного обмена молекулами между слоями скорость быстрого слоя стремится уменьшиться, а медленного – увеличиться. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока скорости слоев не станут равными.

Тот факт, что в процессе обмена молекулами скорости слоев газа изменяются можно трактовать как действие на эти слои силы  $F_{тр}$ , замедляющей быстрый слой и ускоряющей медленный. В соответствии с третьим законом Ньютона силы, действующие на слои, равны по величине и противоположны по направлению.

Эти силы действуют по касательной к движущимся слоям и носят название **силы вязкого трения**.

Другими словами, при перемещении молекул, имеющих массу  $m$ , между слоями они переносят из слоя в слой свой средний импульс  $mv_1$  и  $mv_2$ . В результате этого, импульс каждого из слоев изменяется,

В газе этот механизм можно представить наиболее ясно, поскольку молекулы в нем находятся в хаотическом и только поступательном движении. Пусть один из слоев является более быстрым и имеет скорость  $v_1$ , а второй медленный слой

а, как известно, изменение импульса тела в единицу времени, определяет силу, действующую на тело. Таким образом, можно говорить, что силы вязкого трения обусловлены переносом импульса молекулами между слоями газа. Поскольку импульсы молекул разные  $mv_1 \neq mv_2$ , то между слоями газа, движущимися с разными скоростями возникает результирующий поток импульса, направленный от быстрого слоя к медленному.

В жидкостях суть механизма возникновения силы вязкого трения остается такой же, только перенос импульса молекулами носит более сложный характер, чем в газах.

Как уже было сказано, в результате действия сил вязкого трения скорости движущихся слоев жидкости стремятся выровняться. При равенстве скоростей слоев результирующий поток импульса между ними становится равным нулю.

В вязкой жидкости имеет место, так называемый, эффект прилипания ее к твердой поверхности, в результате чего скорость вязкой жидкости на твердой поверхности равна нулю относительно этой поверхности. Поэтому, например, при течении жидкости в круглой трубе скорость жидкости на стенке трубы равна нулю и увеличивается по мере удаления от стенки, принимая максимальное значение на оси трубы. При отсутствии внешнего воздействия на поток силы вязкого трения приведут к тому, что скорости всех слоев жидкости выровняются и станут равными скорости на стенке, которая равна нулю. То есть поток жидкости в трубе остановится. Имевшаяся у потока кинетическая энергия станет равной нулю и полностью перейдет в тепловую энергию, что приведет к повышению температуры жидкости. Таким образом, результатом действия сил вязкого трения в жидкости, как и сил трения между твердыми телами, является переход механической энергии в тепловую. Этот процесс называется диссипацией энергии. Естественно, что для постоянного поддержания течения жидкости в каналах с твердыми стенками требуется некоторое внешнее воздействие, компенсирующее эту диссипацию энергии. Такое воздействие в трубопроводных системах обеспечивается, например, насосами. Нелишне отметить, что, таким образом, вся энергия, чаще всего электрическая, потребляемая для работы насосов, в конечном итоге превращается в тепловую и рассеивается в окружающей среде.

Следующим естественным шагом является установление количественных соотношений для вычисления сил вязкого трения. Для этого используем, так называемый, феноменологический подход, основанный на установлении этих соотношений, исходя из общих физических представлений о происходящих процессах и на первом шаге предполагающий получение этих соотношений в наиболее простом математическом выражении. Будем иметь в виду, что наиболее простая математическая зависимость, отражающая тот факт, что с увеличением одной величины вторая тоже увеличивается, является прямой пропорциональностью, а если вторая величина уменьшается, то наиболее просто этот факт описывается обратной пропорциональной зависимостью.

Исходя из представленного на рис. 1.3 механизма действия сил вязкого трения естественно предположить, что величина силы вязкого трения  $F_{\text{тр}}$  будет зависеть от разности скоростей слоев  $\Delta v = v_1 - v_2$ , от площади слоев  $S$  и от расстояния между ними  $h$ . Если представить эту зависимость в виде простой дроби, то, исходя из физических представлений, можно констатировать, что с увеличением разности скоростей  $\Delta v$  и площади слоев  $S$  сила вязкого трения будет больше и эти величины должны стоять в числителе рассматриваемой дроби, а с увеличением расстояния между слоями  $h$ , когда взаимное влияние слоев снижается, сила трения будет меньше и эта величина должна стоять в знаменателе этой дроби. Сказанное выше, запишется следующим образом

$$F_{\text{тр}} \sim \frac{\Delta v \cdot S}{h},$$

а, если ввести такую величину, как напряжение силы вязкого трения  $\sigma = F_{\text{тр}}/S$ , которое, как и сила, является касательным к рассматриваемым слоям, то для него получится:

$$\sigma = \frac{F_{\text{тр}}}{S} \sim \frac{\Delta v}{h}.$$

Для замены знака пропорциональности на знак равенства надо в полученное выражения ввести некоторый коэффициент пропорциональности  $\eta$  и записать его следующим образом

$$\sigma = \eta \frac{\Delta v}{h}, \quad F_{\text{тр}} = \eta \frac{\Delta v \cdot S}{h}. \quad (1.1)$$

Введенный таким образом коэффициент  $\eta$  характеризует вязкие свойства конкретных жидкостей и газов, называется **динамическим коэффициентом вязкости** и, исходя из формул (1.1), имеет единицу измерения Па·с и размерность  $[\eta]=\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$ .

Полученное выражение (1.1), означает, что **касательное напряжение силы вязкого трения между плоскопаралельными движущимися слоями жидкости пропорционально величине, численно равной разности скоростей слоев, приходящейся на единицу расстояния между ними, а коэффициент пропорциональности является постоянной величиной, характеризующей свойства жидкости или газа.**

Данное утверждение носит название **закона вязкого трения Ньютона**.

Как показывает опыт, закону вязкого трения Ньютона подчиняется подавляющее большинство обычных жидкостей, которые в силу этого относятся к классу «ньютоновских жидкостей».

Для того, чтобы определять напряжение силы вязкого трения в данной точке потока жидкости, то есть локально, необходимо рассмотреть слои жидкости, находящиеся на бесконечно малом расстоянии  $dn$  друг от друга, когда разность их скоростей тоже будет бесконечной малой величиной  $dv$ .

Тогда выражение закона вязкого трения Ньютона (1.1) запишется в виде

$$\sigma = \eta \frac{dv}{dn} \quad (1.2)$$

и его можно сформулировать следующим образом: **касательное напряжение силы вязкого трения между движущимися слоями жидкости пропорционально производной от скорости движения**

слоев по направлению, нормальному к плоскости их соприкосновения.

Наряду с динамическим коэффициентом вязкости  $\eta$  вязкие свойства жидкостей и газов характеризуются **кинематическим коэффициентом вязкости  $\nu$** , который равен отношению динамического коэффициента вязкости к плотности жидкости  $\rho$ :

$$\nu = \eta / \rho.$$

В соответствии с определением, кинематический коэффициент вязкости имеет размерность и единицу измерения  $\text{м}^2/\text{с}$ .

Коэффициенты вязкости жидкостей и газов зависят от температуры. Причем, с ростом температуры коэффициенты вязкости жидкостей уменьшаются, а газов – увеличиваются (таблица 1.1).

Таблица 1.1 Зависимость коэффициентов вязкости воды и воздуха от температуры

$t, \text{ } ^\circ\text{C}$	Вода		Воздух	
	$\eta \cdot 10^6, \text{ Па}\cdot\text{с}$	$\nu \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$	$\eta \cdot 10^6, \text{ Па}\cdot\text{с}$	$\nu \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$
0	1788	1,789	17,2	13,28
10	1306	1,306	17,6	14,16
20	1004	1,006	18,1	15,06
30	801,5	0,805	18,6	16,00
40	653,3	0,659	19,1	16,96
50	549,4	0,556	19,6	17,95
60	469,9	0,478	20,1	18,97

### 1.2.2. Плотность и основные уравнения состояния

Одной из физических характеристик жидкостей и газов является их плотность.

Плотностью  $\rho$  однородного вещества называется отношение массы этого вещества  $m$  к объему  $V$ , занимаемому этой массой:

$$\rho = m / V.$$

Для неоднородного вещества с неравномерно распределенной его массой по объему плотность определяется в каждой точке занимаемого им объема. В силу этого плотность является локальной характеристикой.

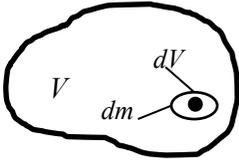


Рис. 1.4.

Плотность вещества в данной точке, (рис.1.4) определяется отношением массы  $dm$  бесконечно малого объема  $dV$ , окружающего эту точку, к этому объему:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (1.3)$$

В общем случае в каждой точке объема значение плотности может быть разным, то есть плотность может быть функцией координат точки:  $\rho = \rho(x, y, z)$ .

Знание распределения плотности по объему вещества является важным, поскольку позволяет вычислить массу  $M$  любого конечного объема  $V$  этого вещества следующим образом:

$$M = \int_V dm = \int_V \rho(x, y, z) dV .$$

При этом средняя плотность тела  $\rho_{\text{ср}}$  определяется как отношение его массы  $M$  к занимаемому им объему  $V$ :

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{M}{V} = \frac{1}{V} \int_V \rho(x, y, z) dV .$$

Плотность жидкостей и газов  $\rho$  зависит от давления  $p$  и температуры  $T$ , которые, таким образом, в совокупности являются локальными термодинамическими параметрами жидкостей и газов.

В классической термодинамике термодинамическими параметрами состояния газа являются объем  $V$ , давление  $p$  и температура  $T$ . Поскольку механика жидкости и газа стремится описывать происходящие в них процессы в каждой точке занимаемого ими объема, то есть локально, постольку такая характеристика как объем  $V$  в целом является неприемлемой для этих целей. Поэтому вместо объема для

локального описания термодинамического состояния жидкостей и газов используется плотность, которая связана с объемом обратно пропорциональной зависимостью (1.3). То есть при увеличении объема (расширении) жидкости или газа плотность их уменьшается и наоборот.

Уравнение, связывающее между собой плотность, давление и температуру:  $f(\rho, p, T) = 0$  называется уравнением состояния жидкости или газа.

Для газов самым распространенным уравнением состояния является уравнение состояния идеального газа Клапейрона-Менделеева:

$$pV = \frac{m}{\mu} R_0 T, \quad (1.4)$$

в котором  $\mu$  – молярная масса газа,  $R_0$  – универсальная газовая постоянная.

Разделив это выражение на  $V$  и определив  $R_0/\mu$  как  $R$  – газовую постоянную, уравнение Клапейрона-Менделеева (1.4) можно записать в виде

$$p = R\rho T, \quad (1.5)$$

в котором оно и будет использоваться в дальнейшем.

Наряду с уравнением Клапейрона-Менделеева часто используемым является уравнение состояния при адиабатном процессе,  $pV^k = \text{const}$ . Разделив это уравнение на  $m^k$ , получим уравнение адиабаты в следующем виде:

$$p = \text{const } \rho^k, \quad (1.6)$$

пригодном для использования в задачах механики газов.

Для жидкостей такого универсального уравнения состояния как уравнение Клапейрона-Менделеева для газов не существует.

В связи с этим для них используются приближенные уравнения состояния, наиболее распространенными из которых являются линейные зависимости плотности от температуры и давления.

Для их получения используется известный математический прием разложения функций в ряд Тейлора в некоторой точке и их линеаризации при малом приращении аргумента:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x_0} (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right)_{x_0} (\Delta x)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{d^4 f}{dx^4}\right)_{x_0} (\Delta x)^4 + \dots$$

При малом приращении аргумента  $\Delta x$  можно пренебречь всеми членами более высокого порядка по  $\Delta x$ , чем первый, и приближенно записать:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} \Delta x.$$

Именно такому разложению обязаны хорошо известные соотношения  $\sin x \approx x$ ,  $\ln(1+x) \approx x$  и т.п. при малых значениях  $x$ .

### **Зависимость плотности жидкости от температуры.**

Применим этот подход для установления простейшей зависимости плотности жидкости от температуры  $\rho = \rho(T)$ .

Пусть при некоторой температуре  $T_0$  плотность жидкости имеет значение  $\rho_0 = \rho(T_0)$ . Тогда при изменении температуры на величину  $\Delta T$  для значения плотности при температуре  $T = T_0 + \Delta T$ , используя разложение в ряд Тейлора, можно записать

$$\rho(T) = \rho(T_0 + \Delta T) = \rho(T_0) + \left(\frac{d\rho}{dT}\right)_{T_0} \Delta T = \rho_0 \left[ 1 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dT}\right)_{T_0} \Delta T \right]. \quad (1.7)$$

Для практического использования этой формулы вводится следующая величина  $\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dT}\right)_{T_0}$ , которая называется коэффициентом теплового расширения жидкости.

Поскольку с ростом температуры у большинства жидкостей плотность уменьшается и производная  $d\rho/dT$  меньше нуля, постольку для положительного значения коэффициента  $\beta_T$  он определяется через эту производную со знаком минус.

Согласно определению, размерность и единица измерения коэффициента теплового расширения  $\beta_T$  есть  $K^{-1}$  и он является одной из физических характеристик жидкости.

С учетом этого приближенную, но максимально простую, формулу для зависимости плотности жидкости от температуры можно записать в следующем виде

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0)]. \quad (1.8)$$

Знак минус перед  $\beta_T$  в этой формуле означает, что с ростом температуры при положительном значении этого коэффициента плотность жидкости уменьшается.

Эта же формула в принятом приближении может быть использована и для описания зависимости объема жидкости  $V$  от температуры, только перед  $\beta_T$  необходимо поставить знак плюс, что будет означать, что с ростом температуры объем жидкости увеличивается:

$$V(T) = V_0 [1 + \beta_T (T - T_0)]. \quad (1.9)$$

Для использования этих формул необходимо знание коэффициента теплового расширения жидкости, значения которого для разных жидкостей при разных значениях температуры находятся в справочниках по теплофизическим свойствам веществ, а, например, для воды приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 Коэффициент теплового расширения воды

Температура, °С	$\beta_T, K^{-1}$
5 - 10	$0,53 \cdot 10^{-4}$
10 - 20	$1,50 \cdot 10^{-4}$
20 - 40	$3,02 \cdot 10^{-4}$
40 - 60	$4,58 \cdot 10^{-4}$
60 - 80	$5,87 \cdot 10^{-4}$

Как уже было сказано, коэффициент теплового расширения жидкостей есть величина положительная. То есть при понижении температуры плотность их увеличивается, а объем уменьшается.

Однако, из этого правила есть одно уникальное исключение, связанное с поведением воды при температуре, близкой к ее замерзанию. А именно, в диапазоне температур от 4-х до 0 °С при понижении температуры вода расширяется, плотность ее уменьшается, а объем увеличивается. Причем при температуре 0 °С вода, превращаясь в лёд, скачком уменьшает свою плотность и соответственно увеличивает объём примерно на 8 % с 999,8 кг/м<sup>3</sup> до 916,2 кг/м<sup>3</sup>, (таблица 1.3).

Таким образом, максимальное значение плотности вода имеет при температуре 4 °С и оно равно 1000 кг/м<sup>3</sup>.

Таблица 1.3 Температурная зависимость плотности воды и льда

	Температура, °С	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Вода	20	998,2
	4	1000
	2	999,9
	0,01	999,8
Лед	0	916,2
	-5	917,5
	-100	925,7

Поскольку плотность льда меньше плотности воды он плавает на поверхности воды. Тогда становится понятным, зачем природа наделила воду таким уникальным свойством. То обстоятельство, что лед, плавает на поверхности воды и не опускается на дно, позволяет находящимся под ним слоям воды иметь положительную температуру и затрудняет промерзание природных водоемов до дна. Тем самым это способствует сохранению жизни в них даже при низких внешних температурах.

#### **Зависимость плотности жидкости от давления.**

По аналогии с формулой (1.6) можно получить и приближенную линейную зависимость плотности жидкости от давления

$\rho = \rho(p)$ , заменив температуру  $T$  на давление  $p$ :

$$\rho(p) = \rho(p_0 + \Delta p) = \rho_0 \left[ 1 + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{d\rho}{dp} \right)_{p_0} (p - p_0) \right], \quad (1.10)$$

где  $\rho_0$  – есть значение плотности при давлении  $p_0$ :  $\rho_0 = \rho(p_0)$ .

Для практического использования в этой формуле вводят коэффициент сжимаемости среды  $\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{d\rho}{dp} \right)_{p_0} = \beta_p$ .

Таким образом, коэффициент сжимаемости становится еще одной характеристикой среды. В соответствии с определением, размерность и единица измерения коэффициента сжимаемости есть  $\text{Па}^{-1}$ .

Тогда формула (1.10) окончательно принимает вид:

$$\rho(p) = \rho_0 \left[ 1 + \beta_p (p - p_0) \right]. \quad (1.11)$$

Знак плюс перед вторым слагаемым в скобках показывает, что с ростом давления плотность жидкостей увеличивается, а, соответственно, объем уменьшается, то есть жидкость сжимается.

**Сжимаемостью**, будем называть способность жидкостей и газов изменять плотность при изменении давления. Количественно сжимаемость характеризуется отношением изменения плотности к величине соответствующего изменения давления,  $d\rho/dp$ . Чем больше эта величина, то есть, чем больше изменение плотности при том же изменении давления, тем лучше сжимаема среда. Сжимаемость газов много больше, чем жидкостей. Обратная величина характеризует скорость звука  $v_{зв}$  в жидкостях и газах:

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (1.12)$$

Таким образом, чем лучше сжимаемость среды, тем скорость звука в ней меньше, и наоборот. Соответственно, скорость звука в жид-

костях намного больше, чем в газах. Так, например, скорость звука в воздухе при нормальных условиях равна 331 м/с, а в воде – 1403 м/с.

Для скорости звука в газах из (1.12) можно получить простое аналитическое выражение, считая процесс распространения звука адиабатным, что лучше всего соответствует действительности, и используя уравнения Клапейрона-Менделеева (1.5) и адиабаты (1.6) :

$$v_{зв} = \sqrt{kRT} . \quad (1.13)$$

Среду, для которой сжимаемостью можно пренебречь ввиду ее малости, будем называть несжимаемой. Условием несжимаемости среды будет являться:  $\rho = \text{const}$  . Чаще всего это условие применимо к реальным жидкостям.

С учетом (1.11) можно установить связь между коэффициентом сжимаемости и скоростью звука

$$\beta_p = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{d\rho}{dP} \right)_{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0 v_{зв}^2} .$$

### 1.2.3. Поверхностное натяжение

В силу своего агрегатного состояния, которое, в отличие от газов, позволяет жидкостям сохранять свой объем, они обладают способностью иметь четкую границу с окружающим их газом. Такую границу раздела между жидкостью и газом будем называть свободной поверхностью жидкости. Благодаря своему промежуточному положению между жидкостью и газом, свободная поверхность жидкости обладает особыми специфическими свойствами.

Часто явления, имеющие место на свободной поверхности, называют капиллярными явлениями. Они играют значительную роль в природе и технике. Ими обуславливается транспорт жидкостей в теле растений, почве и других пористых телах. Они определяют процессы тепло- и массопереноса в таких телах при их сушке и обезвоживании. Они играют определяющую роль при формировании ка-

пель жидкостей в разнообразных распылительных системах тепло- и массообменных устройств, в частности, в системах подачи топлива в камеры сгорания. Их использование дало возможность создания новых теплообменных устройств – капиллярно-пористых тепловых труб с очень высокими коэффициентами теплопередачи.

Особые свойства свободной поверхности жидкости связаны с особым характером межмолекулярного взаимодействия на границах раздела жидкостей с газами. Для того, чтобы представить это яснее, рассмотрим слой жидкости с границей раздела, отделяющей жидкость от ее собственного пара (см. рис.1.5). Любая молекула А, находящаяся в глубине жидкости, окружена со всех сторон такими же молекулами. Поэтому результирующая сила, действующая на нее со стороны этих молекул, будет равна нулю. Совсем по другому обстоит дело с молекулой В, находящейся на свободной поверхности, которая, с одной стороны, окружена молекулами жидкости, а с другой - молекулами пара. Концентрация молекул жидкости значительно больше, чем пара. Соответственно, на эту молекулу будет действовать результирующая сила  $F_p$ , направленная вглубь жидкости, поскольку притягивающее действие молекул жидкости сильнее, чем молекул пара.

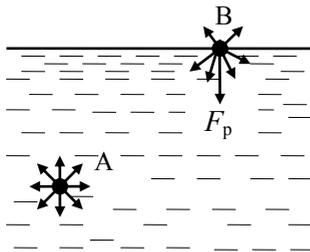


Рис. 1.5

Из этого следует, что для того, чтобы перевести молекулу из глубины объема жидкости на поверхность, требуется совершить некоторую работу против этой силы, то есть сообщить молекуле дополнительную энергию.

Таким образом, молекулы на поверхности жидкости обладают избыточной энергией по сравнению с внутренними молекулами. Другими словами, свободная поверхность жидкости, как совокупность таких молекул, обладает некоторой собственной энергией. При изменении площади свободной поверхности на  $dS$  ее энергия изменяется на некоторую величину  $dU_s$ , поскольку изменяется число молекул на ней. Так как число таких молекул пропорционально площади поверхности, то можно заключить, что изменение

поверхностной энергии пропорционально изменению площади свободной поверхности

$$dU_S = \sigma dS. \quad (1.14)$$

Коэффициент пропорциональности в этом выражении  $\sigma$  называется *коэффициентом поверхностного натяжения* и имеет размерность  $\text{Дж/м}^2 = \text{Н/м}$ .

**Физический смысл коэффициента поверхностного натяжения заключается в том, что он численно равен работе, которую нужно совершить для увеличения свободной поверхности жидкости на единицу при постоянной температуре.**

Практически каждый человек в своей жизни когда-нибудь совершал работу по увеличению свободной поверхности жидкости. И происходило это в процессе надувания, так называемых «мыльных пузырей», оболочка которых представляет собой не что иное, как тонкую пленку жидкости со свободной поверхностью. После прекращения совершения этой работы «мыльный пузырь» самопроизвольно схлопывается, уменьшая свою поверхность, и при этом сам способен совершать работу.

Коэффициент поверхностного натяжения является одной из характеристик жидкости и его значения находятся в справочниках по свойствам жидкостей.

Коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры и уменьшается с ее ростом. Для воды его значения приведены в таблице 1.4.

Таблица 1.4 Коэффициент поверхностного натяжения воды при различных температурах

$t, ^\circ\text{C}$	0	30	60	90
$\sigma, \text{Н/м}$	0,0756	0,0712	0,0662	0,0608

Наличие у жидкости поверхностной энергии приводит к тому, что наиболее естественной формой для свободного объема жидкости является шар со сферической поверхностью.

Это является следствием общего принципа минимума энергии, которому удовлетворяют все природные процессы, и который заключается в том, что всякая система стремится к такому состоянию равновесия, при котором её свободная энергия минимальна. Поскольку поверхностная энергия пропорциональна площади поверхности, это означает, что в равновесии площадь свободной поверхности жидкости стремится к минимальному значению. Однако, известно, что тело заданного объёма имеет наименьшую поверхность в том случае, когда оно принимает форму шара. Именно поэтому свободные капли жидкости в невесомости имеют сферическую форму.

В дальнейшем, объем жидкости, полностью окруженный свободной поверхностью, будем называть каплей, а объем газа, полностью окруженный свободной поверхностью жидкости, – пузырем.

Таким образом, свободная поверхность жидкости всегда стремится иметь искривленную форму.

С учетом того, что на поверхностные молекулы действуют силы, направленные вглубь жидкости, давление внутри жидкости  $p_{\text{ж}}$  становится больше, чем в окружающем ее газе  $p_{\text{г}}$  и изменяется скачком переходе через свободную поверхность. Это изменение давления называется капиллярным скачком давления  $\Delta p_{\text{к}}$ :

$$\Delta p_{\text{к}} = p_{\text{ж}} - p_{\text{г}}.$$

Капиллярный скачок давления зависит от кривизны поверхности в точке перехода через нее.

Капиллярный скачок давления в общем случае пропорционален средней кривизне поверхности, а коэффициентом пропорциональности служит коэффициент поверхностного натяжения, что описывается *формулой Лапласа*

$$\Delta p_{\text{к}} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.15)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны поверхности. Кривизной плоской кривой в данной точке называется величина, обратная радиусу кривизны и, соответственно, измеряемая в  $\text{м}^{-1}$ . А радиус кривиз-

ны кривой определяется как радиус окружности, дуга которой совпадает с дугой кривой в данной точке. В силу того, что при пересечении искривленной поверхности плоскостью, проходящей через нормаль к ней в данной точке, в зависимости от выбора направления, в плоскости сечения получаются различные плоские кривые, а таких плоскостей сечения может быть бесконечное множество, радиусов кривизны поверхности в данной точке тоже имеется бесконечное множество. Из этого бесконечного множества наибольший  $R_1$  и наименьший  $R_2$  радиусы кривизны поверхности называются главными. Главные радиусы кривизны лежат во взаимно перпендикулярных сечениях. Средняя кривизна поверхности определяется величиной, обратной главным радиусам кривизны  $(1/R_1 + 1/R_2)$ .

Для выпуклой поверхности жидкости радиусы кривизны считаются положительными, для вогнутой – отрицательными. Соответственно, капиллярный скачок на выпуклой поверхности является величиной положительной, а на вогнутой – отрицательной, то есть давление в жидкости под выпуклой поверхностью больше, чем давление газа над ней, а под вогнутой – меньше.

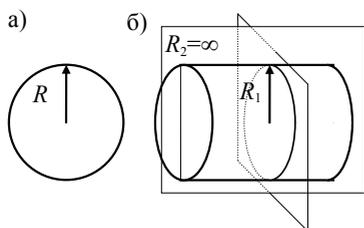


Рис. 1.6

Для сферической капли жидкости (рис. 1.6 а) главные радиусы кривизны равны друг другу и равны радиусу сферы ( $R_1 = R_2 = R$ ), поэтому давление внутри неё на величину  $\Delta p_k = 2\sigma/R$  больше наружного.

Для цилиндрического столба жидкости (рис.1.6б)) наименьший радиус кривизны равен радиусу цилиндра  $R_1 = R$ , а наибольший – бесконечности ( $R_2 = \infty$ ), поэтому для него  $\Delta p_k = \sigma/R$ .

Тот факт, что свободная поверхность жидкости стремится к уменьшению своих размеров, то есть сопротивляется растяжению, можно трактовать как то, что на свободной поверхности жидкости действуют силы, стремящиеся сократить ее площадь. Эти силы направлены по касательной к свободной поверхности и носят название **сил поверхностного натяжения**.

## Смачивание и несмачивание жидкостью твердых поверхностей.

Более сложная ситуация возникает при контакте между собой сред в виде трех агрегатных состояний: газообразной, жидкой и твердой. В этом случае явления на свободной поверхности жидкости

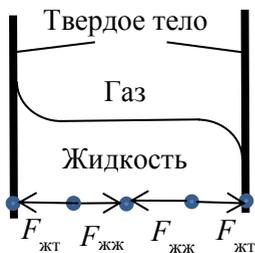


Рис. 1.7.

в месте контакта определяются также и взаимодействием молекул жидкости с молекулами твердого тела (рис. 1.7). Если сила притяжения между молекулами жидкости и твердого тела  $F_{жт}$  больше, чем у молекул жидкости  $F_{жж}$  между собой:  $F_{жт} > F_{жж}$ , то жидкость натекает на твердое тело и поверхность жидкости в месте контакта становится вогнутой, (левая часть рис. 1.7). В этом случае говорят, что жидкость смачивает твердое тело. Если же взаимодействие между молекулами жидкости и твердого тела слабее, чем молекул жидкости между собой  $F_{жт} < F_{жж}$ , то жидкость оттекает от твердой поверхности и поверхность ее приобретает выпуклую форму, (правая часть рис. 1.7). В этом случае жидкость не смачивает твердое тело.

### Капля жидкости на плоскости.

От условий смачивания твердой поверхности зависит форма капли жидкости, лежащей на ней, рис. 1.8.

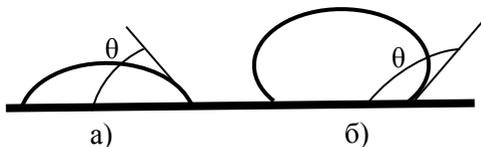


Рис. 1.8.

Если капля смачивает твердую поверхность, то в месте контакта с ней угол  $\theta$  между касательной к поверхности капли и плоскостью твердой поверхности внутри жидкости, острый, рис.1.8 а) и капля стремится растекаться по поверхности. Угол  $\theta$  называется краевым углом смачивания. В случае несмачивания краевой угол тупой и капля стремится принять шарообразную форму, рис. 1.8 б).

Если капля смачивает твердую поверхность, то в месте контакта с ней угол  $\theta$  между касательной к поверхности капли и плоскостью твердой поверхности внутри жидкости, острый, рис.1.8 а) и капля стремится растекаться по поверхности. Угол  $\theta$  называется краевым углом смачивания. В случае несмачивания краевой угол тупой и капля стремится принять шарообразную форму, рис. 1.8 б).

### Поднятие (опускание) жидкости в капилляре.

Хорошо известно, что, если в жидкость опустить капилляр, то уровень жидкости в капилляре будет отличаться от уровня жидкости в сосуде, в котором она находится, рис. 1.9.

Капилляром будем называть цилиндрическую трубку с достаточно малым поперечным размером, таким, чтобы на всем его протяжении явно проявлялось искривление

свободной поверхности жидкости, вызванное поверхностным натяжением.

Если жидкость смачивает стенки капилляра, то свободная поверхность жидкости имеет вогнутую форму и жидкость втягивается в капилляр, (рис.1.9 а). Если жидкость не смачивает стенки капилляра, то поверхность жидкости в капилляре выпуклая и жидкость выталкивается из капилляра (рис.1.9 б). При отсутствии других

сил действие поверхностного натяжения приведет к тому, что в случае смачивания жидкость полностью заполнит капилляр, а в случае несмачивания – полностью вытеснится из капилляра.

При действии силы тяжести она препятствует проникновению жидкости в вертикально опущенный в нее капилляр. Это приводит к тому, что в случае смачивания в капилляре устанавливается определенный уровень жидкости выше, чем в сосуде.

Вычислим высоту поднятия жидкости  $h$  в круглом капилляре радиуса  $R$  в соответствии с рис. 1.9 а) когда жидкость смачивает стенки капилляра.

Вследствие вогнутости свободной поверхности жидкости, форма которой в рассматриваемом случае близка к сферической, и в соответствии с формулой Лапласа (1.14) давление  $p_A$  в жидкости в точке А, находящейся непосредственно под поверхностью, будет на величину капиллярного скачка давления  $\Delta p_k = 2\sigma/R$  меньше, чем давление  $p_0$  газа над поверхностью жидкости:

$$p_A = p_0 - 2\sigma/R.$$

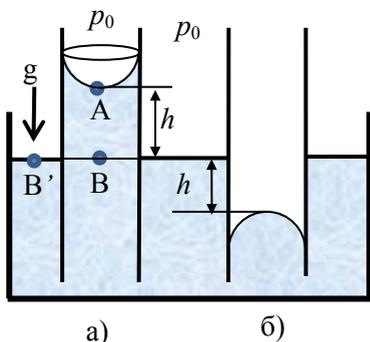


Рис. 1.9.

Рассмотрим в жидкости точку В, расположенную в той же горизонтальной плоскости, что и поверхность жидкости в сосуде вне капилляра. Эта точка находится на глубине  $h$  от точки А и, как известно, давление  $p_B$  в ней будет на величину  $\rho gh$  больше:

$$p_B = p_A + \rho gh = p_0 - 2\sigma/R + \rho gh.$$

С другой стороны точка В внутри капилляра, как было принято, находится в той же горизонтальной плоскости, что и точка В' на плоской поверхности жидкости вне капилляра, и давление  $p_B$  в которой равно давлению газа  $p_0$ :  $p_B = p_0$ . Поскольку точки В и В' находятся в одной горизонтальной плоскости, то, как известно, давление в них одинаково  $p_B = p_{B'} = p_0$ . Имея ввиду полученное выше выражение для  $p_B$ , в итоге получаем:

$$p_0 - 2\sigma/R + \rho gh = p_0.$$

Таким образом,  $\rho gh = 2\sigma/R$ . Это соотношение показывает, что равновесное положение жидкости в капилляре устанавливается, когда капиллярный скачок давления на ее поверхности  $2\sigma/R$  уравновешивается гидростатическим давлением в поле силы тяжести  $\rho gh$ . Окончательно для высоты поднятия жидкости в круглом капилляре получаем

$$h = \frac{2\sigma}{R}. \quad (1.16)$$

Этой же формулой определяется и уровень, на который жидкость опускается в случае несмачивания стенок капилляра (рис. 1.9 б).

### **Капиллярно-пористые материалы.**

В природе большое распространение имеют твердые материалы, в структуре которых существует большое количество мелких пустот (пор), размеры которых много меньше размеров тела и которые по сути представляют собой капилляры. При наличии выхода этих капилляров в окружающую среду в них из внешней среды может поступать жидкость. Примерами таких материалов являются древесина и многие другие растительные материалы, текстильные, строительные, сыпучие и порошковые материалы, почва, кожа и т.п.

Если вещество капиллярно-пористого материала смачивается жидкостью, то она обладает способностью проникать в капилляры, а материал, как говорится, обладает способностью впитывать жидкость.

В противном случае – материал препятствует проникновению жидкости в него. На основе таких материалов, в частности, создаются водонепроницаемые ткани, которые способны пропускать воздух, но не влагу.

Подобного рода материалы широкого используются в технических системах и бытовой практике.

### Капиллярный распад жидких струй.

Классическим примером объема жидкости с цилиндрической свободной поверхностью является вытекающая из круглого отверстия струя.

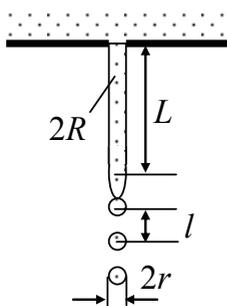


Рис.1.10.

Наблюдая за движением струи, нетрудно заметить, что на некотором расстоянии от отверстия, которое называется длина нераспавшейся части струи  $L$ , она перестает быть сплошным цилиндром и распадается на отдельные капли. Это явление называется капиллярным распадом жидких струй и связано, с описанным выше свойством объемов жидкости со свободной поверхностью стремиться к шарообразной форме. Образование капель связано с развивающимися на поверхности струи возмущениями поверх-

ности, приводящими к формированию из цилиндрических участков струи определенной длины объемов шарообразной формы, как имеющих меньшую энергию. При этом радиус образующихся капель  $r$  примерно в два раза больше радиуса струи  $R$ :  $r=1,89R$ . Существование нераспавшегося участка струи связано с тем, что процесс образования капель требует конечного времени  $\tau$ , за которое струя успевает пройти некоторое расстояние без распада. Характерное время образования капель определяется соотношением  $\tau \sim (\rho R^3 / \sigma)^{1/2}$ . Если скорость истечения жидкости из отверстия равна  $v$ , то длина нерас-

павшейся части струи определяется соотношением  $L = v \tau \sim v (\rho R^3 / \sigma)^{1/2}$ .



Рис. 1.11.

Капиллярный распад жидких струй лежит в основе технологии получения распыленных потоков жидкости при их истечении через форсунки.

Эти технологии широко используются для распыла жидкого топлива перед его сжиганием, для нанесения лакокрасочных покрытий, создания аэрозолей и т.п. (рис. 1.11).

## 2. СТАТИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

### 2.1. Основные положения статики жидкостей и газов. Классификация сил, действующих в жидкостях и газах.

Как и механика вообще, механика жидкостей и газов включает в себя три больших раздела: статика, кинематика и динамика, из которых далее будет рассмотрен только первый раздел.

Статика изучает условия механического равновесия жидкостей и газов под действием приложенных к ним сил и их моментов, то есть изучает процессы в неподвижных или движущихся как целое жидкостях и газах.

При этом основными задачами статики являются:

- 1) определение условий, при которых возможно механическое равновесие в жидкостях и газах;
- 2) определение распределения давления в покоящихся или движущихся как целое жидкостях и газах;
- 3) определение сил давления, действующих на тела, погруженные в жидкости и газы;
- 4) определение формы свободной поверхности равновесных объемов жидкости под действием приложенных к ним сил.

Силы, действующие в жидкостях и газах делятся на два класса: силы **массовые** и силы **поверхностные**.

К массовым или объемным силам относятся силы, которые действуют на каждую частицу объема жидкости или газа и их результирующая определяется суммой сил, действующих на каждую такую частицу.

Для локальной характеристики массовых сил в каждой точке объема среды вводится понятие «напряжение массовой силы»  $\vec{f}(x, y, z)$ , которое определяется как отношение массовой силы  $d\vec{F}_M$ , действующей на частицу жидкости с массой  $dm$ , к массе этой частицы:

$$\vec{f} = d\vec{F}_M / dm .$$

Согласно определению, размерность напряжения массовой силы есть  $m/c^2$  и совпадает с размерностью ускорения.

Имея ввиду, что  $dm = \rho dV$  и зная распределение напряжения массовой силы по объему среды, можно вычислить полную массовую силу  $\vec{F}_M$ , действующую на любой объем жидкости или газа:

$$\vec{F}_M = \int_V \vec{f}(x, y, z) dm = \int_V \rho(x, y, z) \vec{f}(x, y, z) dV .$$

Таким образом, величина массовой силы пропорциональна объему среды или кубу его линейных размеров  $l$ :  $F_M \sim V \sim l^3$ .

Наиболее распространенными массовыми силами являются сила тяжести  $\vec{F}_T = m\vec{g}$  и сила инерции  $\vec{F}_И$ . Учитывая, что эти силы, действующие на тело с массой  $m$ , равны:  $\vec{F}_T = m\vec{g}$ ,  $\vec{F}_И = -m\vec{a}$  (где  $\vec{g}$  – ускорение силы тяжести,  $\vec{a}$  – ускорение, с которым движется тело), напряжения этих сил равны, соответственно,  $\vec{f}_T = \vec{g}$ ,  $\vec{f}_И = -\vec{a}$ .

К поверхностным силам относятся силы, которые действуют только на границах рассматриваемых объемов жидкости или газа.

Для локальной характеристики поверхностной силы в каждой точке поверхности объема вводится понятие «напряжение поверхностной силы»  $\vec{\sigma}(x, y, z)$ , которое определяется как отношение поверхностной силы  $d\vec{F}_{пов}$ , действующей на элемент поверхности  $dS$ , к площади этого элемента:

$$\vec{\sigma} = d\vec{F}_{\text{пов}} / dS .$$

Согласно определению, размерность напряжения поверхностной силы есть Н/м<sup>2</sup>, а единица ее измерения носит название Паскаль, Па.

Зная распределение напряжения поверхностной силы по поверхности объема среды, можно вычислить полную поверхностную силу  $\vec{F}_{\text{пов}}$ , действующую на поверхности любого объема жидкости или газа:

$$\vec{F}_{\text{пов}} = \int_S \vec{\sigma}(x, y, z) dS .$$

Таким образом, величина поверхностной силы пропорциональна площади поверхности объема среды или квадрату его линейных размеров  $l$ :  $F_{\text{пов}} \sim S \sim l^2$ .

Наиболее распространенными поверхностными силами являются сила давления  $F_{\text{д}}$ , сила вязкого трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , сила поверхностного натяжения.

Поскольку силы давления всегда действуют по нормали к поверхности, постольку для их определения достаточно задания их модуля. Поэтому напряжение силы давления  $p$  является скалярной величиной и называется просто давлением,

$$p = dF_{\text{д}} / dS .$$

Напряжение сил вязкого трения определяется законом вязкого трения Ньютона (1.2).

## 2.2. Равновесие жидкостей и газов в отсутствии массовых сил. Закон Паскаля.

Если жидкость или газ находятся в равновесии, это означает, что результирующая всех сил, действующих на каждую частицу среды равна нулю и, соответственно равны нулю ее проекции на каждую из осей координат.

В связи с этим, введем в некоторой точке объема среды декартову систему координат  $(x, y, z)$  и рассмотрим условия равновесия жидкой частицы, находящейся в этой точке. Для простоты рассмотрения, выберем форму частицы в виде тетраэдра, три грани которого расположены в координатных плоскостях, а четвертая – замыкающая – под наклоном к ним (рис. 2.1). Нормальными к первым трем граням будут являться оси координат, а единичный вектор внешней нормали к замыкающей грани обозначим  $\vec{n}$ . Площади граней  $dS_x, dS_y, dS_z, dS_n$  будем отмечать нижним индексом, соответствующим обозначению нормали к ним. На каждую из граней в перпендикулярном к ней направлении будет действовать давление среды  $p_x, p_y, p_z, p_n$ , величину которого для каждой грани также будем отмечать нижним индексом, соответствующим обозначению нормали к ней.

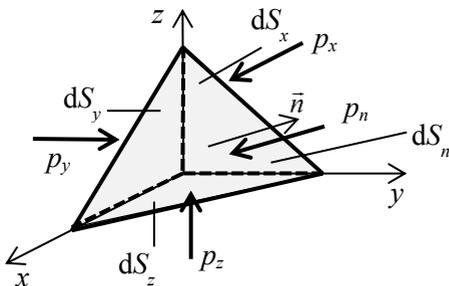


Рис. 2.1

Сила давления, действующая на площадку  $dS_n$ , направлена противоположно направлению внешней нормали к ней и будет определяться следующим образом.

Как известно, единичный вектор имеет своими проекциями на оси координат косинусы углов, которые он составляет с соответствующими осями:

$$\vec{n} = [\cos(n\hat{x}), \cos(n\hat{y}), \cos(n\hat{z})].$$

Рассматриваемая частица будет находиться в равновесии, если геометрическая сумма проекций сил давления, действующих на нее, на каждую из осей координат будет равна нулю.

Например, на ось  $z$  ненулевую проекцию будут иметь только сила давления, действующая на грань  $dS_z$ , равную  $p_z dS_z$ , а также сила давления  $d\vec{F}_n$ , проекция которой равна:

$$-p_n \cos(n\hat{z}) dS_n.$$

Для покоящейся частицы сумма этих проекций должна быть равна нулю:

$$p_z dS_z - p_n \cos(n\hat{z}) dS_n = 0 \text{ или } p_z dS_z = p_n \cos(n\hat{z}) dS_n.$$

Аналогичным образом можно получить соответствующие условия равновесия в проекции и на другие оси координат, что в итоге выльется в следующие соотношения:

$$\begin{aligned} p_x dS_x &= p_n \cos(n\hat{x}) dS_n, \\ p_y dS_y &= p_n \cos(n\hat{y}) dS_n, \\ p_z dS_z &= p_n \cos(n\hat{z}) dS_n. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Каждая из граней  $dS_x$ ,  $dS_y$ ,  $dS_z$  есть не что иное, как проекция наклонной грани на плоскость, в которой они лежат. Согласно правилам проецирования площадь проекции будет равна площади исходной фигуры, умноженной на косинус угла между нормалью к ней и к плоскости проекции Поэтому:

$$dS_x = dS_n \cos(n\hat{x}), \quad dS_y = dS_n \cos(n\hat{y}), \quad dS_z = dS_n \cos(n\hat{z}).$$

С учетом этого, из условий равновесия (2.1) получаем:

$$p_x = p_y = p_z = p_n = p$$

и, соответственно, закон Паскаля, который гласит, что **давление в покоящихся жидкости или газе в данной точке не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.**

Другими словами, давление в жидкости или газе действует по всем направлениям одинаково.

### **2.3. Равновесие жидкостей и газов в присутствии массовых сил. Основное дифференциальное уравнение статики жидкостей и газов.**

Определим условия равновесия жидкости или газа, при действии на них массовых сил.

Для этого в некоторой точке среды расположим декартову систему координат и выделим элементарную частицу в форме параллелепипеда, одна из вершин которого находится в начале координат,

грани лежат в координатных плоскостях, а длины ребер равны, соответственно,  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 2.2).

На каждую из граней частицы перпендикулярно им действует давление среды  $p$ , значение которого соответствует местоположению грани, а на объем частицы действует массовая сила с напряжением  $\vec{f}$ .

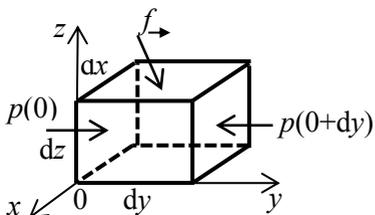


Рис. 2.2

Частица будет находиться в равновесии и покоиться, если результирующая всех сил, действующих на нее, будет равна нулю. Это также означает, что должна быть равна нулю каждая из проекций этой результирующей силы на оси координат.

Рассмотрим, например, проекции на ось  $y$  всех сил, действующих на частицу, имея ввиду, что давление всегда действует по нормали к поверхности. Таковыми будут:

1) сила давления, действующая на левую грань частицы в положительном направлении оси  $y$  и равная произведению среднего давления  $p(y=0)$  в месте нахождения этой грани при  $y=0$  на площадь этой грани  $dx dz$ :  $p(y=0) dx dz$ ;

2) сила давления, действующая на правую грань частицы в противоположном оси  $y$  направлении и равная также произведению среднего давления  $p(y=0+dy)$  в месте нахождения этой грани при  $y=0+dy$  на площадь этой грани  $dx dz$ :  $-p(y=0+dy) dx dz$ ;

3) проекция на ось  $y$  массовой силы, равная произведению  $y$ -проекции напряжения массовой силы  $f_y$  на массу частицы  $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$ :  $\rho f_y dx dy dz$ . Силы давления, действующие на другие грани частицы, проекции на ось  $y$  иметь не будут.

Таким образом, условие равенства нулю  $y$ -проекции результирующей силы будет выглядеть следующим образом:

$$p(y=0) dx dz - p(y=0+dy) dx dz + \rho f_y dx dy dz = 0.$$

Величину  $p(y=0+dy)$  можно представить путем разложения в ряд Тейлора с точностью до линейных членов как

$$p(y=0+dy) = p(y=0) + \frac{\partial p}{\partial y} dy .$$

В рассматриваемой ситуации надо брать частную производную ( $\partial p/\partial y$ ) поскольку давление кроме  $y$  зависит также от других переменных  $x$  и  $z$ .

Подставив это разложение в полученное условие равновесия, последнее можно переписать в виде:

$$p(y=0)dx dz - p(y=0)dx dz - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz + \rho f_y dx dy dz = 0,$$

которое после соответствующих сокращений станет следующим:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y .$$

Нетрудно понять, что, если аналогичным образом рассмотреть условия равновесия в проекции на другие оси  $x$  и  $z$ , то получим такие же соотношения с простой заменой  $y$  на  $x$  и  $z$ .

Таким образом, общие условия равновесия в жидкости или газе будут выглядеть следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho f_x, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho f_y, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho f_z \end{aligned} \tag{2.2}$$

Этими условиями определяется, как должно изменяться давление в жидкости или газе, если на них действуют массовые силы.

С точки зрения математики соотношения (2.2) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений первого по-

рядка в частных производных, из решения которой находится распределение давления  $p(x,y,z)$  при заданном распределении действующих массовых сил в правой части этих уравнений.

Эту систему уравнений можно записать более коротко в векторном виде. Для этого надо первое уравнение умножить на единичный вектор  $\vec{i}$  оси  $x$ , второе – на единичный вектор  $\vec{j}$  оси  $y$ , третье – на единичный вектор  $\vec{k}$  оси  $z$  и сложить их, имея ввиду, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} = \text{grad} p, \text{ а } f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} = \vec{f}.$$

$$\text{grad} p = \rho \vec{f} \quad (2.3)$$

Уравнения (2.2), (2.3) являются основным математическим инструментом для определения распределения давления в жидкостях и газах, находящихся под действием внешних массовых сил.

В дальнейшем будем называть их «дифференциальные уравнения гидростатики».

### 2.3.1. Условия возможности механического равновесия в однородной несжимаемой жидкости

Как оказывается, не при любых массовых силах жидкости и газы могут находиться в равновесии. Выясним, каким требованиям должны удовлетворять массовые силы, чтобы под их действием жидкости и газы могли покоиться.

Поскольку в покоящейся жидкости должны выполняться дифференциальные уравнения гидростатики (2.3), постольку вопрос об условиях возможности равновесия в жидкости сводится к вопросу об условиях справедливости уравнений (2.3).

Прежде всего рассмотрим ситуацию, когда жидкость однородна и несжимаема, то есть ее плотность постоянна,  $\rho = \text{const}$ .

Возьмем операцию ротор ( $\text{rot}$ ) от уравнения (2.3), имея ввиду, что ротор от градиента любой функции тождественно равен нулю,

$\text{rot}(\text{grad}p)=0$ . Тогда левая часть уравнения (2.3) обращается в нуль, а при условии  $\rho=\text{const}$  на  $\rho$  можно сократить и получить, что дифференциальные уравнения гидростатики могут выполняться только, если напряжение массовых сил удовлетворяет условию  $\text{rot}\vec{f}=0$ .

Из математики известно, что, если ротор какого-либо вектора равен нулю, то всегда можно ввести некую скалярную функцию  $\psi$ , через которую этот вектор определяется как ее градиент,  $\vec{f} = \text{grad}\psi$ . В этом случае функция  $\psi$  называется потенциалом вектора, а вектор называется потенциальным.

**Таким образом, приходим к выводу, что равновесие однородной несжимаемой жидкости возможно только под действием потенциальной массовой силы.**

Отметим, что сила тяжести является потенциальной и, если ось  $z$  направлена вдоль нее, то потенциал силы тяжести  $\psi_T$  имеет вид:  $\psi_T = \psi_{T0} + \rho gz$ .

### 2.3.2. Условие возможности механического равновесия в тяжелой неизотермической жидкости. Естественная конвекция.

Рассмотрим на предмет возможности равновесия жидкости более сложную ситуацию, когда распределение плотности по ее объему неоднородно. В частности, это может быть следствием неоднородного распределения температуры в жидкости, от которой зависит ее плотность,  $\rho = \rho[T(x,y,z)]$ .

Опять возьмем операцию ротор  $\text{rot}$  от уравнения (2.3) и распишем ротор от правой части этого уравнения согласно правилам математического анализа, приравняв его нулю:  $\text{rot}(\rho\vec{g}) = \rho(\text{rot}\vec{g}) + [\text{grad}\rho \times \vec{g}] = 0$ .

Приняв во внимание, что  $\vec{g}$  есть постоянный вектор и  $\text{rot}\vec{g} = 0$ , опять получим, что дифференциальные уравнения гидростатики могут выполняться только, если выполняется условие

$$[\text{grad}\rho \times \vec{g}] = 0, \quad (2.4)$$

которое одновременно является и условием возможности механического равновесия в жидкости.

Как известно, векторное произведение двух ненулевых векторов обращается в нуль, если эти вектора коллинеарны.

**Таким образом, приходим к выводу, что механическое равновесие в жидкости или газе с неоднородным распределением плотности в поле силы тяжести возможно только, если градиент плотности коллинеарен вектору силы тяжести.**

Если это условие не выполняется, то механическое равновесие жидкости или газа невозможно и они обязательно должны придти в движение, что действительно наблюдается на практике.

Такого рода движение жидкостей или газов, возникающее в них в поле силы тяжести при неоднородном распределении их плотности, называется естественной или свободной конвекцией.

Естественная конвекция играет важную роль как в природных процессах, так и в технических системах, обеспечивая, в частности, один из механизмов переноса тепла, в том числе и в жилых помещениях.

Физический механизм естественной конвекции связан с известным механизмом действия силы Архимеда, когда объемы жидкости или газа с меньшей плотностью всплывают в область среды с большей плотностью, из которой в свою очередь более плотные объемы опускаются вниз (тонут).

Если неоднородность плотности среды обусловлена ее зависимостью от неоднородности температуры  $\rho = \rho[T(x,y,z)]$ , то

$$\text{grad}\rho = (d\rho/dT)\text{grad}T,$$

и условие (2. ) превращается в условие, которому должен удовлетворять градиент температуры,

$$[\text{grad}T \times \vec{g}] = 0, \quad (2.5)$$

и из которого следует, что **механическое равновесие в жидкости или газе с неоднородным распределением температуры в по-**

ле силы тяжести возможно только, если градиент температуры коллинеарен вектору силы тяжести,  $\text{grad} T \parallel \vec{g} = 0$  (рис. 2.3).

Или другими словами, это равновесие возможно только при равномерном нагреве среды снизу или сверху, (рис. 2.3). При нагреве сбоку в жидкости или газе обязательно возникнет естественная кон-

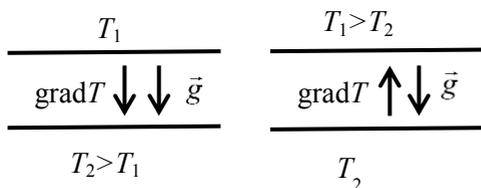


Рис. 2.3

векция, которая в этом случае будет называться тепловой естественной конвекцией.

Как показывает опыт, несмотря на возможность механического равновесия в определенных выше случаях, оно не всегда является устойчивым.

Так, например, при

нагреве снизу у обычных жидкостей плотность нижних слоев с более высокой температурой оказывается меньше плотности верхних и

частицы среды с большей температурой и меньшей плотностью стремятся всплывать под действием силы Архимеда, а частицы верхних более холодных слоев стремятся тонуть. В результате, при определенном значении перепада температур, который называется критическим, даже при равномерном нагреве снизу существующее в жидкости или газе равновесие становится неустойчивым и в них возникает замкнутое естественноконвективное течение (рис. 2.4).

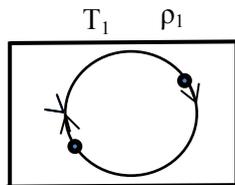


Рис. 2.4

Соответственно, такая ситуация является невозможной при нагреве жидкости или газа сверху, где будут находиться слои с меньшей плотностью. Поэтому, **при равномерном нагреве сверху механическое равновесие жидкости или газа будет устойчивым, а естественная конвекция невозможна.**

В связи с этим, можно еще раз обратить внимание на уникальное свойство воды в температурном диапазоне от  $0^{\circ}\text{C}$  до  $4^{\circ}\text{C}$ , когда коэффициент теплового расширения меняет знак и становится отрица-

тельным, а большему значению температуры соответствует большее значение плотности (см п. 1.2.2). В этих условиях, сделанные выше выводы относительно устойчивости равновесия меняются на прямо противоположные и равновесие жидкости при нагреве снизу становится устойчивым. Поэтому, в природных водоемах при понижении внешней температуры поверхности водоема до  $0^{\circ}\text{C}$  и сохранении температуры внутри него до  $4^{\circ}\text{C}$ , то есть при нагреве водоема снизу, естественная конвекция прекращается, холодные верхние слои воды не опускаются на дно и полное промерзание водоема затрудняется. Результатом этого является поддержание жизни в этих водоемах.

## 2.4. Распределение давления в тяжелой несжимаемой жидкости

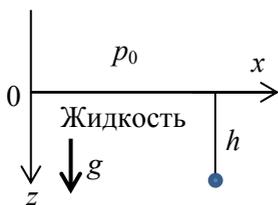


Рис. 2.5

Пусть несжимаемая жидкость ( $\rho = \text{const}$ ) находится в поле силы тяжести, в направлении которой расположим ось  $z$  (рис. 2.5). Тогда напряженные силы тяжести будет иметь следующие проекции:  $\vec{f} = \vec{g} = [0, 0, g]$ , а дифференциальные уравнения гидростатики (2.3) примут вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g.$$

Из первых двух уравнений следует, что в рассматриваемом случае давление не зависит от координат  $x$  и  $y$ , то есть не изменяется в горизонтальной плоскости.

Общим решением третьего из этих уравнений  $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$  является:

$$p = \rho g z + C,$$

в котором произвольная постоянная  $C$  должна определяться из дополнительных граничных условий. Разместим начало отсчета  $z=0$  координаты  $z$  на свободной поверхности жидкости, давление газа

над которой будем считать известным и равным  $p_0$ . Тогда требуемое граничное условие будет выглядеть следующим образом:

$$p = p_0 \text{ при } z=0.$$

В этом случае для произвольной постоянной  $C$  получается значение  $C = p_0$  и частное решение дифференциальных уравнений гидростатики, удовлетворяющее принятому граничному условию, примет вид

$$p = p_0 + \rho g z \quad (2.6)$$

и будет описывать распределение давления в жидкости в рассматриваемой ситуации.

Часто вместо координаты  $z$  вводят понятие глубина в жидкости  $h$ , как расстояние от поверхности до рассматриваемой точки, и записывают выражение (2.6) в виде:

$$p = p_0 + \rho g h \quad (2.7)$$

Согласно (2.7), **давление в несжимаемой жидкости в поле силы тяжести линейно увеличивается с глубиной.**

Полезно отметить, что в воде с  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$  при  $g \approx 10 \text{ м/с}^2$  и  $h = 10 \text{ м}$  величина  $\rho g h$  принимает значение  $10^5 \text{ Па} \approx 1 \text{ атм}$ . То есть на каждые десять метров глубины в воде давление увеличивается примерно на одну атмосферу.

Назовем поверхностью уровня поверхность, на которой давление в жидкости имеет постоянную величину,  $p = \text{const}$ . Из (2.6) нетрудно видеть, что уравнение такой поверхности в рассматриваемом случае имеет вид  $z = \text{const}$  и описывает горизонтальную плоскость.

Таким образом, **поверхности уровня или изобарические поверхности в несжимаемой жидкости в поле силы тяжести представляют собой горизонтальные плоскости.**

С другой стороны, в любых точках жидкости, лежащих в одной горизонтальной плоскости давление будет одинаково.

Поскольку свободная поверхность жидкости представляет собой поверхность с постоянным давлением газа над ней, постольку **сво-**

**бодная поверхность жидкости в поле силы тяжести имеет форму горизонтальной плоскости.**

### Сообщающиеся сосуды.

Назовем сообщающимися сосуды, между которыми возможно свободное перетекание жидкости, рис. 2.6. Если все сосуды открыты в среду с одинаковым давлением газа, то в соответствии с вышесказанным, поверхности жидкости в них будут находиться в одной горизонтальной плоскости независимо от формы сосуда.

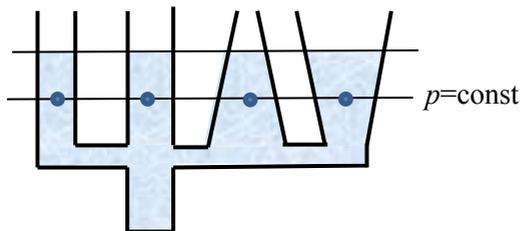


Рис. 2.6

Кроме того, в этих сосудах в точках, лежащих в одной горизонтальной плоскости, давление будет одинаково.

### Жидкостный манометр.

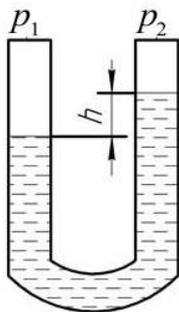


Рис. 2.7

Описанные выше свойства сообщающихся сосудов дают возможность использовать их в качестве прибора для измерения давления – жидкостного манометра, основным элементом которого чаще всего является U-образная трубка, заполненная жидкостью, рис. 2.7. Если концы трубки соединены со средами с разными давлениями  $p_1$  и  $p_2$ , то под действием разности давлений в трубке установится разность уровней жидкости  $h$ . Поскольку давление в горизонтальной плоскости, проходящей через нижний уровень жидкости, в обеих частях трубки одинаково, а с одной стороны трубки оно равно  $p_1$ , а с другой  $p_2 + \rho gh$ , то

$$p_1 = p_2 + \rho gh \text{ или } p_1 - p_2 = \rho gh.$$

Таким образом, измеряя  $h$ , можно легко определить, например, избыточное или вакуумметрическое давление, если один из концов трубки соединен с атмосферой.

## 2.5. Распределение давления в тяжелом сжимаемом газе

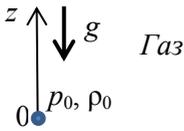


Рис. 2.8

При таком выборе направления оси  $z$  (рис. 2.8) напряжение силы тяжести будет иметь отрицательную проекцию на нее  $\vec{f} = \vec{g} = [0, 0, -g]$  и тогда

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad \text{или} \quad \rho = \frac{\rho_0}{p_0} p.$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho_0}{p_0} g p,$$

$$\frac{\partial p}{\partial p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dz.$$

Интегрируя это уравнение, получаем общее решение дифференциальных уравнений гидростатики в виде

$$\ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} g z + C. \quad (2.8)$$

Значение произвольной постоянной  $C$  определяется из граничного условия, определяющего положение начала отсчета координаты  $z$ . Естественно расположить его в той точке, в которой известны исходные значения давления  $p_0$  и плотности  $\rho_0$ . Например, для атмосферного воздуха такой точкой отсчета чаще всего выбирается уровень моря на поверхности Земли. Таким образом принимается, что  $p=p_0$ ,  $\rho=\rho_0$  при  $z=0$ . Тогда  $C = \ln p_0$  и частное решение дифференциальных уравнений гидростатики, удовлетворяющее принятому граничному условию, принимает вид

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{\rho_0} g z \quad \text{или} \quad z = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{p_0}{p} \quad (2.9)$$

и дает следующее распределение давления в газе

$$p = p_0 e^{\frac{-\rho_0 g}{p_0} z} \quad (2.10)$$

С учетом уравнения Клапейрона-Менделеева (1.5)  $p_0 = R\rho_0 T$  (2.10) также можно записать в виде

$$p = p_0 e^{\frac{-g}{RT} z} \quad (2.11)$$

Это выражение носит название барометрической формулы и из нее следует, что **давление в изотермическом газе в поле силы тяжести уменьшается с высотой по экспоненциальному закону.**

### **Альтиметр.**

Применительно к атмосфере Земли барометрическая формула связывает между собой высоту точки над уровнем моря и давление в этой точке. Поскольку измерение давления в любой точке может быть осуществлено достаточно просто с использованием манометра, постольку метод определения высоты по измеряемому давлению нашел широкое применение.

Прибор для определения высоты над уровнем моря, действие которого основано на использовании барометрической формулы, носит название барометрический альтиметр и широко используется в авиации, альпинистами, парашютистами и т.п.

Естественно, что в реальных альтиметрах делаются поправки и на понижение температуры воздуха с высотой, и на изменение состава воздуха с высотой.

## 2.6. Распределение давления в тяжелой несжимаемой жидкости в равномерно вращающемся сосуде

Пусть несжимаемая жидкость заполняет круговой цилиндрический сосуд, равномерно вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . При этом жидкость в сосуде также будет вращаться как целое (рис. 2.9). Жидкость находится в поле силы тяжести  $\vec{g}$  и кроме того на каждую частицу жидкости с массой  $\Delta m$  будет действовать сила инерции

$$\Delta \vec{F}_и = \Delta m \omega^2 \vec{r},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор частицы от оси вращения имеет проекции  $x, y$ , соответствующие координатам частицы. Ось  $z$  напомним вертикально вверх. Напряжение сил инерции  $\vec{f}_и$  в данном случае равно

$$\vec{f}_и = \Delta \vec{F}_и / \Delta m = \omega^2 \vec{r} = [\omega^2 x, \omega^2 y, 0].$$

Напряжение суммарной силы  $\vec{f}$ , действующей на частицу, имеет проекции на все оси координат, определяемые следующим образом:

$$\vec{f} = \vec{f}_T + \vec{f}_и = \vec{g} + \omega^2 \vec{r} = [\omega^2 x, \omega^2 y, -g].$$

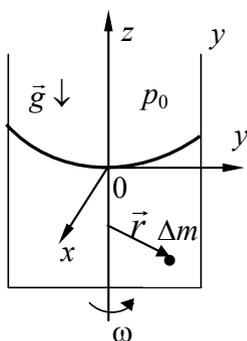


Рис. 2.9

Тогда дифференциальные уравнения гидростатики (2.2) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \omega^2 x, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho \omega^2 y, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \end{aligned} \quad (2.12)$$

Общее решение этих уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 y^2 - \rho g z + C,$$

а произвольная постоянная  $C$  может быть определена выбором начала отсчета координаты  $z$ . Поместим начало координат на свободную поверхность жидкости, давление газа над которой постоянно и равно  $p_0$ . Тогда граничное условие для поставленной задачи имеет вид:  $p=p_0$  при  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ . При этом условии постоянная  $C$  становится равной  $C=p_0$ . В итоге решение дифференциальных уравнений гидростатики, даст следующее распределение давления в жидкости:

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) - \rho g z \quad (2.13)$$

или

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z,$$

где  $r$  – расстояние до рассматриваемой точки от оси вращения.

Как видно из этих выражений, **давление в равномерно вращающейся несжимаемой жидкости в поле силы тяжести линейно увеличивается с глубиной и квадратично увеличивается с расстоянием от оси вращения.**

Определим форму свободной поверхности жидкости, как поверхности постоянного давления  $p=p_0$ . При этом условии из (2.13) следует

$$\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z = 0$$

$$\text{или } z = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} r^2.$$

Данное выражение дает уравнение свободной поверхности и описывает параболюид вращения.

**Таким образом, свободная поверхность равномерно вращающейся несжимаемой жидкости в поле силы тяжести представляет собой параболюид вращения.**

## 2.7. Сила давления на тела, погруженные в жидкость

### 2.7.1. Сила давления, действующая на криволинейную поверхность, погруженную в жидкость

Если в жидкости находится некая криволинейная поверхность  $S$ , то в общем случае действующее на нее давление в разных ее точках будет разным как по величине, так и по направлению, рис. 2.10.

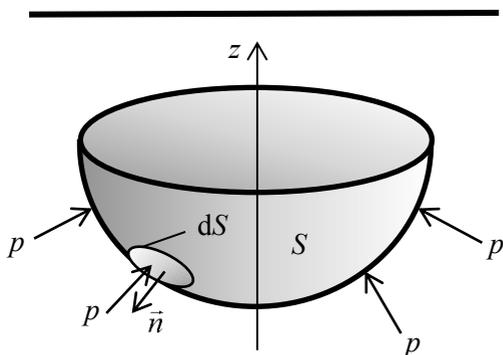


Рис. 2.10

Чтобы вычислить результирующую силу давления, действующую на эту поверхность, выделим на ней в некоторой точке  $(x, y, z)$  малый элемент поверхности с площадью  $dS$ , единичный вектор внешней нормали к которому в этой точке есть  $\vec{n}$ . Считая давление в пределах этого малого элемента

постоянным, величину элементарной силы давления  $dF$ , действующей на этот элемент поверхности, можно определить как произведение давления в этой точке на площадь этого элемента:  $dF = p(x, y, z)dS$ . Поскольку действующее на площадку  $dS$  давление направлено к ней, постольку эта сила будет иметь направление, противоположное вектору внешней нормали  $\vec{n}$ . Поэтому вектор силы давления  $d\vec{F}$ , действующей на площадку  $dS$ , будет определяться следующим образом:

$$d\vec{F} = -p(x, y, z)\vec{n}dS.$$

Результирующая сила давления  $\vec{F}$ , действующая на всю поверхность  $S$ , будет равна сумме всех элементарных сил давления, дей-

ствующих на все элементарные площадки, покрывающие поверхность, то есть интегралу:

$$\vec{F} = \iint_S d\vec{F} = -\iint_S p(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) dS \quad (2.14)$$

Как известно, единичный вектор имеет своими проекциями на оси координат направляющие косинусы, то есть косинусы углов, которые он составляет с соответствующими осями:  $\vec{n} = [\cos(n\hat{x}), \cos(n\hat{y}), \cos(n\hat{z})]$ .

С учетом этого, для проекций на оси координат силы давления, можно записать

$$\begin{aligned} F_x &= -\iint_S p(x, y, z) \cos(n\hat{x}) dS \\ F_y &= -\iint_S p(x, y, z) \cos(n\hat{y}) dS \\ F_z &= -\iint_S p(x, y, z) \cos(n\hat{z}) dS \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.7.2. Вертикальная составляющая силы давления, действующая на криволинейную поверхность, погруженную в тяжелую несжимаемую жидкость

Особое значение имеет вычисление сил давления, действующих на тела в жидкости в поле силы тяжести. Сила тяжести задает определенное выделенное направление в пространстве, которое называется вертикальным, тем самым определяя понятия «верх» и «низ». Соответственно, следует ожидать появление особенностей в поведении тел в жидкости именно в этом направлении.

Рассмотрим вертикальную составляющую силы давления, действующую на произвольную поверхность  $S$ , погруженную в несжимаемую жидкость с плотностью  $\rho_{ж}$ , находящуюся в поле силы тяжести (рис. 2.11). Ось  $z$  направим вертикально вниз, а начало отсчета  $z=0$  разместим на горизонтальной свободной поверхности жидкости, в плоскости которой будет расположена горизонтальные оси  $x$  и  $y$ , и давление газа над которой равно  $p_0$ .

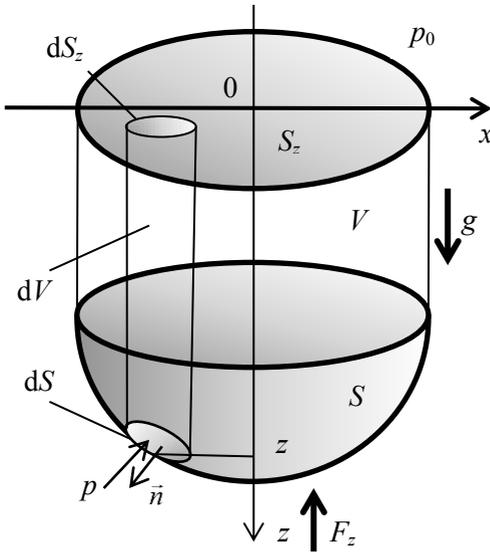


Рис. 2.11

Спроецируем поверхность  $S$  на свободную поверхность жидкости и получим ее проекцию с площадью  $S_z$  (рис. 2.11). Выберем на поверхности  $S$  элемент  $dS$  с единичным вектором внешней нормали к нему  $\vec{n}$  и также спроецируем его на свободную поверхность жидкости, получив на ней его проекцию с площадью  $dS_z$ . Согласно правилам проецирования площадь проекции будет равна площади исход-

ной фигуры, умноженной на косинус угла между нормалью к ней и к плоскости проекции  $\iint_S dS_z$ , то есть  $dS_z = dS \cos(n\hat{z})$ .

Распределение давления в жидкости в рассматриваемом случае дается выражением (2.6):

$$p = p_0 + \rho_{ж}gz.$$

Чем глубже находится элемент поверхности, тем больше действующее на него давление жидкости.

Выражение для вертикальной составляющей  $F_z$  действующей на рассматриваемую поверхность силы давления из (2.13) имеет вид

$$F_z = -\iint_S p(x, y, z) \cos(n\hat{z}) dS = -\iint_S (p_0 + \rho_{ж}gz) \cos(n\hat{z}) dS = -\iint_S (p_0 + \rho_{ж}gz) dS_z \quad (2.16)$$

Вычислим этот интеграл от каждого из слагаемых в подынтегральном выражении (2.14) по-отдельности.

1) С учетом того, что интеграл  $\iint_S dS_z$  представляет собой не что иное как сумму площадей всех элементов  $dS_z$ , покрывающих поверхность  $S_z$ :  $\iint_S dS_z = S_z$ , получаем:

$$\iint_S p_0 dS_z = p_0 \iint_S dS_z = p_0 S_z.$$

Это выражение имеет смысл силы давления  $p_0$  на поверхность  $S_z$ .

2) Во втором интеграле  $\iint_S \rho_{ж} g z dS_z = \rho_{ж} g \iint_S z dS_z = \rho_{ж} g \iint_S z dS_z$  и обратим внимание на то, что  $z dS_z$  есть объем  $dV$  цилиндра с площадью основания  $dS_z$  и высотой  $z$ :  $z dS_z = dV$ , а  $\iint_S dV$  есть сумма всех элементарных объемов  $dV$ , расположенных внутри изображенного на рис.2.11 цилиндра с объемом  $V$ :  $\iint_S dV = V$ . Тогда

$$\iint_S \rho_{ж} g z dS_z = \rho_{ж} g \iint_S z dS_z = \rho_{ж} g \iint_S dV = \rho_{ж} g V.$$

Произведение  $\rho_{ж} g V$  является весом жидкости в объеме  $V$ .

Окончательно для силы  $F_z$  получаем выражение

$$F_z = -(p_0 S_z + \rho_{ж} g V). \quad (2.17)$$

Физический смысл полученного выражения заключается в том, что на поверхность, погруженную в несжимаемую жидкость в поле силы тяжести, действует в вертикальном направлении сила ( $F_z$ ), равная сумме: 1) силы давления газа над поверхностью жидкости на проекцию рассматриваемой поверхности на горизонтальную плоскость ( $p_0 S_z$ ) и 2) весу жидкости ( $\rho_{ж} g V$ ) в объеме цилиндра с вертикальными образующими, ограниченного снизу рассматриваемой поверхностью, а сверху свободной поверхностью жидкости.

### 2.7.3. Вертикальная составляющая силы давления, действующая на тело, погруженное в тяжелую несжимаемую жидкость. Закон Архимеда

Особенностью любого тела является то, что оно имеет замкнутую поверхность, ограничивающую его. Поэтому силы давления, действующие на него могут иметь вертикальные составляющие направленные в разных частях поверхности как вертикально вверх, так и вертикально вниз.

В связи с этим рассмотрим полностью погруженное в жидкость тело с объемом  $V$  (рис. 2.12).

В соответствии с результатами параграфа 2.6.2 на нижнюю часть поверхности этого тела  $S_I$  вертикально вверх действует сила давления  $F_{zI}$ , равная

$$F_{zI} = -(p_0 S_z + \rho_{ж} g V_I),$$

где  $V_I$  – объем жидкости над поверхностью  $S_I$ .

На верхнюю часть поверхности  $S_{II}$  вертикально вниз действует сила давления  $F_{zII}$ , равная

$$F_{zII} = (p_0 S_z + \rho_{ж} g V_{II}),$$

где  $V_{II}$  – объем жидкости над поверхностью  $S_{II}$ .

Результирующая этих сил равна:

$$F_{z\text{р}} = F_{zI} + F_{zII} = -\rho_{ж} g (V_I - V_{II}) = -\rho_{ж} g V,$$

где  $V$  – объем тела.

Знак минус в этом выражении показывает, что эта сила имеет отрицательную проекцию на ось  $z$ , то есть направлена вертикально вверх.

Обозначим эту силу  $F_A$

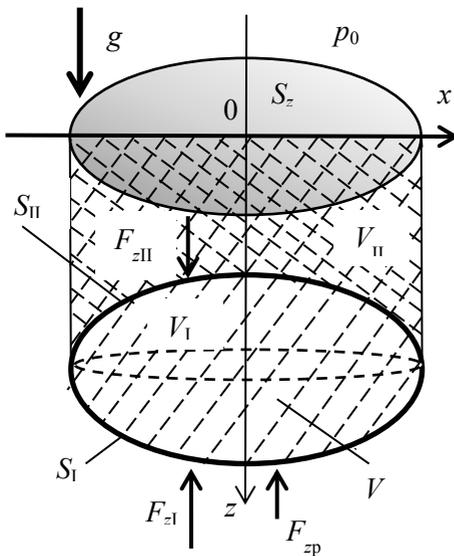


Рис. 2.12

и окончательно запишем

$$F_A = \rho_{\text{ж}} g V. \quad (2.18)$$

Выражение (2.18) представляет собой математическую запись закона Архимеда, который состоит из нескольких пунктов и формулируется следующим образом:

**На тело, погруженное в несжимаемую жидкость в поле силы тяжести:**

- 1) действует сила  $F_A$ , (которая носит название силы Архимеда);
- 2) направленная вертикально вверх (поэтому часто называемая выталкивающей силой);
- 3) равная по величине весу жидкости в объеме тела;
- 4) имеющая точку приложения в центре тяжести жидкости в объеме тела (которая называется центром давления).

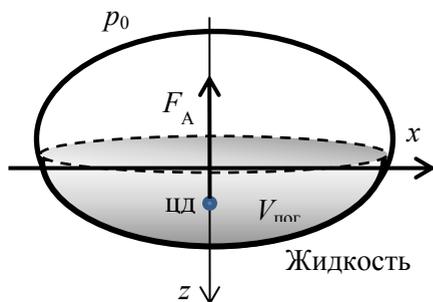


Рис. 2.13

Если тело не полностью погружено в жидкость, (рис.2.13), то, в соответствии с изложенным выше рассмотрением величина силы Архимеда определяется объемом  $V_{\text{пог}}$  только погруженной в жидкость части тела и центр давления (цд) будет находиться в центре тяжести жидкости именно в этом объеме:

$$F_A = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{пог}}. \quad (2.19)$$

Еще раз подчеркнем, что сила Архимеда имеет место только в жидкости, находящейся в поле силы тяжести, когда давление в ней увеличивается с глубиной. В связи с этим давление на нижнюю часть тела всегда будет больше, чем на верхнюю. Эта разность давлений и обуславливает силу Архимеда, направленную от большего значения давления к меньшему.

Кроме того, следует обратить внимание на то, что величина силы Архимеда не зависит от ориентации тела в жидкости и определяется только величиной его объема  $V$ .

#### **2.7.4. Горизонтальные составляющие сил, действующих на тела, погруженные в тяжелую несжимаемую жидкость**

Для определения компонент сил давления, действующих на погруженное в жидкость тело в горизонтальных направлениях, необходимо поступать следующим образом (рис. 2.14).

1) Спроецировать поверхность рассматриваемого тела на плоскость, перпендикулярную оси, на которую определяется проекция силы. Для примера, представленного на рис. 2.14, при определении  $x$ - проекции силы давления  $F_x$  такой плоскостью является плоскость  $(yOz)$ ;

2) Определить координату  $z$  центра тяжести полученной плоской фигуры ( $z_{цт}$ ) и ее площадь  $S_x$ .

3) Умножить значение давления в жидкости в этом центре тяжести  $p(z_{цт})$  на площадь проекции  $S_x$ .

Таким образом,

$$F_x = p(z_{цт}) S_x = (p_0 + \rho g z_{цт}) S_x.$$

Аналогично определяется и проекция силы давления на ось  $y$ :

$$F_y = p(z_{цт}) S_y = (p_0 + \rho g z_{цт}) S_y.$$

В случае тела с замкнутой поверхностью, полностью находящейся в жидкости, следует иметь ввиду, что силы давления действуют как в положительном ( $F_{xII}$  на рис. 2.14), так и в отрицательном направлении рассматриваемых осей ( $F_{xI}$  на рис. 2.14). Поскольку в горизонтальной плоскости давление в жидкости не изменяется, постольку эти силы по величине равны  $|F_{xI}| = |F_{xII}|$  и компенсируют друг друга.

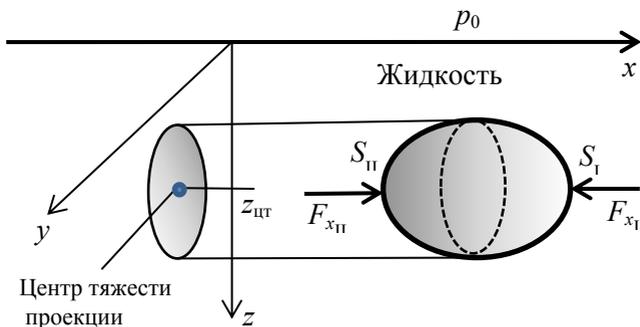


Рис. 2.14

Поэтому под действием горизонтальных составляющих сил давления тело не перемещается, но испытывает всестороннее сжатие.

## 2.8. Плавание тел в тяжелой несжимаемой жидкости

### 2.8.1. Плавание тел, полностью погруженных в жидкость, и его устойчивость

Если тело со средней плотностью  $\rho_T$  погружено в жидкость, имеющую плотность  $\rho_{ж}$ , то на него действуют вертикально вниз сила тяжести  $F_T = \rho_T g V$  и вертикально вверх сила Архимеда  $F_A = \rho_{ж} g V$ . Под действием этих сил тело будет перемещаться в направлении их результирующей. Если сила тяжести больше, чем сила Архимеда, то результирующая будет направлена вниз и, как говорят, тело будет тонуть. Если больше сила Архимеда, то результирующая будет направлена вверх и тело будет всплывать.

Нетрудно видеть, что  $F_T > F_A$ , когда  $\rho_T > \rho_{ж}$ , и  $F_A > F_T$ , когда  $\rho_{ж} > \rho_T$ .

Таким образом, тело, полностью погруженное в жидкость, тонет, если его средняя плотность больше плотности жидкости и

всплывает, если его средняя плотность меньше плотности жидкости.



Рис.2.15

Но даже при неподвижном центре инерции на тело могут действовать моменты сил, вращающие тело вокруг его центра инерции. В связи с этим возникает вопрос об устойчивости плавания тела в жидкости.

Устойчивым будем называть такое равновесное положение тела, когда вывод его из этого положения приводит к появлению моментов сил, возвращающих его к положению равновесия. Соответственно, неустойчивым будет положение тела, при выводе из которого возникающие моменты сил уведут его от положения равновесия.

Устойчивым будем называть такое равновесное положение тела, когда вывод его из этого положения приводит к появлению моментов сил, возвращающих его к положению равновесия. Соответственно, неустойчивым будет положение тела, при выводе из которого возникающие моменты сил уведут его от положения равновесия.

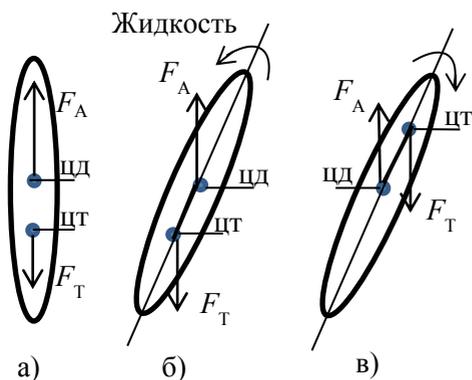


Рис. 2.16

Если сила тяжести равна силе Архимеда, то их результирующая равна нулю и тело, погруженное в жидкость не будет перемещаться, а будет находиться в безразличном плавании в той точке, в которую помещено. Такую ситуацию называют **гидроневесомостью**. Состояние гидроневесомости активно используют, в частности, при наземной подготовке команавтов для работы в условиях космической невесомости (рис. 2.15).

В случае, когда центр тяжести тела находится ниже центра давления, рис. 2.16 а), при повороте тела, например, по часовой стрелке сила тяжести и сила Архимеда образуют пару сил, момент которой заставляет тело вращаться против часовой стрелки, возвращая его к положению равновесия, рис. 2.16 б).

С другой стороны,

если центр тяжести лежит выше центра давления, рис.2.16 в), то поворот тела по часовой стрелке приводит к появлению момента сил тяжести и Архимеда, вращающего тело тоже по часовой стрелке, уводя его от положения равновесия.

**Таким образом, можно констатировать, что плавание полностью погруженного в жидкость тела будет устойчивым, если его центр тяжести лежит ниже центра давления, и будет неустойчивым, если центр тяжести находится выше центра давления.**

Во втором случае тело будет повернуться до тех пор, пока центр тяжести не окажется ниже центра давления и тело придет в состояние устойчивого плавания.

### **2.8.2. Особенности плавания тел, не полностью погруженных в жидкость**

Для тела, не полностью погруженного в жидкость, как изображено на рис. 2.17 а), в соответствии с законом Архимеда величина выталкивающей силы  $F_A$  определяется объемом  $V_{\text{пог}}$  только погруженной в жидкость части тела (рис. 2.17):

$$F_A = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{пог}}.$$

При этом условие плавания тела будет определяться равенством действующей на него силы тяжести  $F_T = Mg$ , где  $M$  – масса тела, и силы Архимеда:  $F_A = F_T$ . Из этого условия объем погруженной части тела определяется следующим соотношением:  $V_{\text{пог}} = M/g$ .

Основной особенностью плавания тел, не полностью погруженных в жидкость, является то, что при наклоне (крене) такого тела изменяется форма погруженной в жидкость его части, рис. 2.17 б). В результате происходит смещение центра давления в сторону большей части погруженного объема, в то время как центр тяжести тела остается в прежней точке. Из-за этого смещения сила тяжести и сила Архимеда перестают лежать на одной прямой и образуют пару сил, рис. 2.16 б). Важным является то, что даже, если центр тяжести тела лежит выше центра давления, эта пара сил создает восстанавливающий момент, возвращающий тело в исходное положение.

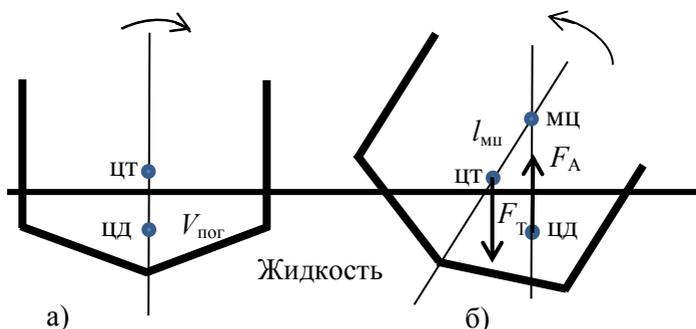


Рис. 2.17

**То есть, тело, не полностью погруженное в жидкость, способно к устойчивому плаванию, даже, если его центр тяжести лежит выше центра давления.**

Именно это обстоятельство лежит в основе плавания судов.

Способность судна противостоять внешним кренящим силам и моментам, которые могут быть вызваны разными причинами (ветром, волнами и т.п.), называется **остойчивостью** судна.

Восстанавливающий момент силы тяжести и силы Архимеда, возникающий при крене судна, определяется **метацентрической высотой**  $l_{мц}$  (рис. 2.17), которая является количественной мерой и критерием остойчивости судна.

Если тело является симметричным, то метацентром (мц) называется точка пересечения линии действия силы Архимеда с плоскостью симметрии тела. А расстояние между центром тяжести и метацентром называется метацентрической высотой  $l_{мц}$ . Чем больше метацентрическая высота, тем больше восстанавливающий момент и тем выше остойчивость судна.

При большом крене метацентр может оказаться ниже центра тяжести, метацентрическая высота станет отрицательной, восстанавливающий момент превратится в опрокидывающий и судно перевернется.



Рис.2.18 Тримаран

Одним из способов увеличения восстанавливающего момента и тем самым повышения устойчивости судна является размещение на его бортах дополнительных поплавковых устройств и даже превращение его в тримаран, рис. 2.18.

### **3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ**

Возможность установления закономерностей происходящих в природе процессов во многом основывается на фундаментальном факте существования некоторых базовых физических величин, значения которых остаются неизменными.

Законы, устанавливающие постоянство этих величин при протекании различных процессов в физических системах носят название законов сохранения. Важным условием для реализации этих законов является замкнутость рассматриваемой физической системы.

Под замкнутой будем понимать такую физическую систему, которая не взаимодействует ни с какой другой системой.

В механике такими сохраняющимися величинами являются масса, энергия, импульс и момент импульса. Соответственно, основные уравнения, описывающие течения жидкостей и газов, являются следствием фундаментальных законов природы – законов сохранения массы, энергии, импульса и момента импульса.

При рассмотрении течений жидкостей и газов основным примером замкнутой системы является трубка тока.

Одномерными течениями жидкостей газов будем называть такие течения, в которых все параметры потока (скорость, давление, плотность, температура) зависят только от одной координаты, направленной вдоль потока.

В реальности потоки жидкостей и газов являются трехмерными и их характеристики зависят как от продольных вдоль потока координат, так и от поперечных. Однако, такое полное описание этих потоков сопряжено с большими математическими трудностями.

В связи с этим, в механике жидкостей и газов широко используется приближение одномерных течений, при котором все параметры потока считаются зависящими только от одной координаты, направленной вдоль потока, а реальные значения соответствующих параметров в поперечном сечении потока заменяются на их средние по сечению величины. Такой подход является приближенным. Но, несмотря на приближенный характер получаемых соотношений, они оказываются весьма полезными для многих качественных выводов и большого количества технических расчетов.

### 3.1. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности

Закон сохранения массы гласит: **масса замкнутой системы есть величина постоянная.**

Замкнутой системой для потока жидкости является трубка тока.

В связи с этим к ней может быть применен закон сохранения массы в виде утверждения, что **массовый расход жидкости  $Q_m$  через любое сечение трубки тока является величиной постоянной** –  $Q_m = \text{Const}$ , так как между любыми сечениями потока масса жидкости никуда не исчезает и ниоткуда не возникает.

Вычислим массовый расход жидкости через произвольное сечение трубки тока  $S$ , в котором скорость жидкости имеет значение  $v$ , а

плотность –  $\rho$  (рис.3.1). Плоскость сечения принимается расположенной перпендикулярно вектору скорости течения жидкости.

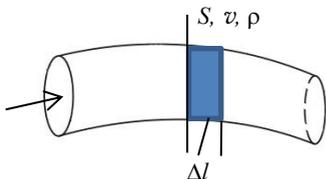


Рис.3.1. К расходу жидкости

За время  $\Delta t$  через это сечение пройдет объем жидкости  $\Delta V$ , равный произведению площади сечения потока  $S$  на максимально возможное расстояние  $\Delta l$ , которое пройдут частицы жидкости за это

время:  $\Delta V = S\Delta l$ . В свою очередь это расстояние равно произведению их скорости на указанный промежуток времени:  $\Delta l = v\Delta t$ . В итоге получаем  $\Delta V = Sv\Delta t$ . А масса  $\Delta m$  этого объема жидкости будет равна  $\Delta m = \rho\Delta V = \rho Sv\Delta t$ . В соответствии с определением массового расхода жидкости  $Q_m = \Delta m / \Delta t$  он получается равным

$$\boxed{Q_m = \rho v S.} \quad (3.1)$$

При этом объемный расход жидкости  $Q_v = \Delta V / \Delta t$  определяется произведением скорости на площадь сечения потока:

$$\boxed{Q_v = v S.}$$

В итоге, из сформулированного закона сохранения массы применительно к течению жидкости в трубке тока вытекает следующее уравнение, связывающее между собой параметры потока  $\rho, v, S$ :

$$\boxed{\rho v S = \text{Const},} \quad (3.2)$$

которое носит название **уравнения неразрывности**, и смысл которого, как уже было сказано, заключается в том, что массовый расход жидкости есть величина постоянная.

Для двух разных сечений потока уравнение неразрывности может быть записано в виде:

$$\boxed{\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2.} \quad (3.3)$$

### 3.2. Закон сохранения энергии. Уравнение Бернулли

Закон сохранения энергии гласит: **энергия замкнутой системы есть величина постоянная.**

Для потока жидкости замкнутой системой является трубка тока.

Движущаяся жидкость, как и любое движущееся тело с массой  $m$  может обладать кинетической энергией  $E_k = mv^2 / 2$  и потенциальной энергией в поле силы тяжести  $E_g = mgz$ , где  $z$  – вертикальная координата рассматриваемого сечения трубки тока.

Особенностью жидкостей является то, что в них действуют силы давления. При течении жидкости эти силы могут совершать работу, придавая тем самым ей энергию. Обозначим эту энергию жидкости, связанную с работой сил давления, как  $E_p$ .

Для возможности характеризовать энергетические характеристики потока жидкости в каждой его точке, т.е. локально, введем **понятие удельной энергии жидкости**  $e$  как отношение энергии  $E$  жидкости к ее массе:  $e = E/m$ . Удельная энергия определяет энергию жидкости, приходящуюся на единицу ее массы и имеет единицу измерения Дж/кг.

Таким образом, удельная кинетическая энергия жидкости будет равна

$$e_k = v^2 / 2,$$

удельная потенциальная энергия в поле силы тяжести будет равна

$$e_g = gz,$$

а удельная энергия, связанная с работой сил давления –

$$e_p = E_p / m.$$

Сумма этих видов энергии может быть определена как полная удельная энергия жидкости

$$e_{\text{п}} = e_k + e_p + e_g.$$

Для стационарного безвихревого баротропного течения идеальной жидкости закон сохранения энергии применим и к удельной энергии жидкости в следующей формулировке: **полная удельная энергия жидкости, представляющая собой сумму удельной кинетической энергии, удельной энергии, связанной с работой сил давления, и удельной потенциальной энергии в поле силы тяжести, есть величина постоянная:**

$$e_{\Pi} = e_{\kappa} + e_p + e_g = \text{const} . \quad (1.4)$$

Удельная энергия, связанная с работой сил давления  $e_p$ , требует отдельного вычисления. Вычислим ее для элементарного объема жидкости, имеющего длину  $dl$  и расположенного в сечении трубки тока с площадью  $S$ , на границах которого действует перепад давления  $dp$ , как изображено на рис. 3.2.

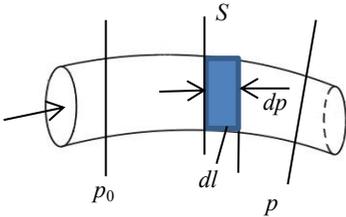


Рис.3.2. Силы давления, действующие на элементарный объем жидкости в трубке тока

Действующая на рассматриваемый элемент жидкости сила давления  $dF$  будет равна

$$dF = dp \cdot S,$$

а совершаемая этой силой работа  $dA$  по перемещению этого элемента на расстояние  $dl$  определится как

$$dA = dF \cdot dl = dp \cdot S \cdot dl.$$

Масса  $dm$  рассматриваемого элемента будет равна произведению плотности жидкости  $\rho$  на его объем  $dV = Sdl$ .

То есть,  $dm = \rho dV = \rho Sdl$ .

В результате, удельная работа

$$da = dA/dm = dp \cdot S \cdot dl / dm$$

этой силы получится равной

$$da = (1/\rho)dp.$$

Именно эта величина и определяет элементарную удельную энергию жидкости, связанную с работой сил давления  $de_p = da$  при перемещении элементарного объема жидкости между точками с перепадом давления  $dp$ .

Если объем жидкости перемещается между конечными значениями давления  $p_0$  и  $p$ , то удельная работа сил давления  $a$  на этом участ-

ке будет складываться из удельной работы  $da$  всех элементарных перепадов давления  $dp$  на нем, то есть представлять собой интеграл от вычисленной ранее величины  $da$ .

$$\text{Таким образом, } a = \int_{p_0}^p da = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho} dp .$$

Соответственно, эта величина будет определять удельную энергию жидкости, связанную с работой сил давления  $e_p = a$  при перемещении объема жидкости между точками с конечными значениями давления  $p_0$  и  $p$ :

$$e_p = a = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p)} dp$$

Эту величину часто называют как «функция давления» и обозначают буквой  $\mathcal{P}(p)$ .

Таким образом, сформулированный выше закон сохранения энергии (3.1) для полной удельной энергии жидкости может быть записан следующим образом

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + gz = Const ,} \quad \mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p)} dp \quad (1.5)$$

Данное соотношение носит название **уравнения Бернулли** и смысл его заключается в том, что полная удельная энергия жидкости, представляющая собой сумму удельной кинетической энергии, удельной энергии, связанной с работой сил давления, и удельной потенциальной энергии в поле силы тяжести, есть величина постоянная.

Уравнение Бернулли является следствием закона сохранения энергии и является одним из основных уравнений, описывающих одномерные течения жидкостей.

Функция давления  $\mathcal{P}(p)$  вычисляется как интеграл от функции  $1/\rho$ , при написании которой подчеркнuto, что плотность зависит от давления:  $\rho = \rho(p)$ . От вида этой зависимости, то есть вида соответствующего уравнения состояния жидкости или газа, конкретные выражения для функции давления могут быть разными.

### 3.3. Закон сохранения импульса. Уравнение движения

Как известно, импульсом материальной точки  $\vec{K}$  называется произведение ее массы  $m$  на скорость  $\vec{v}$ :  $\vec{K} = m\vec{v}$ .

Закон сохранения импульса гласит: импульс замкнутой системы есть величина постоянная:  $\vec{K} = \text{const}$  или  $d\vec{K}/dt = 0$ ,

Если система взаимодействует с другими системами, то мерой этого взаимодействия является сила  $\vec{F}$ . При этом импульс системы изменяется, а его изменение за единицу времени равно действующей на систему силе

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}.$$

Это уравнение называется уравнением движения и представляет собой второй закон Ньютона

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}.$$

Выведем уравнение движения для одномерного течения жидкости.

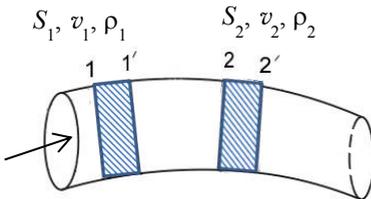


Рис.3.3. Изменение импульса жидкости в трубке тока

Пусть жидкость движется в трубке тока и в начальный момент времени рассматриваемый объем жидкости занимает пространство между сечениями 1 и 2, как изображено на рис.3.3.

Параметры потока будем отмечать нижними индексами, соответствующими номеру рас-

сма­три­вае­мо­го сече­ния. В сече­нии 1: пло­щадь  $S_1$ , ско­рость  $v_1$ , плот­ность  $\rho_1$  и т.п.

Через малый про­ме­жу­ток вре­мени  $dt$  этот об­ъем пе­ре­местит­ся по тру­бке то­ка и зай­мет по­ло­же­ние ме­жду сече­ния­ми  $1', 2'$

Вы­чис­лим из­ме­не­ние им­пуль­са это­го об­ъема при та­ком пе­ре­ме­ще­нии.

Об­ъем жид­ко­сти ме­жду сече­ния­ми 1 и 2 пред­ставим в ви­де сум­мы двух об­ъе­мов, на­хо­дя­щих­ся ме­жду сече­ния­ми  $1, 1'$  и ме­жду сече­ния­ми  $1', 2$ . Счи­тая пе­ре­ме­ще­ние сече­ния 1 ма­лым, бу­дем по­ла­гать, что пло­ща­ди и па­ра­мет­ры по­то­ка в сече­ния­х 1 и  $1'$  прак­ти­че­ски не от­ли­ча­ют­ся.

Им­пульс  $\vec{K}_{11'}$  об­ъема жид­ко­сти, рас­по­ло­жен­но­го ме­жду сече­ния­ми  $1, 1'$  бу­дет ра­вен про­из­ве­де­нию его мас­сы на век­тор ско­ро­сти, ра­в­ный его зна­че­нию в сече­нии 1:  $\vec{K}_{11'} = m_{11'} \vec{v}_1$ .

Ма­сса рас­сма­три­вае­мо­го об­ъема жид­ко­сти  $m_{11'}$  бу­дет ра­вна про­из­ве­де­нию его плот­но­сти в сече­нии 1 на ве­ли­чи­ну это­го об­ъема  $V_{11'}$ , ко­то­рый ра­вен:  $V_{11'} = l_{11'} S_1 = v_1 dt S_1$ .

Со­от­вет­ствен­но:  $m_{11'} = \rho_1 V_{11'} = \rho_1 v_1 S_1 dt$  и для им­пуль­са это­го об­ъема по­лу­чаем вы­ра­же­ние:  $\vec{K}_{11'} = m_{11'} \vec{v}_1 = \rho_1 v_1 \vec{v}_1 S_1 dt$ .

Им­пульс все­го об­ъема жид­ко­сти, рас­по­ло­жен­но­го ме­жду сече­ния 1 и 2 бу­дет ра­вен сум­ме им­пуль­сов со­став­ляю­щих его час­тей, рас­по­ло­жен­ных ме­жду сече­ния­ми  $1, 1'$  и  $1', 2$ :

$$\vec{K}_{12} = \vec{K}_{11'} + \vec{K}_{1'2} = \rho_1 v_1 \vec{v}_1 S_1 dt + \vec{K}_{1'2}.$$

Ана­ло­гич­ным об­ра­зом мож­но вы­чис­лить им­пульс об­ъема жид­ко­сти че­рез про­ме­жу­ток вре­мени  $dt$ , ко­гда об­ъем зай­мет по­ло­же­ние ме­жду сече­ния­ми  $1', 2'$ :

$$\vec{K}_{1'2'} = \vec{K}_{1'2} + \vec{K}_{22'} = \rho_2 v_2 \vec{v}_2 S_2 dt + \vec{K}_{1'2}.$$

Изменение импульса рассматриваемого объема жидкости  $d\vec{K}$  равно разности импульсов в конечный и начальный моменты времени

$$d\vec{K} = \vec{K}_{1'2'} - \vec{K}_{12} = \vec{K}_{1'2} + \vec{K}_{22'} = \rho_2 v_2 \vec{v}_2 S_2 dt - \rho_1 v_1 \vec{v}_1 S_1 dt$$

Согласно второму закону Ньютона  $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}$ , получаем уравнение движения для жидкости в виде:

$$\boxed{\rho_2 v_2 \vec{v}_2 S_2 - \rho_1 v_1 \vec{v}_1 S_1 = \vec{F}}, \quad (3.6)$$

которое с учетом уравнения неразрывности  $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$  можно также записать с использованием массового расхода жидкости

$$\boxed{Q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}}. \quad (3.7)$$

## 4. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

### 4.1. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

Для несжимаемой жидкости с постоянной плотностью  $\rho = \text{const}$ , уравнение неразрывности (2.2) упрощается и принимает вид

$$\boxed{v S = \text{const, либо } v_1 S_1 = v_1 S_2}. \quad (4.1)$$

Это означает, что для несжимаемой жидкости и объемный расход ее  $Q_l = v S$  есть величина постоянная.

Из уравнения неразрывности (4.1) следует важный качественный вывод о том, что при течении несжимаемой жидкости в тех местах потока, где площадь его сечения увеличивается (поток расширяется), там скорость его уменьшается и, соответственно, при сужении пото-

ка скорость его увеличивается. Отношение скоростей в этих местах обратно пропорционально отношению площадей сечения потока.

#### 4.2. Уравнение Бернулли для идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости

Для несжимаемой жидкости, у которой плотность есть величина постоянная, функция давления получается равной

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\rho} \int_{p_0}^p dp = \frac{1}{\rho}(p - p_0). \quad (4.2)$$

Подставив это выражение в (3.5) и перенося постоянную составляющую функции давления  $p_0/\rho$  в правую часть, включив ее в стоящую там константу, получим уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости в терминах удельной энергии в следующем виде

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{Const}} \quad (4.3)$$

или для двух разных сечений потока

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2.} \quad (4.4)$$

Тогда энергетическая интерпретация уравнения выражается так: **полная удельная энергия жидкости, представляющая собой сумму удельной кинетической энергии, удельной энергии, связанной с работой сил давления и удельной потенциальной энергии в поле силы тяжести, есть величина постоянная.**

При такой записи каждое слагаемое в уравнении Бернулли имеет размерность Дж/кг.

Уравнение Бернулли можно интерпретировать и по-другому.

Умножим (4.3) и (4.4) на постоянную величину плотности  $\rho$  и получим:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z = \text{Const}, \quad \frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 \quad (4.5)$$

Основная суть этого уравнения не изменилась, но размерность каждого из слагаемых стала другой, а именно равной Па.

Каждое из слагаемых этого уравнения может быть интерпретировано как специфическое давление в жидкости.

Величина  $\rho v^2 / 2$  называется динамическим давлением, обусловленным скоростью движения жидкости;

величина  $p$  – пьезометрическое давление, обусловленное тепловым хаотическим движением молекул;

$\rho g z$  – «геометрическое давление», обусловленное весом жидкости.

А их сумма есть полное давление в жидкости.

В такой записи уравнение Бернулли имеет следующую силовую интерпретацию: **полное давление в жидкости, представляющее собой сумму динамического, пьезометрического и геометрического давлений, есть величина постоянная.**

Еще одной внесистемной силовой характеристикой потока жидкости является напор,  $h$ . Это понятие часто используется в технических приложениях.

Напор определяется как отношение пьезометрического давления  $p$  к удельному весу жидкости  $\rho g$ :  $h = p / \rho g$  и измеряется в метрах.

Разделив исходное уравнение Бернулли (4.3) и (4.4) на  $g$ , получим его в виде

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{Const}, \quad \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2, \quad (4.6)$$

где размерность каждого из слагаемых есть метр и каждое из них может быть интерпретировано как специфический напор в жидкости:

- величина  $v^2 / 2g$  – динамический напор,
- величина  $p/\rho g$  – пьезометрический напор,
- $z$  – геометрический напор, а их сумма есть полный напор в жидкости.

В такой записи уравнение Бернулли имеет следующую силовую интерпретацию: **полный напор в жидкости, представляющий собой сумму динамического, пьезометрического и геометрического напоров, есть величина постоянная.**

### 2.3. Уравнение Бернулли для вязкой несжимаемой жидкости. Потери энергии, давления и напора

При предыдущем рассмотрении энергетического баланса в потоке жидкости и выводе уравнения Бернулли (4.3), (4.4) вне внимания был оставлен тот факт, что жидкость обладает еще и тепловой энергией, которая может также изменяться при ее движении. Важным является то, что это изменение может происходить не обязательно в результате внешнего подвода или отвода теплоты, а как следствие внутренних источников, обусловленных выделением теплоты за счет действия сил вязкого трения. Таким образом, полученное выше уравнение Бернулли справедливо только для идеальной (невязкой) жидкости. На практике при движении реальной вязкой жидкости часть механической энергии постоянно переходит в тепловую и механическая энергия жидкости постоянно уменьшается. Эту перешедшую в тепло часть механической энергии жидкости называют потерями энергии, главным образом из-за того, что тепловая энергия

в последующем уходит безвозвратно в окружающее пространство. В результате этих процессов любой движущийся поток жидкости остановится, если не компенсировать эти потери энергии внешними источниками, роль которых в реальных трубопроводах играют, например, насосы.

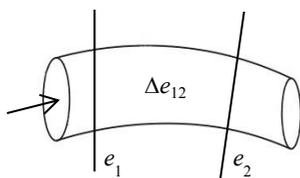


Рис. 4.1. Потери энергии в вязкой жидкости

Таким образом, при применении уравнения Бернулли к реальной жидкости необходимо учитывать указанные потери энергии.

Если при течении жидкости между двумя сечениями потока 1 и 2, значения механической энергии в которых соответственно  $e_1$  и  $e_2$ , имеют место потери энергии  $\Delta e_{12}$  (рис. 4.1), тогда баланс видов энергии может быть записан в следующем виде:  $e_1 = e_2 + \Delta e_{12}$ , либо

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \Delta e_{12}. \quad (4.7)$$

Соответственно в силовой интерпретации уравнение Бернулли (4.5), (4.6) для реальной вязкой жидкости имеет вид

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_{12}, \text{ или} \quad (4.8)$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta h_{12}. \quad (4.9)$$

Здесь  $\Delta p_{12} = \rho \Delta e_{12}$  представляет собой потери давления, а  $\Delta h_{12} = \Delta p_{12} / \rho g$  – потери напора в жидкости.

#### 4.4. Качественные следствия из уравнений неразрывности и Бернулли

Пусть поток несжимаемой идеальной жидкости движется горизонтально так, что вертикальные координаты его поперечных сечений одинаковы,  $z = \text{const}$ . Тогда уравнение Бернулли (4.5) записывается в следующем виде

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{Const}.$$

и из него сразу следует важный качественный вывод о том, что при течении несжимаемой жидкости в тех местах потока, где скорость

увеличивается (первое слагаемое), там давление уменьшается (второе слагаемое).

Одновременно из уравнения неразрывности следует, что скорость потока увеличивается при уменьшении площади его сечения.

Таким образом, из уравнений неразрывности и Бернулли можно сделать общий качественный вывод о том, что:

- в местах сужения потока несжимаемой жидкости, где площадь сечения его уменьшается, скорость жидкости увеличивается, а давление в ней уменьшается:  $S \downarrow, v \uparrow, p \downarrow$ ;

- в местах расширения потока несжимаемой жидкости, где площадь сечения его увеличивается, скорость жидкости уменьшается, а давление в ней увеличивается:  $S \uparrow, v \downarrow, p \uparrow$ .

#### 4.5. Кавитация

Кавитация – это явление закипания жидкости в потоке при понижении давления в нем, связанным с увеличением скорости потока в местах его сужения.

Так, например, если жидкость с некоторой температурой  $T_0$  движется в сужающемся канале, то, как следует из уравнения Бернулли, скорость ее увеличивается, а давление уменьшается.

С другой стороны, известно, что любая жидкость обладает определенной температурой кипения  $T_k$ , при превышении которой она закипает. Известно также, что температура кипения жидкости зависит от давления  $T_k = T_k(p)$ : чем меньше давление в жидкости, тем ниже температура кипения и наоборот. Так, например, известно, что температура кипения воды при давлении  $10^5$  Па или напоре 760 мм рт.ст. равна  $100^\circ\text{C}$ . Однако, при давлении, соответствующем 17 мм рт.ст. вода уже закипает при комнатной температуре  $20^\circ\text{C}$ .

Таким образом, при движении жидкости в сужающемся канале и соответственным падением давления в ней в некотором месте потока может возникнуть ситуация, когда температура кипения жидкости при этом пониженном давлении может стать меньше имеющейся температуры жидкости,  $T_k(p) < T_0$ . Это с неизбежностью приведет к закипанию жидкости в этом месте. Область кипения жидкости, как правило, прилегает к стенкам канала, в котором движется жидкость

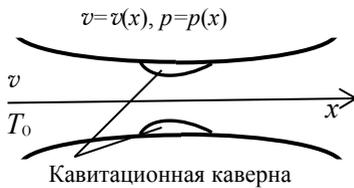


Рис.4.2. Кавитация

ласти кавитационной каверны, приводящей в итоге к разрушению стенок каналов. С этой точки зрения, кавитация является крайне нежелательным явлением при течении жидкостей в каналах энергетических и других машин.

Кавитация может возникать не только при течении жидкости в

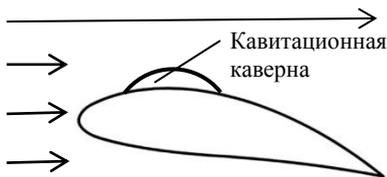


Рис.4.3. Кавитация при внешнем обтекании тела

На выпуклой поверхности такого профиля поток жидкости уско-ряется, что приводит к понижению давления в этом месте и может привести к возникновению там кавитации.

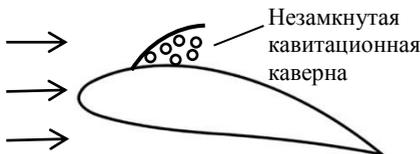


Рис.4.4. Незамкнутая кавитационная каверна

и в ситуации, изображенной на рис. 4.2, является замкнутой. Такое закипание жидкости называется кавитацией, а область ее кипения называется кавитационной каверной.

Кавитация, как и вообще процесс кипения, сопровождается характерным шумом, вибрациями и, что особенно примечательно, интенсивной коррозией металла в области кавитационной каверны, приводящей в итоге к разрушению стенок каналов.

С этой точки зрения, кавитация является крайне нежелательным явлением при течении жидкостей в каналах энергетических и других машин. Кавитация может возникать не только при течении жидкости в каналах, но и при внешнем обтекании тел на тех участках поверхности тела, где скорость потока увеличивается. Например, это может иметь место при обтекании крыловидного профиля, изображенного рис. 4.3, который также имеют лопасти турбины, лопасти гребных винтов судов и т.п.

Коррозия металла в области кавитационной каверны может служить причиной разрушения этих элементов энергетических машин.

Естественным способом предотвращения кавитации является соответствующее ограничение скорости движе-

ния жидкости или обтекаемых ею тел.

Еще одним способом предотвращения кавитации при обтекании тел является придание им специальной формы, при которой кавитационная каверна не замыкается на поверхности профиля, является открытой, и пузыри пара уносятся из нее потоком жидкости (рис.4.4). Такие профили называются суперкавитирующими.

## 4.6. Эжекция

Эффект эжекции обусловлен теми же причинами, что и кавитация, а именно, понижением давления в местах сужения потока жидкости, где скорость его увеличивается.

В частности, если в сужении канала произойдет понижение давления настолько, что оно станет меньше давления газа в окружающем канал газе ( $p < p_0$ ), то при наличии отверстия в стенке канала, сообщающего газ с жидкостью в канале, газ из внешней среды естественным образом начнет поступать в поток жидкости и уноситься

им в виде пузырьков, как изображено на рис. 4.5.

Такой подсос газа в поток жидкости в месте сужения канала называется эжекцией.

Эжекция достаточно широко используется в технических системах для создания газожидкостных потоков, в частности для формирования топливно-

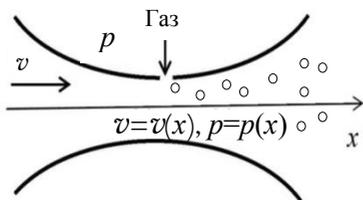


Рис.4.5. Эжекция

воздушных смесей перед сжиганием.

## 4.7. Течение несжимаемой жидкости через конфузоры и диффузоры

Диффузор – это канал с плавно увеличивающейся площадью поперечного сечения (рис. 4.6а).

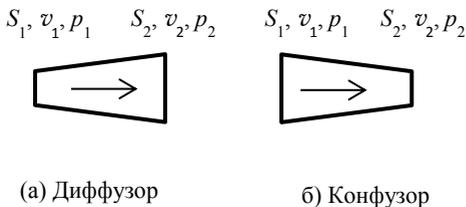


Рис.4.6. Течение в диффузоре (а) и конфузоре (б)

Конфузор – это канал с плавно уменьшающейся площадью поперечного сечения (рис. 4.6б).

Диффузоры и конфузоры предназначены для осуществления плавного перехода между трубами разного диаметра с целью уменьшения потерь давления при таком переходе.

Изменение параметров потока несжимаемой идеальной жидкости (скорости и давления) при течении в диффузорах и конфузорах описывается уравнениями неразрывности и Бернулли.

Для диффузоров и конфузоров, оси симметрии которых расположены горизонтально и действие силы тяжести несущественно, эти уравнения принимают вид:

$$vS = \text{Const} \text{ и } \frac{\rho v^2}{2} + p = \text{Const} \quad (4.10)$$

Если параметры потока на входе в них отметить индексом 1, а на выходе – индексом 2, то

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad \frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 \quad (4.11)$$

Тогда значения скорости и давления на выходе из этих устройств определяются через их значения на входе следующим образом:

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} \quad p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right) \quad (4.12)$$

Определяя геометрические характеристики этих устройств степень расширения диффузора и степень сужения конфузора  $n$ , как  $n=S_2/S_1$ , получаем

$$v_2 = \frac{v_1}{n}, \quad p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (4.13)$$

Для диффузора  $n > 1$ , а для конфузора  $n < 1$ .

Соответственно, из (4.13) при движении в диффузоре скорость уменьшается, а давление увеличивается, а при движении в конфузоре – скорость увеличивается, а давление уменьшается.

#### 4.8. Истечение несжимаемой жидкости через отверстие в баке. Формула Торичелли

Пусть несжимаемая жидкость частично заполняет сосуд на высоту  $h$  и находится в поле силы тяжести, характеризуемой ускорением  $g$  (рис.4.7). Давление газа над поверхностью жидкости в сосуде  $p$ , а вне сосуда  $p_0$ . В дне сосуда имеется отверстие, через которое под действием силы тяжести и перепада давления  $p-p_0$  происходит истечение струи жидкости со скоростью  $v$ . Вычислим величину этой скорости.

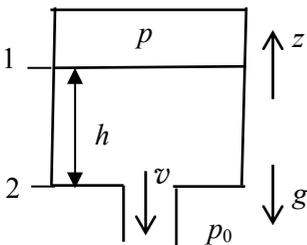


Рис.4.7. Истечение жидкости через отверстие в баке

Выделим в рассматриваемом потоке жидкости сечение 1 на поверхности жидкости, а сечение 2 – в струе на уровне отверстия и запишем для этих сечений уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2.$$

Чем больше размеры бака по сравнению с размерами отверстия, тем меньше будет скорость понижения уровня жидкости в баке по сравнению со скоростью жидкости в вытекающей струе.

Примем, что размеры бака велики настолько, что скоростью течения жидкости в баке можно пренебречь по сравнению со скоростью жидкости в струе и положить  $v_1 = 0$ .

С учетом принятых на рис. 4.7 обозначений:  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = v$ ,  $p_1 = p$ ,  $p_2 = p_0$ ,  $z_1 - z_2 = h$  уравнение Бернулли будет иметь следующий вид

$$p + \rho g z_1 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0 + \rho g z_2. \quad (4.14)$$

Из этого уравнения для скорости истечения получается следующее выражение:

$$v = \sqrt{2gh + \frac{2(p - p_0)}{\rho}} = \sqrt{2g \left( h + \frac{p - p_0}{\rho g} \right)} \quad (4.15)$$

или

$$v = \sqrt{2gH}, \quad (4.16)$$

где  $H = h + \frac{p - p_0}{\rho g}$  – сумма геометрического и пьезометрического

напоров в жидкости, под действием которых происходит истечение.

Формула (4.16) носит название формулы Торичелли.

Если бак открыт сверху в ту же среду, в которую происходит истечение жидкости, т.е.  $p = p_0$ , то пьезометрический напор отсутствует и формула Торичелли содержит только геометрический напор:

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (4.17)$$

Если давление  $p$  над поверхностью жидкости в баке меньше, чем давление в среде истечения, то такой перепад давления препятствует истечению жидкости и уменьшает скорость истечения вплоть до обращения ее в ноль. Это происходит тогда, когда в соответствии с формулой (4.15)  $p = p_0 - \rho gh$ .

В реальности отверстие представляет собой местное сопротивление, на котором происходят потери давления, не учитываемые при

выводе формулы Торичелли. Поэтому реальная скорость истечения будет меньше той, которая определяется этой формулой.

Для учета этого обстоятельства в формулу Торичелли вводится поправочный коэффициент  $\varphi$ , называемый коэффициентом скорости, и скорость истечения реальной вязкой жидкости определяется выражением

$$v = \varphi \sqrt{2gH} .$$

Соответственно, объемный расход жидкости  $Q_V$  при таком истечении будет определяться следующим выражением

$$Q_V = vS_{струи} = \varepsilon\varphi S_{отв} \sqrt{2gH} = \mu S_{отв} \sqrt{2gH} , \quad (4.18)$$

в котором коэффициент  $\mu$  носит название коэффициента расхода и включает в себя коэффициент сжатия струи  $\varepsilon = S_{струи}/S_{отв}$ , учитывающий в свою очередь тот факт, что при истечении жидкости в отверстии происходит некоторое сжатие струи, и площадь ее сечения  $S_{струи}$  становится меньше площади отверстия  $S_{отв}$ .

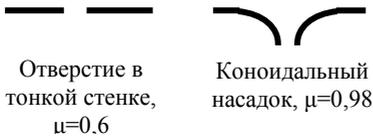


Рис.4.8. Формы отверстия для истечения жидкости

Для снижения потерь давления на отверстии и, соответственно, увеличения скорости и расхода жидкости при истечении через него, отверстию придают плавную форму, используя насадки (рис. 4.8).

#### 4.9. Внезапное расширение и сужение потока. Формула Борда

Внезапное расширение или сужение потока представляет собой резкий переход между трубами с разными диаметрами (рис. 4.9).

Такого рода переходы представляют собой местные сопротивления, на которых имеют место потери давления.

Геометрические характеристики этих сопротивлений определим степень расширения потока  $n$  в первом случае или степень сужения потока  $n$  – во втором, как  $n=S_2/S_1$ .

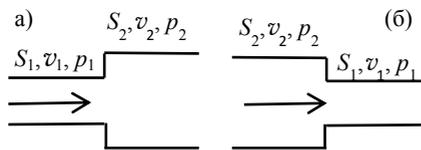


Рис.4.9. Внезапное расширение (а) и сужение (б) потока

Потери давления при внезапном расширении потока  $\Delta p_{\text{расш}}$  могут быть вычислены на основе имеющихся уравнений:

- а) неразрывности  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ ;
- б) Бернулли для вязкой жидкости (в предположении, что трубы расположены горизонтально)  $\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \Delta p_{\text{расш}}$ ;
- в) уравнения движения  $\rho v_2 \vec{v}_2 S_2 - \rho v_1 \vec{v}_1 S_1 = \vec{F}$ .

Сила, действующая в сечении  $S_2$  на расширяющийся поток жидкости в направлении его движения, равна разности давлений  $p_1 - p_2$ , умноженной на площадь этого сечения:  $F=(p_1 - p_2) S_2$ .

Тогда уравнение движения в проекции на направление движения жидкости дает:  $\rho v_2^2 S_2 - \rho v_1^2 S_1 = (p_1 - p_2) S_2$ .

Подставляя в это уравнение  $v_2 S_2$  вместо  $v_1 S_1$  во второе слагаемое слева и сокращая все слагаемые на  $S_2$ , получаем

$$p_1 - p_2 = \rho v_2^2 - \rho v_1 v_2.$$

Подставляя это выражение в уравнение Бернулли, получим

$$\Delta p_{\text{расш}} = p_1 - p_2 + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2} = \rho v_2^2 - \rho v_1 v_2 + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2} = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - 2v_1 v_2 + v_1^2).$$

Или, окончательно, потери давления при внезапном расширении потока будут определяться следующей формулой

$$\Delta p_{\text{расш}} = \frac{\rho}{2}(v_1 - v_2)^2, \quad (4.19)$$

которая носит название формула Борда.

С другой стороны потери давления на местном сопротивлении определяются общими формулами Дарси-Вейсбаха (4.25)

$$\Delta p_{\text{расш}} = \zeta \frac{\rho v^2}{2}$$

и могут вычисляться по скорости в узкой трубе  $v_1$  или по скорости в широкой трубе  $v_2$  :

$$\Delta p_{\text{расш}} = \zeta_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = \zeta_2 \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (4.20)$$

через соответствующие этим скоростям коэффициенты местного сопротивления  $\zeta_1$  или  $\zeta_2$ .

Используя формулу Борда, для этих коэффициентов также можно получить аналитические выражения.

Вынося за скобки в формуле Борда одно из значений скорости, можно получить:

$$\Delta p_{\text{расш}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{\rho v_1^2}{2} = \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2 \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (4.21)$$

Сравнивая это выражение с формулами Дарси-Вейсбаха можно увидеть, что

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2, \quad \zeta_2 = \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2. \quad (4.22)$$

Определяя геометрические характеристики этого сопротивления степенью расширения потока  $n$ , как  $n=S_2/S_1$ , получаем с учетом уравнения неразрывности

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} = n, \text{ или } \zeta_1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2, \zeta_2 = (n-1)^2. \quad (4.23)$$

Поскольку степень расширения потока может изменяться от 1 до  $\infty$ , постольку пределы изменения коэффициентов сопротивления при внезапном расширении потока определяются следующим образом:  $n=(1 \div \infty)$ ,  $\zeta_1=(0 \div 1)$ ,  $\zeta_2=(0 \div \infty)$ .

Следует отметить, что для потерь давления при внезапном сужении потока аналитических выражений не существует и для их определения надо использовать справочники. Необходимо иметь ввиду, что потери давления при внезапном расширении потока намного больше, чем при сужении. Так в первом случае, например, при степени расширения потока, равном 5, коэффициент сопротивления  $\zeta_2 = 16$ , а при эквивалентном сужении потока он равен 0,35.

#### 4.10. Дроссельный расходомер

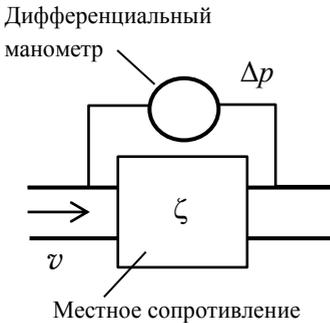


Рис.4.10. Дроссельный расходомер

Расходомер это прибор, предназначенный для измерения объемного расхода жидкости  $Q_V$ .

Принцип действия дроссельного расходомера основан на измерении потерь давления  $\Delta p$  на местном сопротивлении с известным коэффициентом сопротивления  $\zeta$ , (рис. 4.10).

Пересчет результатов измерения потерь давления на расход жидкости осуществляется в соответствии с известной формулой Дарси  $\Delta p = \zeta \frac{\rho v^2}{2}$ .

Откуда  $v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho \zeta}}$ , а  $Q_V = vS$ .

В качестве местного сопротивления в дроссельных расходомерах часто используются шайбы.

## 4.11. Основные задачи и методы гидравлического расчета трубопроводных систем

Трубопроводы представляют собой инженерные сооружения, предназначенные для транспортировки (целенаправленного перемещения в пространстве) текучих сред (жидкостей и газов).

Одной из основных задач гидравлического расчета трубопровода является определение потерь давления  $\Delta p$  в нем и потребной мощности насоса  $N$  для обеспечения заданного объемного расхода  $Q_V$  в трубопроводе. Эта мощность определяется произведением объемного расхода на потери давления в трубопроводе

$$N = Q_V \cdot \Delta p. \quad (4.24)$$

### 4.11.1. Потери давления в трубопроводе

Основными элементами трубопровода являются трубы и местные сопротивления, на которых и происходят преимущественные потери давления.

С точки зрения течения жидкости, трубы – это такие участки трубопровода, на которых характер течения жидкости не изменяется, а местные сопротивления – сравнительно короткие участки трубопровода на которых происходит существенное изменение характера течения жидкости. К местным сопротивлениям, в частности, относится трубопроводная арматура (вентили, задвижки, клапаны, а также разветвления, колена и т.п.).

Потери давления на этих элементах при расчетах выражаются через динамическое давление в жидкости  $\rho v^2/2$ .

Так, отношение потерь давления на местном сопротивлении  $\Delta p_m$  к динамическому давлению в жидкости является характеристикой этого местного сопротивления, является величиной безразмерной и называется коэффициентом местного сопротивления  $\zeta$ :

$$\Delta p_m / \frac{\rho v^2}{2} = \zeta.$$

Таким образом, потери давления на местных сопротивлениях вычисляются по формуле:

$$\Delta p_m = \zeta \frac{\rho v^2}{2}.$$

Значения коэффициентов местных сопротивлений содержатся в справочниках, а также в паспортных данных к ним.

По аналогичной формуле определяются потери давления и в трубах за исключением того, что в нее явным образом вводится множитель, соответствующий отношению длины трубы  $l$  к ее диаметру  $d$ :

$$\Delta p_T = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2},$$

а соответствующий безразмерный коэффициент  $\lambda$  называется гидравлическим коэффициентом сопротивления.

Таким образом, потери давления на элементах трубопровода вычисляются по следующим формулам

$$\boxed{\Delta p_T = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}, \Delta p_m = \zeta \frac{\rho v^2}{2}}, \quad (4.25)$$

которые носят название формулы Дарси-Вейсбаха.

Гидравлический коэффициент трения в трубах  $\lambda$  зависит от числа Рейнольдса потока  $Re = vd/\nu$  и от относительной шероховатости трубы  $\bar{\Delta}$ , представляющей собой отношение абсолютной шероховатости  $\Delta$  к диаметру трубы:  $\bar{\Delta} = \Delta/d$ . Зависимость  $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$  носит название закон сопротивления в трубах.

В общем случае значения  $\lambda$  находятся из справочников, но для некоторых ситуаций для его определения существуют достаточно простые формулы.

Так, например, закон сопротивления при ламинарном течении в трубах при  $Re < 2300$  имеет вид:  $\lambda = 64/Re$ .

При турбулентном течении  $Re > 2300$  в гладких трубах ( $\bar{\Delta} = 0$ ) имеет место закон сопротивления Блазиуса:  $\lambda = 0,3164/Re^{0,25}$ .

В зависимости от конфигурации трубопроводы подразделяются на простые (магистральные) и сложные.

**Простой трубопровод** представляет собой последовательное соединение местных сопротивлений одинаковыми (кроме длины) трубами (рис. 4.11).

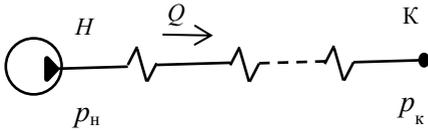


Рис.4.11. Простой трубопровод

Пусть в начальную точку  $H$  простого трубопровода насосом подается объемный расход жидкости  $Q$ , который выходит в конечной точке  $K$ .

Потери давления в таком трубопроводе при горизонтальном его расположении есть не что иное, как разность давлений между начальной и конечной его точками и складываются из потерь давления на каждой трубе и каждом местном сопротивлении. При этом расход жидкости через каждый из элементов трубопровода одинаков.

Потери давления на отдельной  $i$ -той трубе  $\Delta p_T$  и отдельном  $i$ -том местном сопротивлении  $\Delta p_M$  вычисляются по известным формулам Дарси-Вейсбаха, которые для круглых труб ( $S=\pi d^2/4$ ) и с учетом того, что  $v=Q/S$ , принимают вид

$$\Delta p_{Mi} = \zeta_i \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 d^4} \text{ и } \Delta p_{Ti} = \lambda \frac{8l_i \rho Q^2}{\pi^2 d^5}.$$

Таким образом,

$$\Delta p = p_n - p_k = \sum \Delta p_{Mi} + \sum \Delta p_{Ti} = \frac{8\rho}{\pi^2 d^4} \left[ \sum \zeta_i + \frac{\lambda}{d} \sum l_i \right] Q^2,$$

Приняв во внимание, что  $\sum l_i = L$  есть практически полная длина трубопровода, окончательно можно записать:

$$\Delta p = \frac{8\rho}{\pi^2 d^4} \left[ \sum \zeta_i + \frac{\lambda}{d} L \right] Q^2 \equiv CQ^2.$$

Для сокращения дальнейших выражений коэффициент перед  $Q^2$ , включающий в себя все заданные характеристики трубопровода, обозначен буквой  $C$ .

$$\Delta p = CQ^2, \text{ где } C \equiv \frac{8\rho}{\pi^2 d^4} \left[ \sum \zeta_i + \frac{\lambda}{d} L \right].$$

Мощность насоса, необходимая для обеспечения заданного объемного расхода жидкости  $Q$  в заданном простом трубопроводе, определяется произведением этого расхода на потери давления в трубопроводе  $N = \Delta p Q$ .

**Сложный трубопровод** всегда можно представить как то или иное соединение простых трубопроводов.

Наиболее типичными соединениями простых трубопроводов являются последовательное соединение, параллельное соединение и разветвленный трубопровод.

**Последовательное соединение простых трубопроводов** пред-

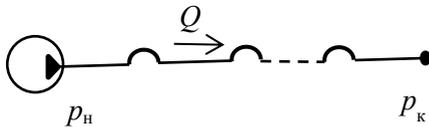


Рис. 4.12. Последовательный трубопровод

ставляет собой такое их соединение, при котором конечная точка предыдущего трубопровода соединяется с начальной точкой последующего (рис. 4.12).

При таком соединении расход жидкости в каждом из трубопроводов одинаков  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_i = \dots = Q_{n-1} = Q_n$ .

Потери давления при таком соединении простых трубопроводов складываются из потерь давления на каждом из них, которые вычисляются по полученной выше формуле

$$\Delta p_i = C_i Q^2 :$$

$$\Delta p = \sum \Delta p_i = Q^2 \sum C_i ,$$

Соответственно, необходимая мощность насоса для такого трубопровода при его горизонтальном расположении равна:  $N = Q \Delta p$ .

**Параллельное соединение простых трубопроводов** представля-

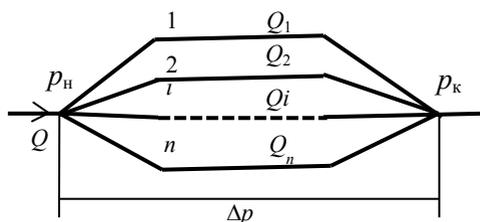


Рис. 4.13. Параллельный трубопровод

ет собой такое их соединение, при котором все их начальные точки соединяются между собой и все конечные точки соединяются между собой (рис. 4.13).

В этом случае подводимый к трубопроводу объемный расход жидкости  $Q$  разветвляется по

всем простым трубопроводам и, поскольку их характеристики, то есть сопротивления, разные, то и расходы через них разные.

Таким образом, в результате расчета такого трубопровода необходимо определить расходы жидкости через каждый из простых трубопроводов  $Q_i$  и потери давления в них.

Для решения этой задачи, прежде всего, необходимо понять, что в силу такого соединения потери давления  $\Delta p$  на всем параллельном трубопроводе и в каждом из составляющих его простых трубопроводов будут одинаковы. Действительно, поскольку начальные точки всех простых трубопроводов соединены вместе, то и давление в начальной точке каждого из них будет одинаковым и равным некоторой величине  $p_n$ . Точно также, поскольку конечные точки всех простых трубопроводов тоже соединены вместе, то и полное давление в них тоже будет одинаковым для всех и равным некоторой величине  $p_k$ . Соответственно, разность этих давлений  $p_n - p_k = \Delta p$ , представляющая собой потери давления в каждом из простых трубопроводов, будет для каждого из них одной и той же.

При этом потери давления в каждом из простых трубопроводов связаны с расходами через них известным соотношением  $\Delta p_i = C_i Q_i^2$ , а  $\Delta p_i = \Delta p$ . Эти соотношения надо дополнить еще одним очевидным соотношением, выражающим тот факт, что сумма расходов через все простые трубопроводы, равна подводимому общему расходу  $Q = \sum Q_i$ .

В итоге для нахождения всех расходов через параллельно соединенные простые трубопроводы и потерь давления в каждом из них

необходимо решить следующую систему уравнений, количество которых точно равно числу неизвестных:

$$\Delta p = C_1 Q_1^2$$

$$\Delta p = C_2 Q_2^2$$

$$\Delta p = C_i Q_i^2$$

$$\Delta p = C_n Q_n^2$$

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_i + \dots + Q_n = Q$$

Неизвестные:  $Q_i$  и  $\Delta p$

Проще всего, эта система решается выражением всех неизвестных расходов через какой либо один. Например, приравнявая правые части всех уравнений, первому из них, нетрудно получить

$$Q_2 = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} Q_1, Q_3 = \sqrt{\frac{C_1}{C_3}} Q_1, Q_i = \sqrt{\frac{C_1}{C_i}} Q_1, Q_n = \sqrt{\frac{C_1}{C_n}} Q_1.$$

Затем, подставив эти соотношения в последнее уравнение системы и вынеся за скобки  $Q_1$ , получаем

$$\left( 1 + \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} + \sqrt{\frac{C_1}{C_3}} + \dots + \sqrt{\frac{C_1}{C_i}} + \dots + \sqrt{\frac{C_1}{C_n}} \right) Q_1 = Q.$$

Отсюда легко найти  $Q_1$ , а с использованием предыдущих соотношений и все остальные расходы.

Потери давления  $\Delta p$  в параллельном трубопроводе и в каждом из простых трубопроводов находятся из любого из соотношений исходной системы уравнений.

**Разветвленный трубопровод** представляет собой такое соединение простых трубопроводов, при котором у них имеется одна (начальная) общая точка, то есть все их начальные точки соединяются между собой, а на выходе из конечных точек давления являются заданными и могут быть разными  $p_{ki}$ . Схема такого трубопровода представлена на рис. 4.14 и задачей его расчета является определе-

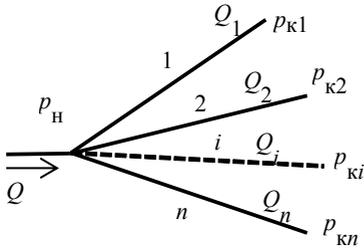


Рис. 4.14. Разветвленный трубопровод

ние расходов и потерь давления в каждом из простых трубопроводов или, поскольку давление на выходе из простых трубопроводов задано, определение расходов в каждом из простых трубопроводов и значение начального давления в общей точке  $p_n$ .

Решение этой задачи также осуществляется на основе системы уравнений, каждое из которых определяет потери давления в каждом простом трубопроводе, а также отражает тот факт, что сумма расходов через все простые трубопроводы, равна подводимому общему расходу  $Q$ .

$$\Delta p_1 = p_n - p_{k1} = C_1 Q_1^2$$

$$\Delta p_2 = p_n - p_{k2} = C_2 Q_2^2$$

$$\Delta p_i = p_n - p_{ki} = C_i Q_i^2$$

$$\Delta p_n = p_n - p_{kn} = C_n Q_n^2$$

Неизвестные:  $Q_i$  и  $p_n$ .

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_i + \dots + Q_n = Q$$

Или, что то же самое:

$$\Delta p_1 = p_n - p_{k1} = C_1 Q_1^2$$

$$\Delta p_2 = p_n - p_{k2} = C_2 Q_2^2$$

$$\Delta p_i = p_n - p_{ki} = C_i Q_i^2$$

$$\Delta p_n = p_n - p_{kn} = C_n Q_n^2$$

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_i + \dots + Q_n = Q$$

Эта система состоит из  $n+1$  уравнения и содержит  $n+1$  неизвестную ( $Q_i$  и  $p_n$ ) и достаточна для решения поставленной задачи.

Приведенные расчеты справедливы для горизонтально расположенных трубопроводов. Если начальные и конечные точки трубопроводов имеют разность уровней  $h$ , то при поднятии жидкости для преодоления силы тяжести необходимо затратить дополнительную мощность насоса  $N_g = \rho g h Q$ , а при спуске жидкости с высоты наоборот сила тяжести может обеспечить эту мощность, компенсируя часть потребной мощности насоса.

По итогам приведенной в разделе 4 теории надо уметь ответить на следующие вопросы:

1. В каком отношении распределятся расходы по двум горизонтально расположенным параллельно соединенным трубам разной длины, но с одинаковыми остальными характеристиками?

2. В каком отношении распределятся расходы в разветвленном трубопроводе, состоящем из горизонтально расположенных двух труб разной длины, но с одинаковыми остальными характеристиками и одинаковыми давлениями в конечной точке?

3. В каком отношении распределятся расходы по двум горизонтально расположенным параллельно соединенным трубам одного диаметра, но разной длины, если режим течения жидкости в трубах ламинарный?

## 5. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

### 5.1 Распространение малых возмущений в жидкостях и газах.

#### Звук.

Если имеются неподвижные жидкость или газ с равновесными значениями параметров, характеризующих его состояние: давлением  $p_0$ , плотностью  $\rho_0$ , температурой  $T_0$ , то любые отклонения от этих значений будем называть возмущениями и отмечать верхним индексом «штрих»:  $p', \rho', T'$ . При этом могут иметь место и возмущения скорости  $\vec{v}'$ . Таким образом, в возмущенной области:

$$p=p_0+p', \rho=\rho_0+\rho', T=T_0+T', \vec{v}=\vec{v}'. \quad (5.1)$$

Малыми возмущениями будем называть такие возмущения, величина которых много меньше равновесных значений параметров состояния среды:  $p' \ll p_0$ ,  $\rho' \ll \rho_0$ ,  $T' \ll T_0$ , а возмущения скорости много меньше скорости звука  $v' \ll v_{зв}$ .

В жидкостях и газах малые возмущения распространяются в виде волн, которые называются звуковыми волнами.

Таким образом, звуковые волны представляют собой совокупность распространяющихся колебаний давления, плотности, температуры и скорости частиц жидкости.

Наряду со звуковыми волнами в природе существуют и другие виды волн, отличающиеся физической природой колеблющихся в них величин.

Так в электромагнитных волнах испытывают колебания векторы напряженности электрического и магнитного поля; в волнах на поверхности жидкости – колебания уровня (координаты) поверхности и скорости частиц жидкости и т.п.

Поскольку волна представляет собой периодические изменения физических величин, как в пространстве, так и во времени, постольку эта периодичность характеризуется длиной волны  $\Lambda$  в пространстве и периодом колебаний  $T$  – во времени. При этом отношение длины волны к периоду характеризует фазовую скорость волны,  $v_\phi = \Lambda/T$ . Наряду с этими величинами используют и такие волновые характеристики как круговая частота  $\omega=2\pi/T$  и волновое число  $k = 2\pi/\Lambda$ , через которые –  $v_\phi = \omega/k$ .

Также одной из характеристики волны является фаза колебаний.

Кроме того, одной из физических характеристик волны является амплитуда колебаний соответствующей физической величины.

Как известно, периодические процессы описываются функциями синус или косинус.

При этом функция  $\sin(kx-\omega t)$  описывает бегущую волну, а произведение  $\sin(kx) \cdot \sin(\omega t)$  – стоячую.

Таким образом, бегущая звуковая волна будет описываться следующими выражениями:

$$\begin{aligned} p' &= p_a \sin(kx - \omega t), \quad \rho' = \rho_a \sin(kx - \omega t), \\ T' &= T_a \sin(kx - \omega t), \quad v' = v_a \sin(kx - \omega t), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $p_a$ ,  $\rho_a$ ,  $T_a$ ,  $v_a$  являются амплитудами колебаний соответствующих величин.

Важным является то, что колебания всех величин в звуковой волне, представленных в (5.2), являются взаимосвязанными, то есть изменение любой из них обязательно влечет за собой изменение и всех остальных. Таким образом, звуковая волна может быть возбуждена (генерирована) возмущением любой одной из этих величин. Чаще всего звуковые волны генерируются возмущениями давления в среде. Также звуковые волны чаще всего воспринимаются приемниками звука, например барабанной перепонкой уха человека, по изменению давления на нее.

Скорость звука  $v_{зв}$  определяется сжимаемостью среды  $dp/d\rho$  следующим образом:

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (5.3)$$

Для идеального газа она может быть вычислена с использованием соответствующих уравнений состояния.

Если считать процесс распространения звука изотермическим ( $T = \text{Const}$ ), то из уравнения Клапейрона-Менделеева  $p = R\rho T$  получаем:

$$v_{зв}^{из} = \sqrt{RT}. \quad (5.4)$$

Если процесс распространения звука адиабатический, то, используя уравнение адиабаты  $p = C\rho^k$ , получаем:  $dp/d\rho = kC\rho^{k-1} = kp/\rho$ .

Или с учетом уравнения Клапейрона-Менделеева  $dp/d\rho = kRT$ .

Таким образом, адиабатическая скорость звука равна

$$v_{зв}^{ад} = \sqrt{kRT}. \quad (5.5)$$

Именно это выражение в наибольшей степени соответствует реальной ситуации и будет использоваться в дальнейшем.

Волны, вообще, и звуковые волны, в частности, играют чрезвычайно важную роль в природных процессах. Именно волны являются основными переносчиками в пространстве информации о происходящих в природе процессах. Всякое изменение, происходящее в какой-либо точке пространства А, будет в состоянии оказать свое воз-

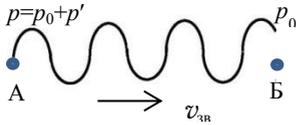


Рис.5.1. Перенос информации звуковой волной

действие в другой точке Б только после того как соответствующая волна (звуковая, электромагнитная, поверхностная и т. п.) перенесет в эту точку информацию об этом изменении с соответствующей ей скоростью, то есть через определенный промежуток времени, что иллюстрируется рис.5.1.

### ***Связь между амплитудами параметров среды в звуковой волне.***

Прежде всего, установим связь между амплитудами колебаний давления и плотности в звуковой волне, в которой  $p = p(\rho) = p(\rho_0 + \rho')$ .

При малых возмущениях плотности эту функцию можно разложить в степенной ряд и с точностью до членов первого порядка записать:

$$p = p(\rho_0 + \rho') = p(\rho_0) + \frac{dp}{d\rho} \rho' = p_0 + v_{зв}^2 \rho'.$$

Учитывая, что  $p = p_0 + p'$ , видим, что  $p' = v_{зв}^2 \rho'$  или  $p_a = v_{зв}^2 \rho_a$ .

Аналогичным образом могут быть получены соотношения и между амплитудами колебаний других величин в следующем виде

$$\begin{aligned} p_a &= v_{зв}^2 \rho_a, \\ p_a &= \rho_0 v_{зв} v_a \\ \rho_a &= (\rho_0 / v_{зв}) v_a. \end{aligned} \quad (5.6)$$

### ***Гидравлический удар.***

Гидравлический удар представляет собой звуковую волну, генерированную резким изменением скорости потока жидкости, например, при резком закрытии задвижки в трубе (рис. 5.2).

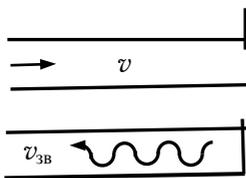


Рис.5.2. Гидравлический удар

При резкой остановке потока, движущегося с некоторой скоростью  $v_0$  скорость его изменяется от  $v_0$  до нуля, т.е. возникает возмущение скорости с амплитудой, сравнимой с этой скоростью,  $v_a \sim v_0$ .

Из (5.6)  $p_a = \rho_0 v_{зв} v_a$  и, например, при резкой остановке потока воды в трубе, движущегося со скоростью 1 м/с, при  $\rho_0 \sim 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $v_{зв} \sim 1,5 \cdot 10^3$  м/с и  $v_0 = 1$  м/с имеем величину давления в волне при гидравлическом ударе  $p_a \sim 1,5 \cdot 10^6$  Па  $\sim 15$  атм. Такое давление может привести к разрушению трубопровода.

Для исключения гидравлического удара регулирование скорости потока жидкости должно происходить достаточно плавно.

## 5.2. Основные уравнения одномерных течений сжимаемого газа

Как уже было сказано, основные особенности течений газов связаны с их хорошей сжимаемостью, то есть с заметной зависимостью их плотности от давления,  $\rho = \rho(p)$ .

Для идеального газа эта зависимость определяется уравнением Клапейрона-Менделеева  $p = R\rho T$ , а также для адиабатных течений – уравнением адиабаты  $p = C\rho^k$ .

Относительно небольшие значения скорости звука в газах позволяют реализовать их течения со скоростями, даже превышающими скорость звука.

Течения газов со скоростями, превышающими скорость звука, будем называть сверхзвуковыми, а течения со скоростями меньше скорости звука – дозвуковыми.

При этом важной характеристикой газового потока является отношение его скорости  $v$  к скорости звука  $v_{зв}$ , называемое **числом Маха**:

$$M = \frac{v}{v_{\text{зв}}} . \quad (5.7)$$

Для дозвукового потока  $M < 1$ , для сверхзвукового –  $M > 1$ .

Для скорости звука будем использовать полученное ранее выражение:

$$v_{\text{зв}} = \sqrt{kRT} . \quad (5.8)$$

Уравнение неразрывности для газовых потоков сохраняет свой общий вид (3.2), (3.3) с учетом того, что плотность газа есть величина переменная

$$\boxed{\rho v S = \text{const}}, \quad \boxed{\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2} .$$

Уравнение Бернулли для газовых потоков также сохраняет свой общий вид, но функция давления  $\mathcal{P}$  должна вычисляться для каждого термодинамического процесса отдельно

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + gz = \text{Const} , \quad \mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p)} dp . \quad (5.9)$$

Вследствие малой плотности газа действие силы тяжести на поток, как правило, не существенно. Поэтому последним слагаемым  $gz$  в уравнении Бернулли в дальнейшем будем пренебрегать.

а) Уравнение Бернулли для изотермического течения идеального газа.

$T = \text{const}$ . Необходимо вычислить функцию давления  $\mathcal{P}$ .

Из уравнения Клапейрона-Менделеева (при постоянной температуре)  $\rho/\rho_0 = p/p_0$  или,  $\rho = (\rho_0 / p_0)p$ . Тогда

$$\mathcal{P} = \frac{p_0}{\rho_0} \int_{p_0}^p \frac{1}{P} dp = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{P}{p_0} . \quad (5.10)$$

Тогда уравнение Бернулли для изотермического потока газа примет следующий вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} = \text{Const} . \quad (5.11)$$

б) Уравнение Бернулли для адиабатного течения идеального газа.

Уравнение адиабаты:  $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^k$  или  $\rho = \left( p_0 / p_0^{\frac{1}{k}} \right) p^{\frac{1}{k}}$ .

Используя это уравнение, вычисление функции давления приводит к следующим результатам:

$$\mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho} dp = \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0} \int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{k}} dp = \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0} \frac{k}{k-1} \left( p^{\frac{k-1}{k}} - p_0^{\frac{k-1}{k}} \right) = \frac{k}{k-1} \left( \frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right).$$

(При этом использовано следующее правило интегрирования:  $\int x^n dx = x^{n+1} / (n+1)$ ).

Подставляя полученное соотношение для функции давления в уравнение Бернулли, получим его выражение для адиабатного течения идеального газа:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{Const} . \quad (5.12)$$

Учтем известные термодинамические соотношения:

$$k = c_p / c_v, \quad c_p - c_v = R, \quad c_v = R / (k-1), \quad c_p = Rk / (k-1), \quad v_{\text{зв}} = \sqrt{kRT}, \quad (5.13)$$

$$p = R\rho T, \quad i = c_p T,$$

где ( $c_p$ ,  $c_v$  – удельные теплоемкости газа,  $i$  – удельная энтальпия газа).

Тогда уравнение Бернулли (6) можно записать также несколько в ином виде:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \text{Const}, \\
 \text{б) } & \frac{v^2}{2} + \frac{v_{3B}^2}{k-1} = \text{Const}, \\
 \text{в) } & \frac{v^2}{2} + c_p T = \frac{v^2}{2} + i = \text{Const}.
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

### *Адиабатически заторможенный газ.*

**Адиабатические заторможенным будем называть газ, переведенный из состояния движения в состояние покоя адиабатическим образом.**

Параметры заторможенного газа будем отмечать нижним индексом 0:  $p_0, \rho_0, T_0, v_{3B0}$ .

Уравнение Бернулли позволяет установить связь между параметрами газа в потоке с параметрами заторможенного газа.

Запишем уравнение Бернулли в форме (5.14а) для двух разных сечений потока, одно из которых находится в движущемся потоке ( $v \neq 0$ ), а второе в заторможенном газе, где  $v_0 = 0$ :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \frac{k}{k-1} RT_0.$$

Разделим это уравнение на второе слагаемое слева  $\frac{k}{k-1} RT$ .

$$\text{Получим } \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)v^2}{2kRT}.$$

$$\text{Но } kRT = v_{3B}^2. \text{ С учетом этого: } \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)}{2} \frac{v^2}{v_{3B}^2}.$$

Принимая во внимание, что  $v/v_{3B} = M$ , окончательно получаем:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2. \quad (5.15)$$

Из уравнений Клапейрона-Менделеева и адиабаты следует, что

$$\frac{p_0}{p} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{T_0}{T} \text{ и } \frac{p_0}{p} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^k, \text{ или } \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{k-1} = \frac{T_0}{T}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\rho_0}{\rho} &= \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \left( 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \text{б) } \frac{p_0}{p} &= \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^k = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left( 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}, \\ \text{в) } \frac{v_{зв0}}{v_{зв}} &= \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Таким образом, уравнения (5.15) и (5.16) дают возможность определить параметры газа в потоке, характеризуемом числом Маха  $M$ , по известным параметрам заторможенного газа.

### ***Критические значения параметров газа.***

**Критической точкой в потоке газа будем называть точку, в которой скорость газа равна скорости звука, ( $v=v_{зв}$ ), а число Маха, соответственно, равно единице ( $M=1$ ).**

Параметры газа в критической точке будем отмечать нижним индексом «звездочка»:  $p^*$ ,  $\rho^*$ ,  $T^*$ ,  $v_{зв}^*$ .

Связь между критическими параметрами газа и параметрами заторможенного газа получается из уравнений (5.15) и (5.16), если в них положить число Маха, равным единице,  $M=1$ . Тогда

а) $\frac{T_0}{T_*} = \frac{(k+1)}{2}$ , б) $\frac{\rho_0}{\rho_*} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ , в) $\frac{p_0}{p_*} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ , г) $\frac{v_{3B0}}{v_{3B*}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ .	а) $\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{k+1}$ , б) $\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ , в) $\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ , г) $\frac{v_{3B*}}{v_{3B0}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ .
---	---

**Скоростной коэффициент.**

Скоростным коэффициентом  $\lambda$  называется отношение локальной скорости газа к общей критической скорости в потоке:  $\lambda = v/v_*$ .

Используя соотношения между скоростями звука газа в потоке, параметрами заторможенного газа и критическими параметрами (5.16в) и (5.17г)

$$\lambda = \frac{v}{v_*} = \frac{v}{v_{3B}} \frac{v_{3B}}{v_{3B*}} = M \frac{v_{3B}}{v_{3B0}} \frac{v_{3B0}}{v_{3B*}},$$

получаем:

$$\lambda = M \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}} = \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2} + \frac{1}{M^2}}}. \quad (5.18)$$

При  $M=1$ :  $\lambda=1$ .

При  $M=\infty$ :  $\lambda_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ .

Соотношение (5.18) можно также записать в виде

$$\lambda = \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2} + \frac{1}{M^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2} + 1 + \frac{1}{M^2} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k+1}{2} + \frac{1}{M^2} - 1}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2}{k+1} \left( \frac{1}{M^2} - 1 \right)}}$$

из которого видно, что при  $M > 1$ :  $\lambda > 1$ ; а при  $M < 1$ :  $\lambda < 1$ .

То есть **сверхзвуковое течение одновременно является и сверхкритическим, а дозвуковое – докритическим.**

Из (5.18) можно получить и обратную зависимость  $M=M(\lambda)$ :

$$M = \frac{\sqrt{\frac{2}{k+1}}}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{k-1}{k+1}}}. \quad (5.19)$$

### 5.3. Истечение газа через отверстие в баке

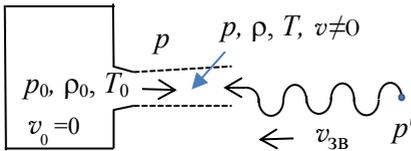


Рис.5.3. Истечение газа из бака

Пусть в баке находится неподвижный газ с равновесными значениями параметров  $p_0, \rho_0, T_0, v_0=0$ , а давление в окружающей бак среде равно  $p$ , как изображено на рис.5.3.

Если в стенке бака открывается отверстие, а давление газа в баке больше, чем давление газа в окружающей его среде ( $p_0 > p$ ), то газ начнет вытекать струей через это отверстие с некоторой скоростью  $v$ . При достаточно большой скорости истечения теплообмен между газом в струе и окружающем ее газом происходить не успевает и истечение газа можно считать процессом адиабатическим.

Определим эту скорость.

Чем больше размеры бака по сравнению с размерами отверстия, тем меньше скорость подтекания газа к отверстию внутри бака по сравнению со скоростью газа в струе, вытекающей через отверстие. Это легко объяснимо, если учесть, что при постоянном массовом расходе газа  $Q = \rho v S$  через поперечные сечения бака и струи площадь сечения бака и плотность газа в баке больше, чем в струе.

Примем, что размеры бака велики настолько, что скоростью течения газа в баке можно пренебречь по сравнению со скоростью газа в струе. В этом случае газ в баке может рассматриваться как адиабатически заторможенный по отношению к газу в вытекающей струе.

Запишем уравнение Бернулли для двух сечений рассматриваемого потока газа, одно из которых находится в струе, а другое – в баке:  $\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}$ , из которого легко получается выражение для скорости истечения газа в следующем виде:

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) \right]} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho} \right]}.$$

Давление и плотность газа связаны между собой уравнением адиабаты  $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^k$ , либо  $\rho/\rho_0 = (p/p_0)^{\frac{1}{k}}$ . Используя его окончательно получается соотношение для скорости истечения газа через отверстие в баке

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}, \quad (5.20)$$

которое носит название формулы Сен-Венана-Венцеля.

Из этой формулы, в частности, следует, что при понижении давления в окружающей бак среде при том же давлении газа в баке, скорость истечения газа возрастает и имеет максимальное значение  $v_{\text{макс}}$  при истечении газа в вакуум, при  $p=0$ :

$$v_{\text{макс}} = v(p=0) = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} v_{\text{зв}0}. \quad (5.21)$$

Поскольку значение показателя адиабаты  $k$  больше единицы, то из этой формулы следует, что максимальное значение скорости больше скорости звука в заторможенном газе в баке.

С другой стороны известно соотношение (5.17г)) между скоростью звука в заторможенном газе и скоростью звука в критической точке:  $v_{\text{зв}0} = \sqrt{\frac{k+1}{2}} v_{\text{зв}^*}$ . С учетом этого  $v_{\text{макс}} = v(p=0) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} v_{\text{зв}^*}$ .

Таким образом, согласно формуле Сен-Венана-Венцеля, максимальная скорость истечения газа может быть больше критической скорости звука,  $v_{\text{макс}} > v_{\text{зв}^*}$ .

Однако, этому препятствует возникающее при истечении газа явление запираания потока.

**Явление запираания потока** возникает, когда при понижении

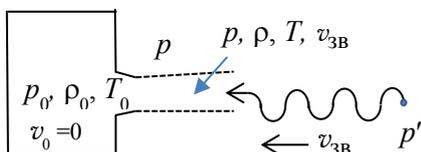


Рис.5.4. Явление запираания потока газа

внешнего давления скорость истечения газа на выходе из отверстия достигает скорости звука в струе, то есть на выходе из отверстия формируется критическая точка (рис. 5.4).

Примем во внимание, что все изменения (возмущения) параметров газа, происходящие во внешней среде, проникают в бак посредством звуковых волн со скоростью звука через отверстие в баке по вытекающей струе. Поэтому при движении самой струи со скоростью звука они будут полностью сноситься потоком струи и в бак не проникнут.

Таким образом, явление запираания потока заключается в том, что при скорости истечения струи, равной скорости звука в ней, газ в баке перестает реагировать на любые изменения давления во внешней среде.

Дальнейшее уменьшение внешнего давления не будет приводить к увеличению скорости истечения, как это следует из уравнения Сен-Венана-Венцеля. Соответственно, скорость истечения струи, равная скорости звука в ней, является максимально возможной, также как и массовый расход является максимально возможным.

Вычислим максимально возможный массовый расход газа через отверстие, используя полученные ранее соотношения между параметрами заторможенного газа и его критическими параметрами.

$$Q_{\text{макс}} = \rho_* v_* S,$$

$$Q_{\text{макс}} = \rho_* v_* S = \rho_0 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} v_{*0} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} S = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \rho_0 \sqrt{kRT_0} S = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \rho_0 \sqrt{k \frac{p_0}{\rho_0}} S$$

$$Q_{\text{макс}} = \rho_* v_* S = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{k p_0 \rho_0} S. \quad (5.22)$$

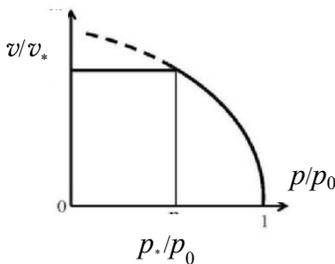


Рис.5.5. Изменение скорости истечения газа при понижении внешнего давления.

Для воздуха  $p_*/p_0 = 0,528$ .

Если графически изобразить зависимость скорости истечения газа от внешнего давления, как это сделано на рис. 5.5, то при понижении этого давления скорость истечения будет увеличиваться согласно уравнению Сен-Венана-Венцеля, но при достижении значения критической скорости звука дальнейший рост ее прекратится и скорость истечения останется равной этой величине.

## 5.4. Движение газа в канале переменного сечения

Рассмотрим течение газа в канале переменного сечения, когда его площадь  $S$  является некоторой функцией продольной координаты  $x$ :

$$v=v(x), p=p(x), \rho=\rho(x), T=T(x)$$

$$S = S(x) \text{ (рис. 5.6).}$$

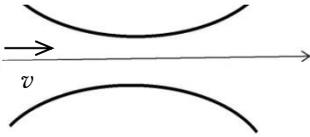


Рис.5.6. Канал переменного сечения

В этом случае и все характеристики потока газа будут изменяться и являться функциями этой координаты.

В основу рассмотрения положим уравнение неразрывности и уравнение Бернулли:

$$\rho v S = \text{const} \text{ (уравнение неразрывности)}$$

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = \text{Const}, \quad \mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p)} dp \text{ (уравнение Бернулли)}$$

1) Продифференцируем по координате  $x$  уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dx} v S + \rho \frac{dv}{dx} S + \rho v \frac{dS}{dx} = 0.$$

Разделим полученное на  $\rho v S$ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = 0. \quad (5.23)$$

2) Продифференцируем по координате  $x$  уравнение Бернулли, используя известное правило дифференцирования сложных функций

$$\frac{d}{dx} f[y(x)] = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \text{ Тогда:}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v^2}{2} \right) \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \mathcal{P}[p(x)] = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}.$$

В итоге:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0. \quad (5.24)$$

Учитывая, что  $p=p[\rho(x)]$ , имеем:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} = v_{3B}^2 \frac{d\rho}{dx}$ .

После подстановки этого соотношения в уравнение (5.24), его можно записать в виде:

$$v \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} v_{3B}^2 \frac{d\rho}{dx} = 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = -\frac{v}{v_{3B}^2} \frac{dv}{dx}. \quad (5.25)$$

С использованием этого соотношения уравнение (5.23) принимает вид:

$$-\frac{v}{v_{3B}^2} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \left( -\frac{v}{v_{3B}^2} + \frac{1}{v} \right) \frac{dv}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \left( -\frac{v^2}{v_{3B}^2} + 1 \right) \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = 0$$

Учитывая, что  $v/v_{3B}=M$  и перенося второе слагаемое в правую часть, окончательно получаем

$$\boxed{(M^2 - 1) \frac{dv}{dx} = \frac{v}{S} \frac{dS}{dx}} \quad \text{— уравнение Гюгонио,} \quad (5.26)$$

анализ которого позволяет получить важные особенности течений газов.

#### 5.4.1. Движение газа через диффузор

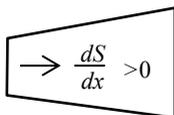


Рис. 5.7. Движение газа через диффузор

В этом случае в уравнении Гюгонио (5.26) правая часть больше нуля, значит, и левая часть должна быть больше нуля (рис. 5.7). В левой части стоят два сомно-

жителя, которые должны иметь одинаковый знак.

а) Если  $M < 1$ , то  $(M^2 - 1) < 0$ . Значит и  $\frac{dv}{dx} < 0$ . То есть скорость газа уменьшается.

б) Если  $M > 1$ , то  $(M^2 - 1) > 0$ . Значит и  $\frac{dv}{dx} > 0$ . То есть скорость газа увеличивается.

**Таким образом, при движении в диффузоре скорость дозвукового потока газа уменьшается, а сверхзвукового – увеличивает-ся.**

#### 5.4.2. Движение газа через конфузор

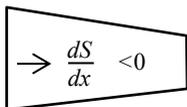


Рис. 5.8. Движение газа через конфузор

В этом случае в уравнении Гюгонио (5.26) правая часть меньше нуля, значит, и левая часть должна быть меньше нуля (рис.5.8). Тогда множители в левой части этого уравнения должны иметь разные знаки.

а) Если  $M < 1$ , то  $(M^2 - 1) < 0$ , и  $\frac{dv}{dx} > 0$ . То есть

скорость газа увеличивается.

б) Если  $M > 1$ , то  $(M^2 - 1) > 0$ . Значит  $\frac{dv}{dx} < 0$ . То есть скорость газа уменьшается.

**Таким образом, при движении в конфузоре скорость дозвукового потока газа увеличивается, а сверхзвукового – уменьшает-ся.**

#### 5.4.3. Условие перехода скорости газа через значение скорости звука

Если скорость газа становится равной скорости звука, то есть число Маха становится равным единице, то левая часть уравнения

Гюгонио (3.26) становится равной нулю. Это означает, что при этом и правая часть должна обращаться нуль. Это возможно только, когда  $\frac{dS}{dx} = 0$ . Точка, в которой производная функции обращается в нуль, называется точкой экстремума и в ней функция имеет или максимум, или минимум. Таким образом, из уравнения Гюгонио, следует, что скорость газа, может иметь значение равное скорости звука только в экстремальном сечении потока.

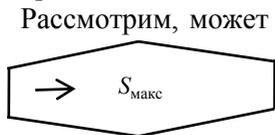


Рис. 5.9. Канал с максимальным сечением

Рассмотрим, может ли это иметь место в максимальном сечении канала (рис. 5.9), который в этом случае представляет собой сочетание диффузора и конфузора.

а) Если в такой канал входит дозвуковой поток, то скорость его в диффузоре уменьшается. Может ли она стать **равной** скорости звука на выходе из диффузорной части? Нет.

б) Если в такой канал входит сверхзвуковой поток то скорость его в диффузоре еще больше увеличивается. Может ли она стать **равной** скорости звука на выходе из диффузорной части? Нет.

Рассмотрим, может ли это иметь место в **минимальном** сечении канала (рис. 5.10), который в этом случае представляет собой сочетание конфузора и диффузора.



Рис. 5.10. Канал с минимальным сечением

а) Если в такой канал входит дозвуковой поток, то скорость его в конфузоре увеличивается. Может ли она стать **равной** скорости звука на выходе из конфузорной части? Да.

б) Если в такой канал входит сверхзвуковой поток, то скорость его в конфузоре уменьшается. Может ли она стать **равной** скорости звука на выходе из конфузорной части? Да.

**Таким образом, скорость газа, имеющая значение, равное скорости звука, может иметь место только в минимальном сечении потока.**

Получение газовых потоков с как можно большим значением скорости имеет определяющее значение для многих важных техни-

ческих устройств, например, реактивных двигателей, газовых турбин и т.п.

В связи с этим необходимы устройства, обеспечивающие ускорение исходно создаваемых дозвуковых потоков до более высоких скоростей, в том числе сверхзвуковых.

Таким образом, устройство, преобразующее дозвуковой поток газа в сверхзвуковой должно представлять собой канал внутри которого скорость газового потока как минимум должна стать равной скорости звука.

Исходя из вышесказанного, такое устройство должно представлять собой сочетание конфузора и диффузора и иметь минимальное сечение при переходе из одного в другое.

В минимальном или критическом сечении параметры газа достигают своих критических значений.

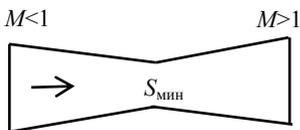


Рис. 5.11. Сопло Лаваля

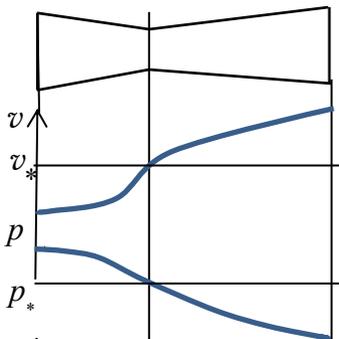


Рис. 5.12. Режим работы сопла Лаваля

Устройство такой конструкции, предназначенное для преобразования дозвукового потока газа в сверхзвуковой, носит название **соп-ло Лаваля** (рис. 5.11).

Графически нормальный режим работы сопла Лаваля выглядит следующим образом (рис. 5.12).

В конфузоре дозвуковой поток газа должен ускоряться до значения скорости звука в минимальном сечении перед входом в диффузор и продолжить ускорение в диффузоре как сверхзвуковой поток.

При этом давление должно падать от выше критического на входе в конфузор до ниже критического на выходе из диффузора.

## 5.5. Распространение конечных возмущений в газе. Ударная волна

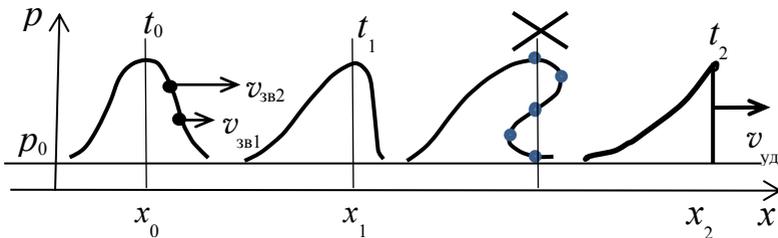
Конечными возмущениями будем называть такие возмущения, величина которых сравнима или больше~ равновесных значений параметров состояния среды:  $p' \sim p_0$ ,  $\rho' \sim \rho_0$ ,  $T' \sim T_0$ , а возмущения скорости сравнимы со скоростью звука  $v' \sim v_{зв}$ .

В таких ситуациях скорость их распространения, определяемая скоростью звука, будет зависеть от величины возмущения. А именно,  $v_{зв} = \sqrt{kRT}$ .

Из уравнений адиабаты и Клапейрона-Менделеева  $p \sim \rho^k$ ,  $p \sim \rho T$  или  $T \sim \rho^{k-1}$ ,  $T \sim p^{\frac{k-1}{k}}$ .

То есть  $v_{зв} \sim \sqrt{T} \sim \sqrt{\rho^{k-1}} \sim \sqrt{p^{\frac{k-1}{k}}}$ , и чем больше температура, плотность или давление газа, тем больше скорость звука в нем.

Пусть в неподвижном равновесном газе с параметрами  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $T_0$  в начальный момент времени  $t_0$  в некоторой точке с координатой  $x_0$  возникает локальный импульс давления  $p$  (рис. 3.13). В точке  $x_0$  давление  $p$  становится больше, чем равновесное  $p_0$ , а по мере удаления от нее спадает до равновесного. Каждая точка этого импульса представляет собой возмущение давления, которое начинает распространяться в пространстве как звуковая волна.



5.13. Деформация формы конечного импульса давления при его распространении

Рассмотрим распространение этого импульса в целом, предполагая, что величина возмущений давления в нем является не малой, а конечной величиной. Область от максимума импульса в сторону его распространения будем называть передним фронтом импульса, а область от максимума в противоположную сторону – задним фронтом.

Будем считать, что каждая точка импульса распространяется с присущей ей локальной или местной скоростью звука. Чем выше располагается точка на фронте импульса, тем больше в ней давление и тем выше скорость ее распространения. Следовательно, при распространения импульса конечного возмущения разные его точки движутся с разными скоростями. Очевидно, что, если при поступательном движении разные точки какого-либо объекта движутся с разными скоростями, то это должно приводить к деформации объекта, то есть к изменению его формы.

**Таким образом, особенностью распространения импульса конечного возмущения является то, что по мере его распространения он деформируется и форма его изменяется.**

Рассмотрим этот процесс более детально.

В процессе распространения переднего фронта импульса движущиеся с большей скоростью вышележащие точки (2) начинают догонять нижележащие точки (1). В результате этого в некоторый следующий момент времени  $t_1$ , когда максимум импульса переместится в новую точку  $x_1$ , передний фронт деформируется таким образом, что станет более крутым.

На заднем фронте вышележащие также точки будут обгонять нижележащие, но это приведет к тому, что форма его станет более пологой.

Возможно ли возникновение такой ситуации, что в некоторый следующий момент времени  $t_2$  вышележащая точка 2 обгонит нижележащую точку 1 и импульс примет форму, изображенную на рисунке третьей по счету слева?

В природе волну такой формы можно, например, наблюдать у поверхностных волн на море при их набегании на берег (рис. 5.14). Вблизи берега начинает сказываться тормозящее влияние дна на прилегающие слои жидкости, и они начинают двигаться со скоростью, меньшей, чем вершина волны. Однако, у поверхностной волны

такой график описывает зависимость координаты поверхности жидкости  $z$  от координаты  $x$  вдоль направления ее распространения.

В рассматриваемом случае мы имеем график зависимости давления в жидкости от этой координаты  $x$ . Такого вида график свидетельствует о том, что есть точки, в которых давление имеет три значения. Но это физически невозможно. Поэтому, такой деформации переднего фронта волны давления быть не может. То невозможна ситуация, когда вышележащая точка на переднем фронте волны обгонит нижележащую. Предельно возможное деформирование этого фронта возможно только до тех пор, пока все вышележащие точки не догонят нижележащие и все они не расположатся на одной прямой. В этом случае этот график будет представлять собой разрывную функцию, а на переднем фронте волны возникнет разрыв или скачок давления. Действие такой волны будет восприниматься как удар, а соответствующая волна будет называться ударной.

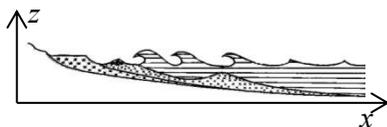


Рис. 5.14. Опрокидывание морской волны

Таким образом, при распространении конечного возмущения оно трансформируется в ударную волну. Примеры возникновения ударной волны показаны на рис. 5.15.

Из приведенного выше рассмотрения следует, что скачок давления возникает на переднем фронте импульса, когда давление при его прохождении повышается, то есть при уплотнении невозмущенного газа. В то же время задний фронт импульса, соответствующий понижению давления при его прохождении, становится все более пологим. Таким образом, можно констатировать, что скачок уплотнения может иметь место, а скачок разрежения – нет.



а)



б)

Рис. 5.15. Примеры возникновения ударной волны при взрыве (а), при преодолении самолетом звукового барьера (б)

В рассмотренном случае плоскость скачка располагается перпендикулярно направлению его распространения. Такой скачок будем называть прямым, в отличие от также возможного косого скачка, когда плоскость скачка и направление его распространения не взаимоперпендикулярны.

Такой распространяющийся скачок уплотнения носит название ударной волны, а его местоположение будем называть фронтом ударной волны. За скачком уплотнения тоже имеет место движение газа, которое называется спутным потоком.

Скачок уплотнения может быть сформирован в результате возмущений в газе, вызванных резким началом движения поршня в трубе, которая в этом случае называется ударной трубой и широко используется в исследованиях ударных волн (рис. 5.16).

В системе координат, связанной с фронтом ударной волны, параметры газа перед фронтом будем отмечать нижним индексом 1, а за фронтом – нижним индексом 2. Таким образом,  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $T_1$  равны значениям давления, плотности и температуры в среде, в которую происходит распространение ударной волны, а  $p_2$ ,  $\rho_2$ ,  $T_2$  значения этих величин за фронтом ударной волны. При этом  $v_1$  равна скорости ударной волны,  $v_1 = v_{уд}$ , а скорость спутного потока равна  $v_{сп} = v_1 - v_2$  или  $v_2 = v_{уд} - v_{сп}$ .

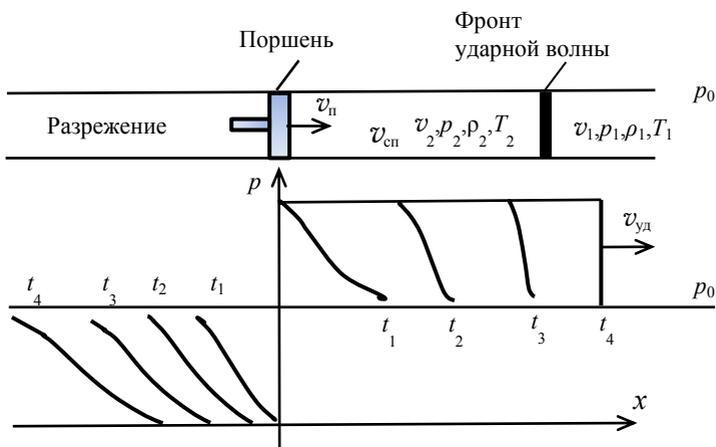


Рис. 5.16. Формирование ударной волны в ударной трубе

Таким образом, в рассматриваемом случае скачки параметров газа в ударной волне будут иметь следующий вид (рис. 5.17)

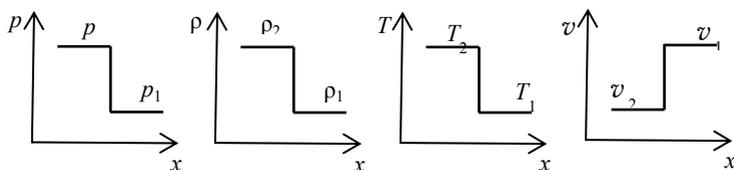


Рис. 5.17. Скачки параметров газа в ударной волне

Применим к газовому потоку перед и за фронтом ударной волны уравнения:

а) неразрывности:  $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$  ,

б) Бернулли:  $\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2}$  , (5.27)

в) движения:  $\rho_2 v_2 \vec{v}_2 S_2 - \rho_1 v_1 \vec{v}_1 S_1 = \vec{F}$  .

Учитывая, что  $S_1 = S_2 = S$ ,  $F = (p_1 - p_2)S$ , имеем в проекции на ось  $x$

$$\text{а) } \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2,$$

$$\text{б) } v_2^2 - v_1^2 = \frac{2k}{k-1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right), \quad (5.28)$$

$$\text{в) } \rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2 = p_1 - p_2.$$

### 5.5.1. Уравнение ударной адиабаты

Установим соотношения между давлениями и плотностями газа в ударной волне.

$$\text{Из (5.28в) с учетом (5.28а) имеем: } \rho_1 v_1 (v_2 - v_1) = p_1 - p_2.$$

Умножим это уравнение на  $\frac{v_1 + v_2}{\rho_1 v_1}$  и получаем с учетом (5.28а)

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{v_1 + v_2}{\rho_1 v_1} (p_1 - p_2) = \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_1 - p_2). \quad (5.29)$$

Сравнивая это выражение с (5.28б), имеем:

$$\frac{2k}{k-1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_1 - p_2).$$

Собирая вместе слагаемые с  $p_1$  и  $p_2$ , приходим к следующему соотношению

$$p_1 \left( \frac{2k}{k-1} \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = p_2 \left( \frac{2k}{k-1} \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right), \text{ или}$$

$$p_1 \left( \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = p_2 \left( \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right), \text{ или}$$

$$p_1 \left( \frac{k+1}{k-1} \rho_2 - \rho_1 \right) = p_2 \left( \frac{k+1}{k-1} \rho_1 - \rho_2 \right).$$

Окончательно

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)\rho_2 - (k-1)\rho_1}{(k+1)\rho_1 - (k-1)\rho_2} = \frac{(k+1)\frac{\rho_2}{\rho_1} - (k-1)}{(k+1) - (k-1)\frac{\rho_2}{\rho_1}}. \quad (5.30)$$

Это уравнение может быть также разрешено относительно отношения плотностей

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1) + (k-1)\frac{p_1}{p_2}}{(k-1) + (k+1)\frac{p_1}{p_2}}. \quad (5.31)$$

Уравнение (5.31) носит название «**уравнение ударной адиабаты или адиабаты Гюгонио**» и связывает между собой отношение давлений и плотностей за и перед ударной волной, также как уравнение обычной изэнтропической адиабаты (адиабаты Пуассона)

$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k$  связывает эти величины в двух состояниях в обычном адиабатическом процессе.

Принципиальным отличием ударной адиабаты является то, что рассматриваемые термодинамические состояния газа разделены скачками термодинамических величин, а не являются непрерывно изменяющимися, как обычно.

В силу этого, уравнение ударной адиабаты показывает, что отношение плотностей в ударной волне не может превышать некоторого

предельного значения  $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\text{макс}} = \frac{k+1}{k-1}$ , при котором знаменатель

этой формулы обращается в ноль, а давление  $p_2$  за фронтом ударной волны – в бесконечность (рис. 5.18). Таким образом, даже при бесконечно большом давлении в ударной волне плотность газа в ней остается конечной и не превышающей значения, определенного формулой приведенной выше. Для воздуха

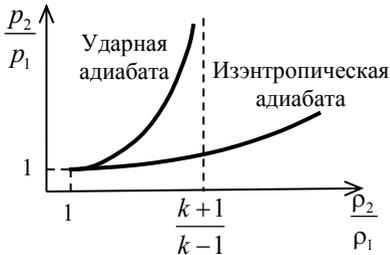


Рис. 5.18. Графики ударной и изэнтропической адиабат

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\text{макс}} = \frac{k+1}{k-1} = 6.$$

### 5.5.2. Соотношения между параметрами газа в ударной волне

Интенсивность ударной волны будем характеризовать отношением давления за ее фронтом  $p_2$  к давлению  $p_1$  перед фронтом, имеющему место в невозмущенном газе, в который волна распространяется,  $p_2/p_1$ .

**Соотношения между скоростями газа за и перед фронтом ударной волны.**

Записав уравнение движения (3.28в) в виде  $p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2$  и разделив его на уравнение (3.28а)  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ , получим:

$$\frac{p_1}{\rho_1 v_1} - \frac{p_2}{\rho_2 v_2} = v_2 - v_1. \quad (5.32)$$

Применив уравнение Бернулли к движущемуся и заторможенному ( $v_0=0$ ) состояниям газа, можно записать

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{kRT_0}{k-1} = \frac{v_{3B0}^2}{k-1}$$

и, используя соотношения между скоростями звука в заторможенном

газе и в критической точке (5.17Г)  $\frac{v_{3B0}}{v_{3B*}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ , получаем

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k+1}{2(k-1)} v_*^2.$$

Применим это уравнение к состояниям газа перед и за фронтом ударной волны:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2(k-1)} v_*^2, \quad (5.33)$$

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2(k-1)} v_*^2.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2k} v_*^2 - \frac{k-1}{2k} v_1^2,$$

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2k} v_*^2 - \frac{k-1}{2k} v_2^2.$$

Подставив эти соотношения в (5.32):  $\frac{p_1}{\rho_1 v_1} - \frac{p_2}{\rho_2 v_2} = v_2 - v_1$ , получим

$$\frac{k+1}{2k} \frac{v_*^2}{v_1} - \frac{k-1}{2k} v_1 - \frac{k+1}{2k} \frac{v_*^2}{v_2} + \frac{k-1}{2k} v_2 = v_2 - v_1,$$

или, группируя попарно слагаемые в левой части

$$\frac{k+1}{2k} \frac{v_*^2}{v_1 v_2} (v_2 - v_1) + \frac{k-1}{2k} (v_2 - v_1) = v_2 - v_1.$$

Сокращая на  $(v_2 - v_1)$  и принимая во внимание, что  $\frac{k-1}{2k} - 1 = -\frac{k+1}{2k}$ , окончательно получаем  $v_1 v_2 = v_*^2$  или, используя определение скоростного коэффициента  $\lambda = v / v_*$ , приходим к формуле Прандтля

$$\boxed{\lambda_1 \lambda_2 = 1}, \quad (5.34)$$

где  $\lambda_1 = v_1 / v_*$ ,  $\lambda_2 = v_2 / v_*$ .

Из (5.34) следует, что **произведение скоростных коэффициентов перед и за фронтом ударной волны равно единице.**

Поскольку скорость газа перед фронтом ударной волны больше, чем за ним,  $v_1 > v_2$ , то и значение скоростного коэффициента перед фронтом больше, чем за ним,  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Так как в соответствии с формулой Прандтля (5.34), произведение этих коэффициентов равно единице, значит больший из них должен быть больше единицы, а меньший – меньше, то есть  $\lambda_1 > 1$ , а  $\lambda_2 < 1$ .

Раньше формулой (5.18) было установлено, что, если скоростной коэффициент больше единицы, то, соответственно, больше единицы и число Маха  $M = v / v_{зв}$ . Таким образом, перед фронтом ударной волны  $\lambda_1 > 1$  и  $M_1 = v_1 / v_{зв1} > 1$ , а за ним:  $\lambda_2 < 1$  и  $M_2 = v_2 / v_{зв2} < 1$ .

В результате, приходим к выводу, что **движение газа перед фронтом ударной волны является сверхзвуковым и сверхкритическим, а за фронтом – дозвуковым и докритическим.**

### *Соотношения для скачков параметров газа в ударной волне.*

Полученные выше выражения для скачков параметров газа в ударной волне можно выразить через число Маха:

$$а) \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1),$$

$$\text{б) } \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{M_1^2 - 1}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}, \quad (5.35)$$

$$\text{в) } \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{2(k-1)}{(k+1)^2 M_1^2} (M_1^2 - 1)(1 + kM_1^2).$$

### **Скорость ударной волны**

Величиной, характеризующей интенсивность ударной волны, является отношение давлений за ее фронтом и перед ним  $p_2/p_1$ .

Выражение для скорости ударной волны  $v_{уд}$  в зависимости от ее интенсивности  $p_2/p_1$  можно получить из соотношения для скачка давления (5.35а), учитывая то, что число Маха  $M_1$  фактически представляет собой отношение скорости ударной волны  $v_{уд}$  к скорости звука в невозмущенном газе  $v_{зв1}$ , в который распространяется ударная волна:  $M_1 = v_{уд} / v_{зв1}$ . Это выражение будет иметь вид

$$v_{уд} = \sqrt{1 + \frac{k+1}{2k} \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right)} v_{зв1}. \quad (5.36)$$

Поскольку  $p_2 > p_1$ , из (5.36) прежде всего, следует, что:

а) **скорость ударной волны в газе всегда больше скорости звука в нем**  $v_{уд} > v_{зв1}$ ;

б) при  $p_2/p_1 \rightarrow 1$  имеем  $v_{уд} \rightarrow v_{зв1}$ , то есть **ударная волна малой интенсивности переходит в звуковую**.

Ударные волны могут возникать в компрессорах турбомашин и холодильных установок и приводить к различным разрушениям, например, к поломкам лопаток турбины.

Актуальной задачей является снижение габаритов и уменьшение количества ступеней в высоконапорных компрессорах. В качестве альтернативы традиционным решениям предлагается использовать принципиально новое устройство – ударно-волновой (волновой) компрессор (УВК), сжатие в котором происходит в оптимальной системе бегущих ударных волн.

Ударные волны также могут возникать при кавитации в результате быстрого схлопывания пузырьков газа и приводить к повреждениям устройств.

В настоящее время ударные волны используются в медицине при, так называемой, ударно-волновой терапии.

## 6. ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

На тело, находящееся в потоке жидкости или газа, со стороны потока действует сила  $\vec{F}$  (рис. 6.1). Это же справедливо и если тело движется в жидкости или газе.

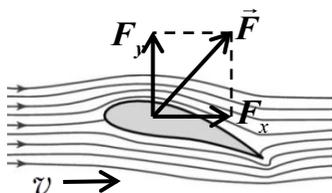


Рис. 6.1. Силы, действующие на тело в потоке

Проекцию этой силы на направление движения потока будем называть силой лобового сопротивления  $F_x$ , а проекцию на направление, перпендикулярное скорости потока – подъемной силой  $F_y$ .

Для описания этих сил используется их представление в отношении к динамическому давлению в жидкости  $\rho v^2 / 2$ , умноженному на характерную площадь их действия  $S$ .

$$F_x = C_x S \frac{\rho v^2}{2} - \text{сила лобового сопротивления}, \quad (6.1)$$

$$F_y = C_y S \frac{\rho v^2}{2} - \text{подъемная сила}.$$

Коэффициенты пропорциональности в этих выражениях называются соответственно коэффициентом лобового сопротивления  $C_x$  и коэффициентом подъемной силы  $C_y$ ,

Характерная площадь  $S$  называется площадью Миделева сечения и представляет собой площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной направлению движения потока в том месте, где величина этой площади максимальна.

## 6.1. Сила лобового сопротивления

Физически сила лобового сопротивления обусловлена двумя факторами:

- 1) силами вязкого трения в жидкости  $F_{\text{хт}}$  и
- 2) силами давления  $F_{\text{хд}}$ , действующими на обтекаемое тело.

Соответственно силу лобового сопротивления можно представить как сумму этих сил  $F_x = F_{\text{хт}} + F_{\text{хд}}$ , а каждую из них представить в форме (6.1) и характеризовать соответствующим коэффициентом

$$F_{\text{хт}} = C_{\text{хт}} S \frac{\rho v^2}{2}, \quad F_{\text{хд}} = C_{\text{хд}} S \frac{\rho v^2}{2},$$

где  $C_{\text{хт}}$  – коэффициент сопротивления трения,  $C_{\text{хд}}$  – коэффициент сопротивления давления.

Нетрудно видеть, что полный коэффициент лобового сопротивления равен сумме коэффициентов сопротивления трения и давления:  $C_x = C_{\text{хт}} + C_{\text{хд}}$ .

Как уже было сказано, сила сопротивления трения определяется вязкими напряжениями на поверхности тела  $\vec{\tau}$  и суммированием их действия по всей поверхности тела  $S_{\text{тела}}$ :

$$F_{\text{хт}} = \int_{S_{\text{тела}}} \tau_x dS .$$

Силу сопротивления давления проще всего оценить, представив идеализированную картину обтекания пластины, расположенной перпендикулярно набегающему со скоростью  $v_0$  потоку (рис. 6.2).

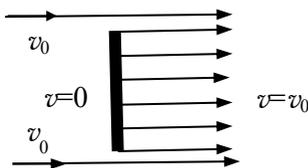


Рис.6.2. Идеализированное обтекание пластины

Если представить, что перед пластиной поток полностью тормозится и его скорость равна нулю, а за пластиной продолжает двигаться с исходной скоростью  $v_0$ , то, как известно из уравнения Бернулли, в тех местах потока, где скорость меньше, там давление больше и наоборот. В силу этого давление на переднюю (лобовую) часть пластины будет больше, чем на заднюю

(кормовую). Таким образом, на обтекаемых сторонах пластины создается перепад давления, который, будучи умноженным на площадь пластины  $S_{\text{пл}}$ , определит силу, действующую на пластину со стороны потока в направлении его движения, то есть силу лобового сопротивления пластины.

Уравнение Бернулли, записанное для сечений потока перед и за пластиной, будет выглядеть следующим образом:

$$p_1 = \frac{\rho v_0^2}{2} + p_2,$$

где  $p_1$  и  $p_2$  давления в жидкости перед и за пластиной, соответственно.

Таким образом, на обтекаемых сторонах пластины создается перепад давления

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho v_0^2}{2},$$

а сила лобового сопротивления определится следующим образом

$$F_{\text{зд}} = S_{\text{пл}} \frac{\rho v_0^2}{2}. \quad (6.2)$$

В этом случае коэффициент сопротивления давления максимален и равен единице.

Формула (6.2) может быть успешно использована во многих случаях для оценки силы сопротивления давления для разных тел. В



Рис. 6.3. Реальная картина обтекания пластины

реальности процесс обтекания пластины носит более сложный характер, изображенный на рис. 6.3, и этот коэффициент меньше единицы, но в любом случае скорость потока в лобовой части из-за торможения потока всегда меньше, чем в кормовой.

Важным во всех случаях остается то, что сила сопротивления давления создается за счет перепадов давления на поверхности обте-

каемого тела, обусловленных разностью скоростей потока в разных точках его поверхности.

Как показывает опыт, сила сопротивления давления в значительной степени зависит от формы тела и его ориентации в потоке. Если при обтекании тела большую часть силы лобового сопротивления составляет сила сопротивления давления ( $C_{хд} > C_{хт}$ ), то такое тело называется плохо – или неудобообтекаемым. Примерами таких тел могут служить шар, цилиндр или пластина при ее поперечном обтекании.

Хорошо – или удобнообтекаемыми телами называются такие, для которых сила сопротивления давления мала и большую часть лобового сопротивления составляет сопротивление трения ( $C_{хд} < C_{хт}$ ). К ним относятся пластина при продольном обтекании, крыло самолета, сигарообразные тела.

В реальности основной причиной возникновения разности скоростей в лобовой и кормовой частях тела на поверхности обтекаемого тела является образование вихревых зон за кормой обтекаемого тела из-за вязкости жидкости, как изображено на рис. 6.4.

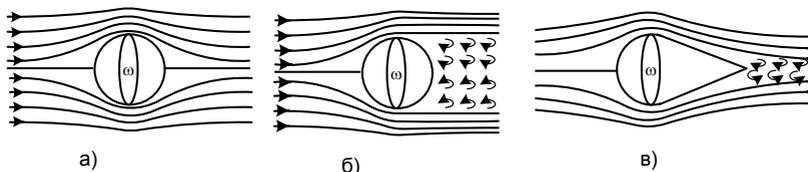


Рис. 6.4. Картина обтекания разных тел

Так, например, при обтекании шара потоком невязкой (идеальной) жидкости картина обтекания была бы симметричной в лобовой и кормовой его частях, как изображено рисунке 6.4а). В этом случае сила лобового сопротивления отсутствует, что противоречит реальности. Поэтому такое обтекание называется парадоксом Даламбера.

Однако в реальной вязкой жидкости картина обтекания шара выглядит далеко не симметричной. В лобовой части шара поток тормозится, так, что в некоторой точке поверхности, называемой передней критической точкой, его скорость обращается в ноль и он разветвляется. В кормовой части происходит отрыв потока и образование вих-

ревой зоны (рис. 6.4б). Скорости потока в кормовой вихревой зоне больше, чем в лобовой и, соответственно, давление в ней меньше. Таким образом, кормовая вихревая зона представляет собой зону пониженного давления по сравнению с лобовой частью. Между лобовой и кормовой частями тела возникает перепад давления, обуславливающий силу сопротивления давления, направленную вдоль потока (или против движения тела).

Сила сопротивления давления зависит от площади сечения вихревой зоны и может быть уменьшена за счет ее уменьшения. Это называется придать телу хорошо обтекаемую форму.

Придание телу хорошо обтекаемой формы заключается в таком изменении его формы (при той же площади миделева сечения), при которой обтекание его является более плавным, безотрывным и ширина вихревой зоны будет минимальной. Эта цель, например, достигается приданием телу зауженной к корме сигарообразной формы (рис. 6.4в). Примерно такую форму имеют фюзеляжи летательных аппаратов, крыло самолета и т.п.

## 6.2. Подъемная сила

Прежде всего, зададимся вопросом, может ли иметь место подъемная сила, то есть сила, направление которой перпендикулярно скорости набегающего потока, при обтекании тела, симметричного относительно оси, совпадающей с направлением потока, как изображено на рис. 6.5?

Ответ достаточно очевиден, что нет. В противном случае направление этой силы было бы невозможно определить в силу симметрии ситуации. Поэтому подъемная сила возникает только при несимметричном обтекании тела (рис. 6.6).

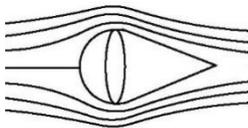


Рис. 6.5. Обтекание симметричного тела без возникновения подъемной силы

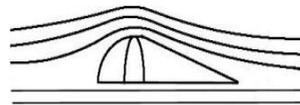


Рис. 6.6. Обтекание несимметричного тела с возникновением подъемной силы

При таком обтекании с более выпуклой поверхности тела происходит отрыв потока и за кормой тела образуются вихри (рис. 6.7),

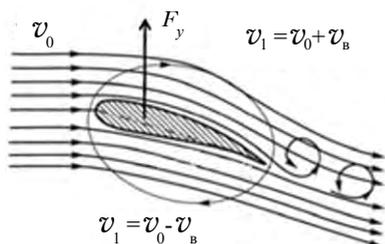


Рис. 6.7. Механизм возникновения подъемной силы

вращающиеся против часовой стрелки и создающие соответствующий суммарный момент импульса потока. Исходя из закона сохранения момента импульса, для компенсации этого момента вокруг тела возникает большой вихрь с противоположным направлением вращения (в рассматриваемой ситуации по часовой стрелке). Линейная скорость этого вихря  $v_v$  накладывается на скорость набегающего потока так, что над более выпуклой частью тела их скорости складываются, а под менее выпуклой – вычитаются. Таким образом, скорость потока над более выпуклой частью обтекаемого тела становится больше, чем под менее выпуклой.

В соответствии с уравнением Бернулли там, где скорость потока больше, там давление – меньше. Таким образом, давление над более выпуклой частью обтекаемого тела становится меньше, чем под менее выпуклой. Эта разность давлений обеспечивает возникновение подъемной силы, действующей на обтекаемое тело.

### 6.3. Пограничный слой

При движении вязкой жидкости вдоль твердой поверхности имеет место прилипание жидкости к этой поверхности, в силу чего скорость жидкости на ней становится равной нулю (относительно поверхности). По мере удаления от твердой поверхности влияние этого эффекта и вязкости уменьшается и скорость жидкости становится увеличивается. Если поток набегаёт на твердую поверхность с неко-

торой скоростью  $v_0$ , то по мере удаления от поверхности скорость жидкости стремится к этому значению.

Типичные профили скорости при обтекании пластины вязкой жидкостью в разных точках вдоль пластины показаны на рис. 6.8.

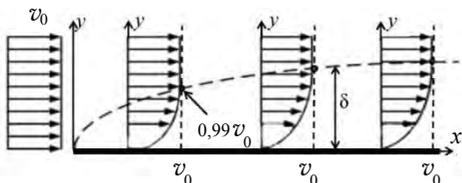


Рис. 6.8. Формирование пограничного слоя

Если на этих графиках отметить точки, где скорость набегающего потока по мере удаления от пластины достигает значения  $0,99 v_0$ , и соединить их некоторой линией (пунктирная линия на рис. 6.8), то область между пластиной и этой линией

представляет собой ту часть потока жидкости, в которой происходит практически полное изменение скорости потока от нуля до  $v_0$ , а вне этой области изменение скорости составляет менее одного процента. Эта область называется пограничным слоем вдоль обтекаемой поверхности.

Таким образом, **пограничный слой** это область вблизи твердой поверхности, обтекаемой вязкой жидкостью, в пределах которой происходит основное изменение скорости набегающего потока от 0 до  $0,99$  скорости набегающего потока.

Расстояние от поверхности тела до границы пограничного слоя называется **толщиной пограничного слоя** и часто обозначается буквой  $\delta$ .

Толщина пограничного слоя зависит от числа Рейнольдса потока, в качестве характерного размера, в который входит продольный размер тела  $l$ :  $Re = v_0 l / \nu$ , и обратно пропорциональна корню квадратному

из него:  $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$ .

### Отрыв пограничного слоя.

В силу кривизны обтекаемой поверхности давление на ней в обтекаемом ее потоке изменяется так, что его продольный градиент может быть как положительным, так и отрицательным (рис. 6.9). Так, например, в диффузорной части потока, поток замедляется, а

давление вдоль поверхности увеличивается, как в любом диффузоре при дозвуковых течениях. Возникающее противодавление набегающему потоку наиболее сильно сказывается вблизи поверхности, где

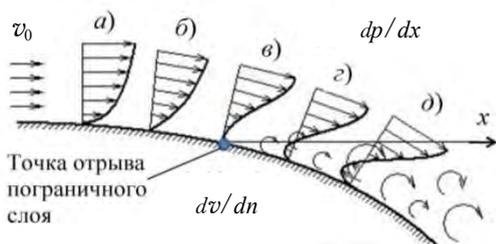


Рис.6.9. Отрыв пограничного слоя

скорости потока из-за вязкого трения невелики. Поток у поверхности тормозится и при определенном значении этого противодавления у поверхности появляются возвратные течения. Началом их появления является такое изменение профиля скорости, при котором производная скорости по нормали к поверхности обращается в ноль. Накладываясь на основной поток, эти возвратные течения образуют вихри, которые сносятся с поверхности основным потоком. В результате, происходит отрыв пограничного слоя от обтекаемой поверхности и образование вихревого следа за ней.

Точка на поверхности обтекаемого тела, после которой начинается образование вихревой зоны, называется **точкой отрыва пограничного слоя**.

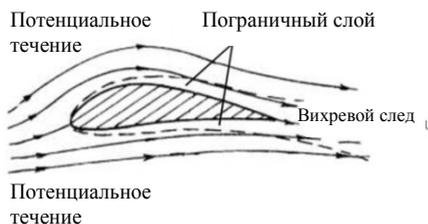


Рис.6.10. Структура потока при обтекании тела

Таким образом, при рассмотрении обтекания тел принимается следующая структура потока:

- 1) пограничный слой вблизи поверхности тела,
- 2) область потенциального (невязкого) течения вне пограничного слоя,
- 3) вихревой след за кормой тела (рис. 6.10).

## Обтекание шара при малых числах Рейнольдса. Формула Стокса.

При малых числах Рейнольдса  $Re \sim 10$  реализуется плавное безотрывное обтекание и основное сопротивление шара составляет сила сопротивления трения.

Если шар радиуса  $R$  движется со скоростью  $v_0$  в жидкости с коэффициентом вязкости  $\eta$ , то для силы лобового сопротивления в этом случае имеет место формула Стокса

$$F_x = 6\pi\eta R v_0 .$$

Сравнивая эту формулу с выражением для силы лобового сопротивления  $F_x = C_x S \frac{\rho v_0^2}{2}$ , при площади Миделева сечения шара  $S = \pi R^2$ , нетрудно получить, что коэффициент лобового сопротивления выражается формулой:  $C_x = \frac{24}{Re}$   $C_x = \frac{24}{Re}$ , где  $Re = \frac{v_0 d}{\nu}$ ,  $d = 2R$  – есть диаметр шара, а  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости жидкости,  $\nu = \eta/\rho$ . Это есть так называемый закон сопротивления шара при малых числах Рейнольдса.

## Обтекание шара при больших числах Рейнольдса.

В общем случае при увеличении числа Рейнольдса обтекание шара сопровождается формированием разнохарактерных вихревых зон за его кормой.

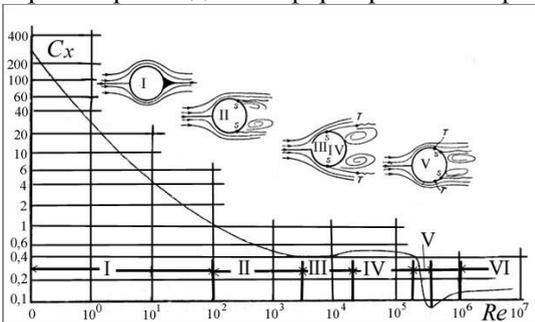


Рис. 6.11. Зависимость коэффициента лобового сопротивления шара  $C_x$  от числа Рейнольдса  $Re$

В первой зоне при  $0 < Re < 10^2$  обтекание происходит практически без отрыва пограничного слоя и характер зависимости близок к той, которая дается формулой  $C_x = 24/Re$  (рис. 6.11). При этом коэффициент сопротивления умень-

шается. В последующих зонах (II-VI) происходит отрыв пограничного слоя, что приводит к резкому изменению сопротивления. В зоне V наблюдается явление «кризиса сопротивления», когда коэффициент сопротивления падает до минимума.

шается в силу того, что сила сопротивления в этой области становится пропорциональной первой степени скорости, а не ее квадрату.

Во второй зоне  $10^2 < Re < 4 \cdot 10^3$  за кормой шара формируется след за шаром, в виде расширяющейся вихревой зоны, в конце которой точка отрыва пограничного слоя  $S$  занимает положение, составляющее угол  $87^\circ$  с направлением потока. Коэффициент сопротивления замедляет свое снижение, а закон сопротивления приближается к квадратичному.

В третьей  $4 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^4$  и четвертой  $2 \cdot 10^4 < Re < 2 \cdot 10^5$  зонах сохраняется установившееся положение точки отрыва пограничного слоя, в силу чего коэффициент сопротивления практически не изменяется. Небольшое его увеличение в четвертой зоне связано с начинающейся вдали от шара турбулизацией следа в точке  $T$ , которая с ростом числа Рейнольдса приближается к поверхности шара и сближается с точкой  $S$ .

В начале пятой зоны при  $Re = 2 \cdot 10^5$  точка турбулизации следа  $T$  переходит на поверхность шара, смыкаясь с точкой  $S$ . Отрывающийся поток полностью становится турбулентным, точка его отрыва резко смещается в кормовую часть шара и занимает положение, составляющее угол  $110^\circ$  с направлением потока. При этом резко уменьшаются размеры вихревой зоны, что в диапазоне чисел Рейнольдса  $2 \cdot 10^5 < Re < 4 \cdot 10^5$  приводит к резкому уменьшению коэффициента сопротивления и резкому снижению лобового сопротивления шара. Это явление называется **кризисом сопротивления**.

Таким образом, кризис сопротивления связан с переходом ламинарного потока в турбулентный. Поэтому его можно инициировать специальными методами искусственной турбулизации потока, что применяется на практике для снижения сопротивления летательных аппаратов, а также при движении жидкостей в каналах.

### **Эффект Магнуса.**

Эффект Магнуса заключается в возникновении подъемной силы при обтекании симметричного тела при его вращении. Например, при обтекании шара, вращающегося вокруг оси, перпендикулярной направлению скорости набегающего потока, как изображено на рис.6.12, прилегающие к его поверхности слои жидкости за счет прилипания увлекаются во вращение и приобретают линейные ско-

рости, которые в определенных местах складываются со скоростью

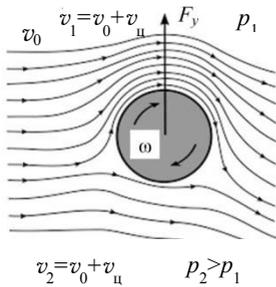


Рис. 6.12. Эффект Магнуса

набегающего потока, а в других местах – вычитаются. Таким образом, создаются разности скоростей на поверхности шара и соответствующие перепады давления в направлении, перпендикулярном скорости потока. В тех местах, где скорость потока больше, там давление меньше, и наоборот. Вызванная этим перепадом давления сила и является подъемной силой, действующей на вращающийся шар.



Рис. 6.13. Искривление траектории движения футбольного мяча

Поскольку подъемная сила действует в направлении, перпендикулярном скорости потока или скорости движения тела, постольку она вызывает искривление траектории движущегося тела, что с успехом используется в спортивных состязаниях с круглыми мячами (футбол, теннис и т.п.) (рис. 6.13).

Кроме того, вращающиеся цилиндры, обтекаемые ветром, теоретически могут являться заменой лопастям ветроэнергетических роторов, парусов судов и т.п.

### Качество крыла.

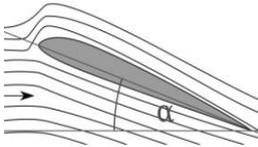


Рис. 6.14. Обтекание крыла

Подъемная сила крыла самолета зависит не только от вида его профиля, но и от угла, под которым оно ориентировано в потоке, который называется углом атаки.

Угол атаки  $\alpha$  – угол между хордой крыла и направлением набегающего потока (рис. 6.14).

Хорда крыла – отрезок прямой на профиле крыла, соединяющий

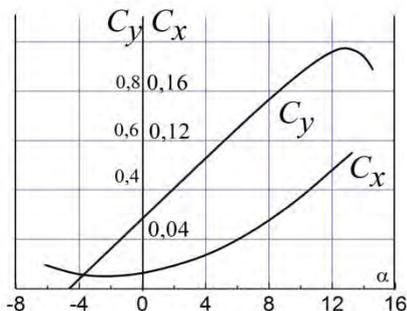


Рис. 6.15. Зависимость  $C_y$  и  $C_x$  от угла атаки  $\alpha$ .

переднюю и заднюю точки контура профиля, которые можно определить как крайние точки касания контура плоскостями, перпендикулярными скорости набегающего потока.

Как видно из рис. 6.15, коэффициент подъемной силы крыла  $C_y$  не равен нулю даже при нулевом угле атаки, увеличивается с его увеличением, но до определенного, примерно в 13 градусов, значения, после

чего начинает уменьшаться.

При больших углах атаки уменьшение подъемной силы может приводить, например, к сваливанию самолета в штопор, то есть к его неуправляемому движению по крутой нисходящей спирали с одновременным вращением вокруг всех трех его осей.

Положительная подъемная сила сохраняется и при некоторых отрицательных углах атаки, но до определенного предела (примерно минус 5 градусов на графиках рисунка 6.15), после чего становится отрицательной и самолет, переходит в режим пикирования, выход из которого не всегда является успешным.

Аэродинамическое качество летательного аппарата характеризуется отношением его коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления  $K=C_y/C_x$  и, чем это отношение больше, тем качество выше.

В более простом представлении, аэродинамическое качество можно оценивать как отношение расстояния, которое в состоянии пролететь летательный аппарат с некоторой высоты без двигателя, к этой высоте. Например, на планере качество обычно около 30, а на дельтаплане — 10. С высоты в 1 километр планер сможет пролететь в идеальных условиях приблизительно 30 км, а дельтаплан около 10 км. У Боинга 737  $K=15$ , Ту-134А~18,5.

## 7. КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ НЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Несмотря на то, что в настоящее время большинство закономерностей, касающихся течений жидкостей и газов, базируются на совокупности данных, полученных взаимодополняемыми теоретическими и экспериментальными методами, (так называемыми, полуэмпирическими методами), существуют некоторые течения, которые описываются достаточно простыми аналитическими выражениями, основанными на точных решениях общих дифференциальных уравнений механики жидкости газа. В силу уникальности такого рода течений многие из них носят имена впервые исследовавших их ученых.

Под понятием эксперимент понимается также численное моделирование этих процессов с помощью компьютерной техники, часто называемое численным экспериментом.

### 7.1. Течение Пуазейля в круглой трубе

Одним из самых распространенных течений реальных (вязких) несжимаемых жидкостей является их ламинарное течение в круглой трубе с твердой стенкой под действием продольного перепада давления.

Как известно, ламинарный режим течения в трубе имеет место при значениях числа Рейнольдса  $Re = v_{cp}d/\nu$  меньше критического значения 2300. Число Рейнольдса в данном случае определяется как произведение средней скорости течения  $v_{cp}$  на диаметр трубы  $d$ , деленное на кинематический коэффициент вязкости  $\nu$ .

Течение жидкости, при котором его характер не меняется вдоль трубы, будем называть стабилизированным. Такое течение носит название «течение Пуазейля» и подробно будет рассмотрено ниже.

Рассмотрим участок стабилизированного ламинарного течения несжимаемой жидкости в круглой трубе радиуса  $R$  и длиной  $l$ , на котором имеется перепад давления  $\Delta p$ , под действием которого происходит движение жидкости, как изображено на рис. 7.1.

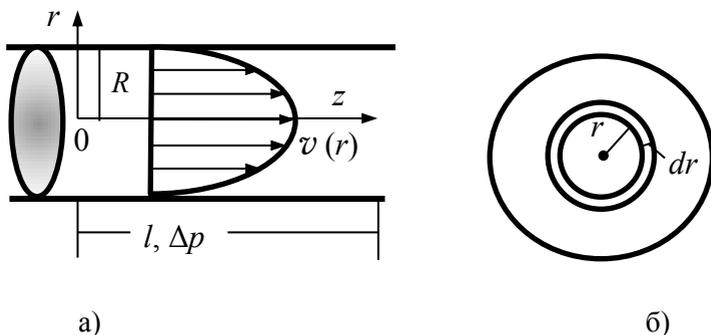


Рис. 7.1. Геометрия течения Пуазейля в круглой трубе, а) и ее поперечное сечение с элементарной кольцевой площадкой  $dr$ , б)

В этом случае движение жидкости будет осуществляться только вдоль трубы и скорость жидкости  $\vec{v}$  в цилиндрической системе координат будет иметь только одну ненулевую проекцию на ось координат  $z$ , направленную по оси трубы, и зависеть только от одной радиальной координаты  $r$ . В силу осесимметричности задачи скорость жидкости не будет зависеть от азимутальной координаты, а в силу стабилизированного характера течения она не будет зависеть от координаты  $z$ . В то же время давление в жидкости будет изменяться (уменьшаться) вдоль трубы и зависеть от  $z$ .

Таким образом, для данного течения:  $\vec{v} = [0, 0, v(r)]$  и  $p = p(z)$ .

Граничные условия для данной задачи будут заключаться в условии прилипания жидкости и равенстве нулю ее скорости на твердой стенке трубы: при  $r=R$ :  $v=0$ .

Точное решение уравнений механики вязкой жидкости, называемых уравнениями Навье-Стокса, для рассматриваемого течения дает следующие выражения для распределения скорости и давления в трубе:

$$\boxed{v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)}, \quad \boxed{\frac{dp}{dz} = \frac{\Delta p}{l} = \text{Const}}, \quad (7.1)$$

здесь  $\eta$  – динамический коэффициент вязкости жидкости.

Из формулы для скорости следует, что она увеличивается от нуля на стенке трубы до максимального значения на ее оси пропорционально квадрату радиальной координаты  $r$  и имеет в плоскости  $(r, z)$  форму параболы. Таким образом, профиль скорости пуазейлевского течения является параболическим, а максимальное значение скорости  $v_{\text{макс}}$  на оси трубы определяется следующим выражением:

$$v_{\text{макс}} = v(r=0) = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l}, \quad (7.2)$$

из которого видно, что оно прямо пропорционально квадрату радиуса трубы  $R$  и перепаду давления, приходящемуся на единицу длины трубы  $\Delta p/l$ , и обратно пропорционально динамическому коэффициенту вязкости  $\eta$ .

Как следует из выражения для давления в (7.1), оно линейно уменьшается вдоль трубы.

Зная распределение скорости в поперечном сечении трубы, можно вычислить существующий **объемный расход жидкости**  $Q_V$ .

Как известно, объемный расход жидкости через площадку перпендикулярную скорости потока, определяется произведением скорости жидкости на величину ее площади  $S$ , если скорость в пределах площадки имеет постоянную величину.

Принимая в виду зависимость скорости от радиальной координаты, в данном случае для вычисления расхода необходимо поступить следующим образом.

В поперечном сечении трубы на расстоянии  $r$  от оси трубы, вырежем кольцо радиуса  $r$  и малой ширины  $dr$ , в пределах которого скорость жидкости можно было бы считать постоянной и равной  $v(r)$ , как изображено на рисунке 7.2. Тогда элементарный расход жидкости  $dQ_V$  через это кольцо будет равен  $dQ_V = v(r)dS$ , где  $dS$  – площадь кольца, определяется следующим образом:  $dS = 2\pi r dr$ .

Полный расход жидкости будет равен сумме элементарных расходов через такие кольцевые площадки, радиусы которых изменяются от 0 до  $R$ :

$$Q_V = \int_0^R dQ_V = 2\pi \int_0^R v(r) r dr = 2\pi \frac{\Delta p}{4\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = 2\pi \frac{\Delta p}{4\eta l} \left[ R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

Окончательно,

$$\boxed{Q_V = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta l}} \quad (7.3)$$

Обращает на себя внимание то, что объемный расход жидкости пропорционален четвертой степени радиуса трубы.

Определим **среднюю скорость** течения жидкости  $v_{cp}$ , как отношение полного объемного расхода  $Q_V$  к площади сечения трубы  $S = \pi R^2$ .

Тогда:

$$\boxed{v_{cp} = \frac{\Delta p R^2}{8\eta l} = \frac{1}{2} v_{\max}}$$
 (7.4)

Средняя скорость пуазейлевского течения равна половине ее максимального значения.

Полученные формулы позволяют установить **закон сопротивления**, то есть зависимость гидравлического коэффициента трения от числа Рейнольдса в данном случае.

Из формулы (1.4) для средней скорости имеем

$$\Delta p = \frac{8\eta l v_{cp}}{R^2}$$

С другой стороны, для потерь давления в трубе имеется формула Дарси

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v_{cp}^2}{2}$$

Сравнивая последние две формулы, и, имея ввиду, что  $\eta/\rho = \nu$ , а  $2R=d$ , легко видеть, что для рассматриваемого течения  $\lambda = \frac{64\nu}{v_{cp}d}$ .

Вспоминая определение числа Рейнольдса, получаем закон сопротивления при ламинарном стабилизированном течении жидкости в круглой трубе в виде

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (7.5)$$

Полученные формулы (1.1)-(1.5) дают полную информацию о характеристиках течения Пуазейля в круглой трубе.

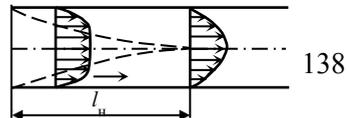
### Течение жидкости на начальном участке трубы.

Проведенное выше рассмотрение было выполнено в предположении о стабилизированном характере течения жидкости с пуазейлевским параболическим профилем скорости.

Однако, прежде чем такой профиль скорости установится, при входе в трубу он должен определенным образом сформироваться. Действительно, как правило, жидкость входит в трубу из какого-либо резервуара с некоторой постоянной по сечению скоростью. И только после входа в трубу начинает сказываться существование стенки трубы, на которой, как уже говорилось, вследствие прилипания жидкости ее скорость становится равной нулю.

Таким образом, при попадании в трубу, скорость жидкости на стенке становится равной нулю, а в центральной части сохраняет прежнее постоянное значение, как изображено рисунке 7.3а). По мере продвижения жидкости по трубе тормозящее влияние стенки распространяется вглубь жидкости, а область постоянного значения скорости сужается, до тех пор, пока не исчезнет вообще и профиль скорости не приобретет вид параболы.

Участок трубы от входа в нее, на котором происходит переход от прямолинейного профиля скорости к параболическому, называется начальным участком трубы, а его протяженность – длиной начального участка  $l_n$ , (см. рис.7.3б)).



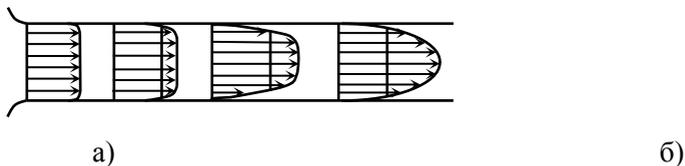


Рис. 7.3. Формирование профиля скорости на начальном участке трубы а) и длина начального участка б)

Длина начального участка зависит от числа Рейнольдса и по разным источникам может варьироваться в следующем диапазоне.

$$\boxed{\frac{l_H}{d} \approx (0,04 - 0,05) Re} \quad (7.6)$$

В силу изменяющегося профиля скорости на начальном участке трубы потери давления на нем  $\Delta p_n$  будут иметь свои особенности. В частности, для их вычисления по формуле Дарси

$$\Delta p_n = \lambda_n \frac{l_H}{d} \frac{\rho v_{cp}^2}{2}.$$

Для зависимости коэффициента гидравлического трения от числа Рейнольдса рекомендуется использовать следующее выражение

$$\boxed{\lambda_n = \frac{64}{Re} + 2,1 \frac{d}{l_H}} \quad (7.7)$$

которое с учетом (7.6) дает закон сопротивления в виде

$$\boxed{\lambda_n \approx \frac{110}{Re}} \quad (7.8)$$

## 7.2. Плоскопараллельное течение Куэтта

Течением Куэтта называется течение жидкости, вызванное относительным движением твердых границ канала, заполненного жидкостью.

Классическим примером течения Куэтта является течение в слое между двумя плоскопараллельными пластинами с расстоянием между ними  $h$ , одна из которых движется в своей плоскости со скоростью  $v_0$  относительно другой, как изображено на рисунке 7.4.

Направление движения определим координатой  $x$ .

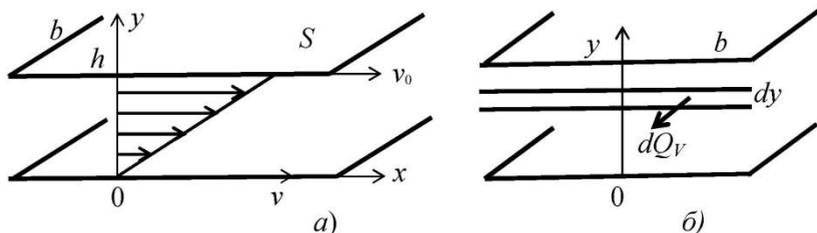


Рис. 7.4. Геометрия течения Куэтта а) и поперечное сечение канала с элементарной площадкой  $dS=b \cdot dy$ , б).

В силу прилипания скорость жидкости на пластинах будет равна скорости самих пластин и движение жидкости будет осуществляться в направлении движения пластин

Нижнюю пластину будем считать неподвижной и скорость жидкости на ней равной нулю, а на верхней пластине скорость жидкости будет равна  $v_0$ .

Таким образом, на границах слоя жидкости должны выполняться следующие граничные условия для скорости:

При  $y=0$ :  $v=0$ , при  $y=h$ :  $v=v_0$ .

Как показывает теория, между пластинами установится линейный профиль скорости, описываемый следующей формулой:

$$\boxed{v = \frac{v_0}{h} y} \quad (7.9)$$

Объемный расход жидкости определим так же, как и в предыдущей задаче, вырезав в поперечном сечении потока элементарную площадку толщиной  $dy$  на расстоянии  $y$  от начала координат. При ширине пластин  $b$ , площадь этой площадки будет равна  $dS=b \cdot dy$ , как показано на рисунке 7.4 б).

Объемный расход жидкости через эту площадку будет равен  $dQ_V=v(y)dS$ , а полный расход  $Q_V$  через все сечение канала определится следующим образом

$$Q_V = \int_0^h dQ_V = \int_0^h v(y)dS = b \frac{v_0}{h} \int_0^h y dy .$$

Или окончательно:

$$\boxed{Q_V = \frac{bhv_0}{2}} . \quad (7.10)$$

Средняя скорость определится как:  $v_{cp} = Q_V / S = Q_V / bh$  и будет равна половине скорости движения верхней пластины

$$\boxed{v_{cp} = \frac{v_0}{2}} . \quad (7.11)$$

Зная профиль скорости можно вычислить касательные напряжения вязкого трения  $\tau$  на верхней пластине:

$$\boxed{\tau = \eta \frac{dv}{dy} = \eta \frac{v_0}{h}} , \quad (7.12)$$

и силу, которую необходимо приложить к верхней пластине, имеющей площадь  $S_{пл}$ , чтобы обеспечить ее движение с заданной скоростью:

$$F = \tau S_{nl} = \frac{\eta v_0}{h} S_{nl}. \quad (7.13)$$

Отметим, что размещение жидкости между движущимися твердыми поверхностями является часто используемым в технических устройствах приемом для снижения трения между ними. В этом случае сухое трение между движущимися твердыми поверхностями заменяется на гораздо меньшее вязкое трение в жидкости. Используемая при этом жидкость называется смазкой, а зазор между твердыми поверхностями – смазочным слоем. Полученные выше формулы дают возможность вычислить основные характеристики смазочного слоя.

### 7.3. Пленочное течение жидкости по наклонной плоскости

Пленочным течением будем называть такое движение жидкости по твердой поверхности, при котором она имеет также значительную свободную поверхность, а толщина слоя жидкости между твердой подложкой и свободной поверхностью жидкости много меньше его остальных размеров.

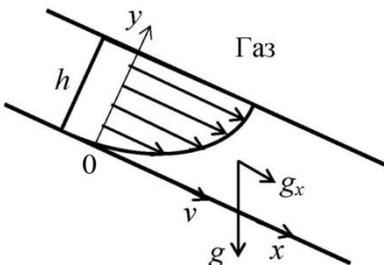
Такого рода течения часто реализуются в различных гидромеханических, тепло- и массообменных устройствах.

Часто движущей силой пленочных течений жидкости является сила тяжести.

Направление движения жидкости определим координатой  $x$ , а перпендикулярное плоскости пластины направление – координатой  $y$  (рис. 7.5).

В этом случае скорость  $v$  жидкости будет иметь только одну проекцию на ось  $x$  и зависеть только от координаты  $y$ :  $v = v(y)$ .

Главной отличительной чертой пленочных течений является то, что на свободной



поверхности жидкости, граничащей с газом, касательные напряжения вязкого трения  $\tau = \eta(dv/dy)$  можно положить равными нулю в силу незначительной вязкости газа.

Давление во всем объеме пленки будет постоянным и равным давлению окружающего ее газа.

В итоге, граничные условия для скорости в рассматриваемой задаче будут выглядеть следующим образом:

при  $y=0$ :  $v=0$ ;

$$\text{при } y=h: \left. \frac{dv}{dy} \right|_h = 0 \quad (7.14)$$

Теоретическое рассмотрение этой задачи дает следующее распределение скорости в таком пленочном течении, которое также является точным решением уравнений Навье-Стокса:

$$v = \frac{\rho g_x}{2\eta} y \left( h - \frac{y}{2} \right) \quad (7.15)$$

В плоскости  $x, y$  это уравнение описывает половину параболы с вершиной на свободной поверхности жидкости.

Максимальное значение скорости будет иметь место на поверхности пленки, равно:

$$v_{\text{макс}} = v(h) = \frac{\rho g_x h^2}{4\eta} \quad (7.16)$$

При ширине пленки  $b$ , так же как и в предыдущей задаче, объемный расход жидкости в ней будет равен:

$$Q_V = \int_0^h v(y) dS = b \int_0^h v(y) dy = b \frac{\rho g_x}{2\eta} \int_0^h \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) dy \quad \text{или}$$

$$Q_V = \frac{\rho g_x h^3 b}{6\eta} \quad (7.17)$$

Средняя скорость течения жидкости  $v_{cp} = Q/S = Q/bh$  будет равна:

$$v_{cp} = \frac{\rho g_x h^2}{6\eta} = \frac{2}{3} v_{\text{макс}} \quad (7.18)$$

Часто в качестве задаваемого параметра пленочного течения принимается не толщина пленки, а объемный расход жидкости в ней. Тогда толщина пленки определяется из полученной формулы для расхода следующим образом:

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\eta}{\rho g_x b} Q_V} \quad (7.19)$$

## 8. НЕНЬЮТОНОВСКИЕ ЖИДКОСТИ

### 8.1. Основные реологические законы неньютоновских жидкостей

Одним из основных свойств, отличающих жидкости и газы друг от друга, является их вязкость. Несмотря на то, что общим их свойством является текучесть, скорость их течения в одних и тех же условиях разная. Это обуславливается тем, что жидкости и газы способны оказывать определенное сопротивление тем силам, которые вызывают их течение, при котором разные слои жидкости движутся с разными скоростями. Это сопротивление определяется их внутренней молекулярной структурой жидкостей и газов, и является их индивидуальным свойством. Результатом этого сопротивления является то, в предоставленных самим себе движущихся жидкости или газе скорости движения их слоев стремятся выровняться, а объем жидкости или газа стремится остановиться или продолжать движение как целое. Это эквивалентно тому, что между параллельно движущимися с разными скоростями слоями жидкости и газа, действуют силы трения, тормозящие быстрые слои и ускоряющие медленные до тех пор пока их скорости не станут равными. Эти силы называются силами вязкого трения.

Количественной характеристикой вязких свойств жидкостей и газов являются коэффициенты вязкости, которые определяются соответствующими феноменологическими законами.

Наука, устанавливающая законы течения вязких жидкостей называется реология (от греческих слов рео-течь и логос-наука),

Основными характеристиками таких течений являются касательные напряжения вязкого трения  $\tau$ , возникающие между параллельными слоями жидкости или газа, движущимися с разными скоростями, и измеряемые в Паскалях (Па), а также градиент скорости в направлении, перпендикулярном слоям  $dv / dn$ . Последний часто обозначается буквой  $\dot{\gamma} = dv / dn$ , называется скоростью сдвига и измеряется в  $\text{с}^{-1}$ . Это название связано с тем, что, как известно, если параллельные слои любого тела движутся в продольном направле-

нии с разными скоростями, то тело испытывает деформацию сдвига, а градиент скорости определяет скорость этой деформации.

В общем случае касательные напряжения вязкого трения  $\tau$  и скорость сдвига  $\dot{\gamma}$  связаны между собой,  $\tau = f(\dot{\gamma})$ . Такого рода соотношения называются реологическими уравнениями или реологическими законами.

Наиболее распространенное реологическое уравнение устанавливается законом вязкого трения Ньютона, который гласит, что напряжения вязкого трения  $\tau$ , возникающие между плоскопараллельно движущимися слоями жидкости прямо пропорциональны разности скоростей слоев  $dv$ , приходящейся на единицу расстояния  $dn$  между ними по нормали к направлению движения,  $\tau \sim dv/dn$ .

Таким образом, закон вязкого трения Ньютона устанавливает прямо пропорциональную зависимость между напряжениями вязкого трения и скоростью сдвига в жидкости:  $\tau = \eta \dot{\gamma}$ , а коэффициент пропорциональности  $\eta$  называется динамическим коэффициентом вязкости и измеряется в Па·с.

Этому закону удовлетворяют все обычные жидкости, состоящие из простых молекул, а коэффициент вязкости является постоянной физической величиной, характеризующей их свойства. В связи с этим, такие жидкости называются ньютоновскими.

Однако, в природе существуют среды, обладающие текучестью, но не подчиняющиеся закону вязкого трения Ньютона. Как правило, такого рода жидкости состоят из сложных молекул, например, полимеры, или являются многокомпонентными, например, суспензии – смесь жидкости и твердых частиц, эмульсии – смесь жидкости с каплями другой, не растворимой в ней, жидкости.

### 8.1.1. Степенные неньютоновские жидкости

Наиболее распространенным обобщением линейного реологического закона Ньютона является нелинейная степенная зависимость вида

$$\tau = K |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma}, \quad (8.1)$$

носящая название модель Оствальда де Вале. А удовлетворяющие этому уравнению жидкости часто называют **степенными жидкостями**.

При  $n=1$  уравнение (8.1) описывает закон вязкого трения Ньютона, а коэффициент  $K$ , называемый коэффициентом консистенции, переходит в динамический коэффициент вязкости.

Степенные жидкости характеризуются, так называемой, кажущейся или эффективной вязкостью

$$\eta_{эф} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = K |\dot{\gamma}|^{n-1}, \quad (8.2)$$

которая оказывается зависящей от скорости сдвига.

При разных значениях  $n$  эта зависимость может быть как возрастающей, так и убывающей.

В соответствии с этим, реологически сложные жидкости с возрастающей с увеличением скорости сдвига эффективной вязкостью при  $n > 1$  носят название **дилатантные жидкости**, а с убывающей эффективной вязкостью при  $n < 1$  – **псевдопластичные жидкости**.

Наиболее наглядно реологические законы представляются на графиках в координатных осях  $(\tau, \dot{\gamma})$ , качественно изображенных на рис. 8.1.

Для ньютоновской жидкости коэффициент вязкости равен постоянному тангенсу угла наклона  $\phi$  реологической прямой к оси  $\dot{\gamma}$ . У жидкостей со степенным реологическим законом тангенс угла наклона реологических кривых является величиной непостоянной и может, как увеличиваться, так и уменьшаться.

Наиболее широко псевдопластичные жидкости представлены концентрированными растворами и расплавами полимеров с молекулами в виде длинных цепочек. Вообще псевдопластичными жидкостями являются суспензии любых асимметричных частиц, например суспензии волокнистых материалов. В состоянии покоя молекулярные цепочки беспорядочно спутаны, а частицы суспензии ориентированы хаотически.

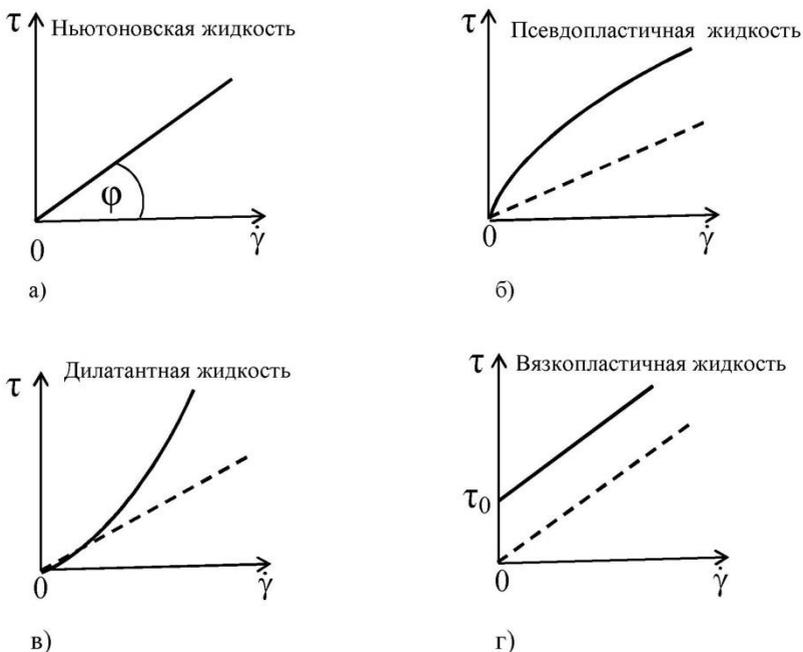


Рис. 8.1. Качественное изображение реологических кривых для различных жидкостей

Когда же полимерный раствор или суспензия приходят в движение, молекулы под действие гидродинамических сил начинают разматываться и, также как и частицы суспензии, выстраиваются параллельно направлению течения, как изображено на рисунке 8.2а, что приводит к снижению вязкости, причем эта тенденция усиливается с повышением скорости сдвига.

Свойство псевдопластичности проявляет себя также в таких сложных веществах, таких как лава вулканов, кетчуп, кровь, краски.

С рассматриваемой точки зрения, кровь представляет собой суспензию эритроцитов (красных кровяных телец), которые находятся во взвешенном состоянии в истинной жидкости – плазме крови.

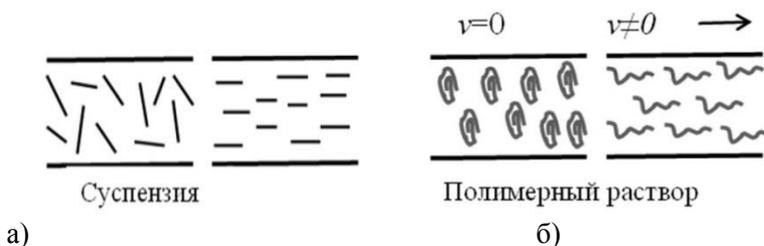


Рис.8.2 Течение полимеров а) и суспензий асимметричных частиц б)

Псевдопластичность кетчупа проявляется в том, что под давлением он достаточно легко вытекает из отверстия, но в то же время в покое его свободный объем, проявляя большую вязкость, способен долгое время сохранять свою форму, находясь на твердой поверхности. Это свойство придаётся ему специально путем добавления в него таких высокомолекулярных веществ как пищевые полисахариды.

Псевдопластичными жидкостями также являются грязевые потоки, имеющие  $0,1 < n < 0,4$ , и нефть, у которой  $n = 0,8$ .

Дилатантный эффект ( $n > 1$ ) наблюдается в суспензиях с большим содержанием твердой дисперсной фазы. Жидкость в таких суспензиях при низких скоростях сдвига слоёв относительно друг друга действует как смазка и способна легко перетекать. Однако при высоких скоростях жидкая фаза суспензий не успевает заполнять свободные пространства, образующиеся между движущимися частичками, и поэтому трение между частичками сильно возрастает, что приводит к увеличению вязкости. Такой эффект можно легко наблюдать, например, в крахмальном клейстере. Смесь извести с водой имеет  $n = 1,47$ , а у засахарившегося меда  $n = 2,5$ . Дилатантные свойства проявляет также увлажненный песок.

### 8.1.2. Течение Пуазейля степенных жидкостей в круглой трубе

Так же как и для рассмотренного в 7.1 течения Пуазейля ньютоновской жидкости, для такого течения степенной жидкости тоже имеется точное решение уравнений Навье-Стокса, дающее следующее распределение скорости жидкости по сечению трубы

$$v(r) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{dp}{dz} \frac{1}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \left( R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right). \quad (8.3)$$

При этом максимальное и среднее значения скорости определяются следующими выражениями

$$v_{\text{макс}} = v(r=0) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{dp}{dz} \frac{1}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}}, \quad (8.4)$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{n}{3n+1} \left( \frac{dp}{dz} \frac{1}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}} = \frac{n+1}{3n+1} v_{\text{макс}}.$$

Естественно, что при  $n = 1$  эти выражения совпадают с формулами (7.2), (7.4) для соответствующих величин ньютоновской жидкости.

На рис. 8.3 изображены профили скорости ньютоновской ( $n = 1$ ), псевдопластичной ( $n < 1$ ) и дилатантной ( $n > 1$ ) жидкостей, описываемые формулой 8.3.

При одних и тех же радиусе трубы  $R$  и градиенте давления  $dp/dx$  вдоль нее, одинаковых коэффициентах консистенции  $K$  псевдопластичные жидкости имеют более вытянутый профиль скорости и имеют больший расход, среднюю и максимальную скорости по сравнению с ньютоновской жидкостью. Тогда как в этом же сравнении профиль скорости дилатантной жидкости более широкий, а расход, средняя и максимальная скорости меньше.

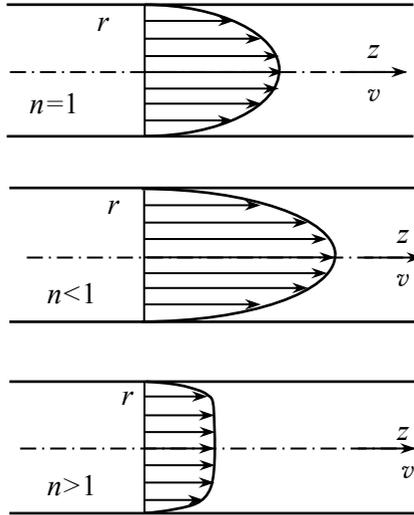


Рис. 8.3. Профили скорости степенных жидкостей в круглой трубе при разных значениях  $n$  и одинаковых значениях остальных параметров.

## 8.2. Вязкопластичные жидкости

Существуют суспензии, частицы которых в состоянии достаточно сильно взаимодействовать друг с другом, самопроизвольно образуя внутри жидкости пространственную жёсткую внутреннюю структуру, сопротивляющуюся любым внутренним напряжениям. Движение такой жидкости возможно только после разрушения этих структур, для чего требуется приложить конечные напряжения. После разрушения структур жидкость начинает течь как ньютоновская. Этот факт иллюстрируется рис.8.4.

Таким образом, течение такой жидкости начинается только после приложения конечного напряжения, которое называется **пределом текучести** и обычно обозначается как  $\tau_0$ . Такие жидкости называются **вязкопластичными** или **бингамовскими** – по имени исследовавшего их американского учёного Ю. Бингама. При снижении напряжения структура суспензии восстанавливается.

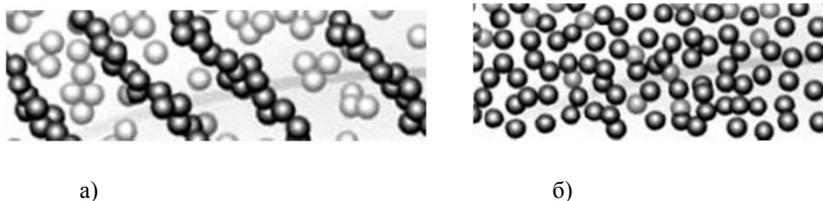


Рис. 8.4. Структуры а) и их разрушение в сдвиговом потоке б) вязкопластичной жидкости

Соответствующий реологический закон Бингама для таких жидкостей выглядит следующим образом

$$\tau = \tau_0 + \eta \dot{\gamma}, \quad (8.5)$$

а реологическая кривая представляет собой прямую, пересекающую ось  $\tau$  в точке  $\tau_0$  (кривые течения на рис. 8.1г)).

К вязкопластичным жидкостям относятся густые суспензии: масляные краски, некоторые смолы, лаки, буровые растворы. Так, у масляных красок при уменьшении толщины наносимого слоя происходит скачок вязкости из-за изменения скорости течения, благодаря чему краски легко наносятся на окрашиваемую поверхность, но становятся более вязкими на ней. При этом они способны образовывать неподвижные слои на вертикальных поверхностях, в то время как любые обычные жидкости стекают вниз.

### Эффект Вайссенберга.

Весьма необычным проявлением свойств неньютоновских высоковязких жидкостей (растворов каучука, целлюлозы, крахмала, муки и некоторых других пищевых продуктов) является эффект Вайссенберга, иллюстрируемый рис.8.5. Он заключается в том, что при частичном погружении вращающегося вала в сосуд с такой жидкостью вместо воронки в обычной жидкости (слева), последняя «собирается» к валу и начинает подниматься по нему (справа), причем тем интенсивнее, чем выше скорость вращения.

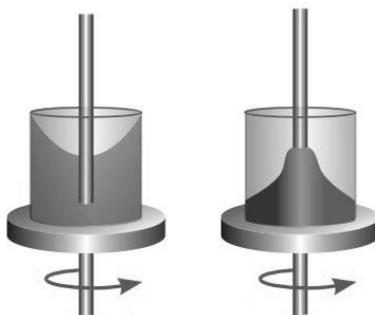


Рис.8.5. Поднятие неньютоновской жидкости по вращающемуся валу

### **Снижение гидравлического сопротивления.**

Не менее интересен, в том числе и с практической точки зрения, тот факт, что при течении обычной жидкости по трубопроводу или при внешнем обтекании тел гидравлическое сопротивление можно снизить, если в жидкость добавить небольшое количество растворимого полимера.

Опыт показывает, что можно достигнуть четырехкратного снижения гидравлического сопротивления воды в трубе, добавляя несколько миллионных долей (по весу) подходящего высокомолекулярного вещества. Этот эффект используется в некоторых нефтепроводах, пожарных шлангах и т.п.

Аналогичным образом достигается снижение лобового сопротивления тел, движущихся в жидкости, например плавательных аппаратов, при впрыске с их поверхности в окружающую жидкость полимерных растворов.

## **8.3. Электро- и магнитореологические суспензии**

Как было сказано выше, реологические свойства суспензий во многом определяются размерами и формой входящих в них твердых частиц, а также их способностью в результате межчастичного взаимодействия организовываться в различного рода упорядоченные

структуры типа цепочек и т.п. Возможность целенаправленного управления процессами структурообразования в суспензиях открывает перспективы управления их течениями и, соответственно, создания управляемых технических устройств, использующих эти течения. Особое значение при этом имеет создание такой возможности путем бесконтактного внешнего воздействия на них с помощью, например, магнитных или электрических полей.

В настоящее время жидкости, способные изменять свои реологические и другие свойства под действием электрических и магнитных полей, находят все большее применение в технических устройствах и получили название смарт-жидкостей или «умных жидкостей».

Наиболее очевидным решением этой задачи является создание суспензии, в состав которой введены твердые частицы, способные электрически поляризоваться в электрическом поле или намагничиваться в магнитном и за счет этого активно взаимодействовать друг с другом.

При отсутствии поля такие суспензии текут в канале как суспензии обычных частиц, с равномерным хаотическим их распределением по объему жидкости, как изображено ниже на рис. 8.6а).

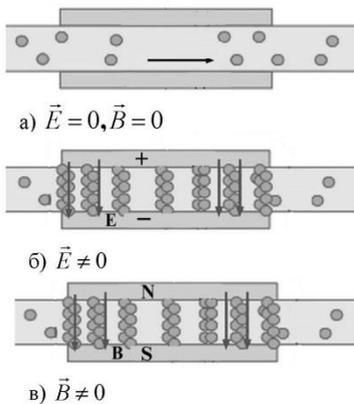


Рис. 8.6. Течение электро- и магнитореологических жидкостей

В поле эти частицы электрически или магнито поляризуются, их дипольные моменты ориентируются вдоль поля и благодаря дипольному взаимодействию частицы притягиваются друг к другу разноименными полюсами и выстраиваются в цепочки, расположенные

вдоль вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  при их электрической поляризации (рисунок 8.6б)), или вдоль направления индукции магнитного поля  $\vec{B}$  при их намагничивании (рисунок 8.6в)).

Образовавшиеся в суспензии структуры из твердых частиц создают значительное сопротивление их течению. При этом прочность таких структур (цепочек) и их концентрация, кроме всего прочего, зависят от величины приложенного поля. В результате реологические характеристики таких суспензий, в частности, кажущаяся или эффективная вязкость становятся зависимыми от величины приложенного к ним электрического,  $\eta_{\text{эф}} = \eta_{\text{эф}}(E)$  или магнитного,  $\eta_{\text{эф}} = \eta_{\text{эф}}(B)$  поля.

Соответственно, суспензии с электрически поляризуемыми частицами получили название электрореологические жидкости, а с намагничивающимися частицами – магнитореологические жидкости.

Поскольку для изменения реологических свойств важным является формирование в суспензии значительных достаточно жестких агрегатов (цепочек), постольку взаимодействие частиц должно быть достаточно сильным, чтобы они не разрушались под действием малых напряжений, а тем более под действие теплового движения молекул жидкости-носителя. Для этого частицы должны иметь достаточно большие дипольные моменты и, соответственно, достаточно большие размеры.

Таким образом, основными компонентами электро- и магнитореологических жидкостей являются жидкость-носитель, слабо подверженный действию электрического и магнитного поля, и твердая фаза в виде электрополяризующихся или намагничивающихся твердых частиц с размерами от одного до нескольких десятков микрон.

Такие относительно большие размеры частиц приводят к их осаждению в жидкости в поле силы тяжести. Для предотвращения этого в суспензию вводятся дополнительно специальные поверхностно-активные вещества.

В качестве основы (жидкости-носителя) для магнитореологических жидкостей чаще всего используются разного рода масла (нефтяные, минеральные, силиконовые и т.п.), а также вода и многие другие жидкости. Наиболее широко используемые для магнитореологических жидкостей намагничивающиеся частицы представляют собой выпускаемые промышленностью порошки карбонильно-

го железа, сплавов железа, окислов железа, например, магнетита и другие порошкообразные ферромагнитные материалы.

Для электрореологических жидкостей наиболее распространенной основой служат слабополярные органические жидкости с высоким электрическим сопротивлением, например, светлые масла (вазелиновое, трансформаторное, растительные масла, диэфиры, керосин, и др. В качестве дисперсной фазы широко применяется кремнезем и многие другие вещества с большим значением диэлектрической восприимчивости.

Необходимо отметить, что для проявления значительного электрореологического эффекта, приемлемого для использования в технических устройствах, необходимо приложение достаточно сильных электрических полей с напряженностью в несколько киловольт на миллиметр.

Благодаря возможности изменения под действием внешнего магнитного поля их эффективной вязкости магнито- и электрореологические жидкости нашли широкое применение в различных демпфирующих устройствах, в устройствах космической техники, биомеханики и биомедицины, которые благодаря этому приобретают свойства адаптивности, то есть возможности в процессе работы подстраиваться под изменяющиеся условия эксплуатации.

### **Магнитореологический демпфер.**

Рассмотрим принцип действия магнитореологического демпфера, нашедшего широкое использование в автомобильных подвесках известных мировых производителей автомобилей.

Предназначением любых демпфирующих устройств является гашение внешних силовых воздействий за счет преобразования их механической энергии в тепло, рассеиваемое в окружающую среду. В жидкостных демпфирующих устройствах такое преобразование осуществляется при организации их течения под действием этих воздействий и диссипации механической энергии течения в результате вязкого трения. Чаще всего это внешнее воздействие вызывает движение поршня в заполненном жидкостью или газом цилиндре, которое в свою очередь приводит к перетеканию жидкости из одной части цилиндра в другую через систему специально организованных каналов. Например, на изображенном на рис. 8.7 демпфере, возврат-

но-поступательное движение поршня вызывает течение жидкости через каналы в поршне. Естественно, диссипация энергии при этом во многом определяется вязкостью жидкостью.

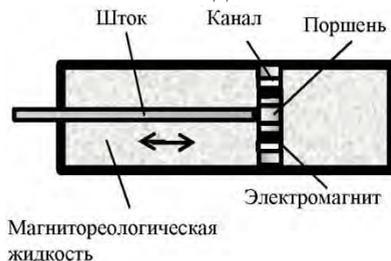


Рис. 8.7. Адаптивный демпфер с магнитореологической жидкостью

Главным достоинством магнитореологических жидкостей является то, что их вязкость можно изменять с помощью магнитного поля, регулируя таким образом демпфирующие характеристики устройства. Это придает демпферу, использующему магнитореологическую жидкость, свойство адаптивности и повышает эффективность его работы.

## 9. ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫЕ ЖИДКОСТИ

### 9.1. Основные положения магнитной гидродинамики

В природе и в технических устройствах достаточно широкое распространение имеют жидкости и газы, способные проводить электрический ток, то есть обладающие электропроводностью.

Известно, что на движение электропроводной среды может оказывать воздействие внешнее магнитное поле. Таким образом, с его помощью появляется возможность осуществлять управление этим движением.

Область механики жидкости и газа, изучающая движение электропроводных текучих сред в магнитных полях, носит название магнитная гидродинамика (МГД).

Как известно, наилучшей электропроводностью обладают металлы, имеющие электронную проводимость.

Классическим примером металла в жидком состоянии при комнатных температурах является ртуть. Остальные металлы переходят в жидкое состояние при гораздо более высоких температурах, но, тем не менее, с ними приходится иметь в таких значительных отраслях промышленности как металлургия и литейное производство.

Кроме того объектами магнитной гидродинамики являются электролиты, обладающие ионной проводимостью, а также плазма различной степени ионизации.

Важную роль МГД процессы играют в космических масштабах, во многом определяя поведения космической плазмы, заполняющей межзвёздное пространство и находящейся в магнитном поле космических тел.

Два основных явления обуславливают особенности движения электропроводных сред в магнитном поле:

- 1) сила Ампера и
- 2) явление электромагнитной индукции.

Первое связано с тем, что на элемент проводника  $d\vec{l}$ , по которому течет электрический ток силой  $I$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  действует сила  $d\vec{F}_A$ , называемая силой Ампера. Величина этой силы определяется следующим выражением:

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l} \times \vec{B}], \quad (9.1)$$

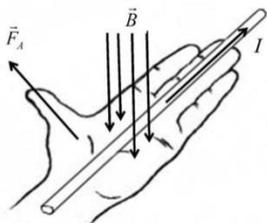


Рис. 9.1. Определение направления силы Ампера

а направление устанавливается по правилу левой руки.

Согласно этому правилу, если расположить левую руку так, чтобы силовые линии магнитного поля входили в ладонь, а пальцы были вытянуты вдоль направления проводника с током, то отогнутый большой палец покажет направление действия силы Ампера, как показано на рисунке 9.1.

С использованием силы Ампера работают электродвигатели и многие другие электротехнические устройства.

Сила Ампера является массовой силой, действующей на каждый элемент объема электропроводной среды.

Для дальнейшего рассмотрения будем использовать понятие вектора плотности тока  $\vec{j}$ , который является локальной характеристикой распределения электрического тока в среде. Этим вектором сила тока  $dI$ , протекающего в данной точке через элементарную площадку  $dS$  с единичным вектором нормали к ней  $\vec{n}$  определяется как  $dI = (\vec{j}\vec{n})dS$ .

По модулю вектор плотности тока определяет силу тока  $dI$ , протекающего в данной точке через единичную площадку, расположенную перпендикулярно его направлению:  $j=dI/dS$ , и имеет размерность  $A/m^2$ .

Определим действие силы Ампера в в электропроводной жидкости, находящей в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  при протекании в ней тока с плотностью  $\vec{j}$ ,

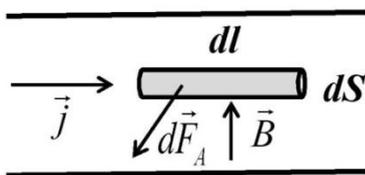


Рис. 9.2. Определение напряжения силы Ампера

как изображено на рис. 9.2. Выделим в жидкости элементарный цилиндрический объем длиной  $dl$  и площадью сечения  $dS$ , расположенный вдоль направления тока. Протекающий через этот объем ток будет равен по величине  $j dS$ , а действующая на него

сила Ампера определится выражением (9.1) и будет равна  $d\vec{F}_A = dSdl [\vec{j} \times \vec{B}]$ . Имея в виду, что масса  $dm$  рассматриваемого объема жидкости равна:  $dm = \rho dV = \rho dSdl$ , **напряжение силы Ампера**  $\vec{f}_A = d\vec{F}_A / dm$ , определяющее в данной точке действие этой силы на единицу массы среды, будет иметь следующее выражение:

$$\vec{f}_A = \frac{1}{\rho} [\vec{j} \times \vec{B}]. \quad (9.1)$$

Таким образом, наряду с известными массовыми силами – силой тяжести и силой инерции в электропроводной жидкости в магнитном поле возникает новая массовая сила – сила Ампера.

**Явление электромагнитной индукции** заключается в том, что при движении проводника в магнитном поле в нем возникает ЭДС или электрическое поле, которые в случае замыкания цепи вызывают течение тока в проводнике. С использованием этого явления работают генераторы электрической энергии.

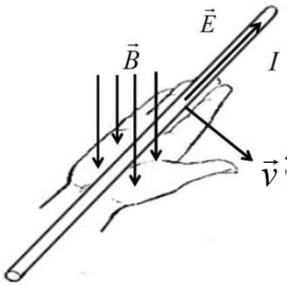


Рис. 9.3. Определение направления ЭДС индукции в электропроводной жидкости

При этом направление ЭДС индукции или напряженности электрического поля определяется по правилу правой руки, как представлено на рис.9.3.

Согласно этому правилу, если расположить правую руку так, чтобы силовые линии магнитного поля входили в ладонь, а отогнутый большой палец показывал направление движения проводника, то вытянутые остальные пальцы покажут направление ЭДС и течения тока.

## 9.2. Практическое использование течений электропроводных жидкостей и газов

**МГД-генератор** предназначен для выработки электрической энергии, то есть является электрогенератором.

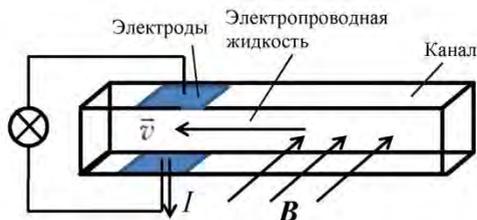


Рис. 9.4. Принципиальная схема МГД-генератора

Принцип действия МГД-генератора основан на возникновении электродвижущей силы в электропроводных жидкости или газе (плазме) за счет явления электромагнитной индукции при их движении во внешнем магнитном поле.

Если, например, электропроводная жидкость движется вдоль некоторого канала, как изображено на рисунке 9.4, а перпендикулярно скорости ее движения приложено магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , то в другом перпендикулярном скорости направлении, согласно правилу левой руки, в жидкости возникнет разность электрических потенциалов, или ЭДС. Если на стенках канала, перпендикулярных этому направлению разместить электроды, то при замыкании их внешней электрической цепью в этой цепи потечет электрический ток  $I$ , величина которого кроме всего прочего будет пропорциональна площади этих электродов, контактирующих с движущейся жидкостью.

Плотность тока  $\vec{j}$ , индуцируемого в электропроводной жидкости, движущейся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  определяется выражением:  $\vec{j} = \sigma[\vec{v} \times \vec{B}]$ , где  $\sigma$  – электропроводность жидкости. Таким образом, чем больше электропроводность жидкости, скорость ее течения и индукция магнитного поля, тем больший ток данный генератор может вырабатывать.

Привлекательной особенностью МГД генерации электрической энергии является то, что движущаяся в магнитном поле рабочая среда является текучей (жидкостью или газом) в отличие от громоздких твердотельных обмоток роторов обычных генераторов.

Однако, большие проблемы заключаются в подборе рабочей текучей среды, обладающей высокой электропроводностью в прием-

лемом диапазоне температур и в создании магнитного поля с высоким значением индукции в большом объеме для обеспечения мощности генератора в промышленных масштабах.

В качестве рабочего тела в опытных образцах МГД-генераторов использовалась низкотемпературная плазма (около 3000 градусов Цельсия), образующаяся при сгорании органического топлива. Для получения плазмы с высокой электрической проводимостью в продукты сгорания вводят вещества с возможно более низким потенциалом ионизации, так называемые ионизирующую присадки, которыми, в частности, служат соли калия или цезия.

Для создания магнитного поля первоначально использовались сверхпроводящие электромагниты с системой охлаждения жидким гелием с температурой кипения 4,2 К. После создания высокотемпературных сверхпроводников стало возможным в системах охлаждения магнитов использовать более дешевый жидкий азот с температурой кипения 77К.

Первый работающий МГД-генератор был построен в США в 1959 году. Источником плазмы с температурой 3000 К в нем служил плазмотрон, работавший на аргоне с присадкой щелочного металла. Мощность первого генератора составляла 11,5 кВт и в последующих генераторах была доведена до 32 МВт.

В СССР первая лабораторная установка «У-02», работавшая на природном топливе, была создана в 1965 году. В 1971 году была запущена опытно-промышленная энергетическая установка «У-25», имевшая расчётную мощность 20-25 МВт и работавшая на продуктах сгорания природного газа с добавкой  $K_2CO_3$  в качестве ионизирующей присадки.

**МГД-насос** предназначен для приведения в движение электропроводной жидкости за счет силы Ампера при наложении на нее магнитного поля и пропускания через нее электрического тока.

Особое значение это имеет при транспортировке расплавов металлов с высокой температурой в металлургическом и литейном производстве, когда применение обычных насосов становится невозможным.

Принцип действия МГД-насоса представлен на рис.9.5 и заключается в следующем. Если электропроводная жидкость находится в канале, то при пропускании через нее тока и наложении магнитного

поля в направлениях, перпендикулярных оси канала, на жидкость начнет действовать сила Ампера вдоль канала, вызывая соответствующее течение жидкости вдоль него.

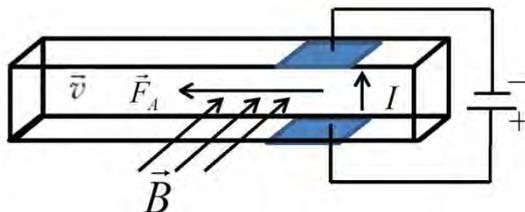


Рис. 9.5. Принципиальная схема МГД-насоса

### МГД-перемешивание.

Токи индукции возникают в электропроводной жидкости не только при ее движении в магнитном поле, но и тогда, когда магнитное поле изменяется во времени, например, является вращающимся. Взаимодействие этих токов с внешним магнитным полем также приводит жидкость в движение, в частности, вызывает в объеме жидкости замкнутые вихреобразные течения.

Это явление широко используется в металлургическом производстве для перемешивания расплавов металлов с примесями при производстве, например, легированных сталей, с целью более равномерного их распределения, что иллюстрируется рис. 9.6.

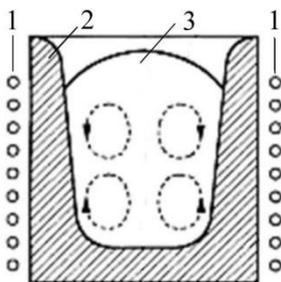


Рис. 9.6. Индукционное МГД перемешивание

1 – обмотки электромагнита, создающего вращающееся магнитное поле,  
2 – тигель, 3 – расплав металла

### МГД-расходомер.

Расходомер – это устройство, предназначенное для измерения расхода жидкости.

Имея в виду тот факт, что многие жидкости, включая водопроводную воду, обладают электропроводностью, как правило, ионной за счет наличия в них ионов растворенных солей, возникает привлекательная идея создания на принципах магнитной гидродинамики устройств для измерения их расхода без использования механических частей.

Принцип действия МГД-расходомера, так же как МГД-генератора, основан на возникновении ЭДС индукции при движении электропроводной жидкости в магнитном поле. Эта ЭДС пропорциональна скорости движения жидкости. Поэтому, наложив на поток жидкости, например, в трубе в определенном месте с помощью

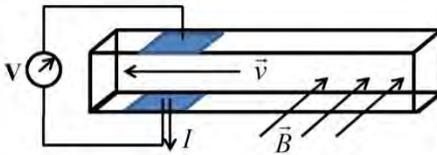


Рис. 9.7. Принципиальная схема МГД-расходомера

внешнего источника магнитное поле и измеряя с помощью вольтметра возникающую в этом месте ЭДС индукции, можно получить информацию о скорости течения жидкости и ее расходе (рис. 9.7).

### МГД-динамо.

Эффект МГД-динамо заключается в том, что при определенных условиях движущаяся проводящая среда может самопроизвольно генерировать и поддерживать магнитное поле.

В настоящее время теория МГД-динамо является одной из самых распространенных, объясняющих природу магнитного поля небесных тел, включая Землю и наше Солнце, и предполагает, что конвективные или турбулентные движения проводящей жидкости в жидком электропроводном ядре этих тел обеспечивают самовозбуждение и поддержание поля в стационарном состоянии как показано на рис. 9.8.

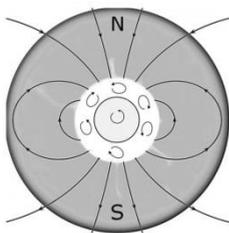


Рис. 9.8. Эффект МГД-динамо

Магнитное поле Земли играет, в частности, очень важную роль в обеспечении существования жизни на ней, защищая ее от губительного воздействия космических частиц. К таким частицам относятся, например, ионизированные (заряженные) частицы солнечного ветра. Магнитное поле, изменяя траекторию их движения, отклоняет частицы и исключает их попадание на поверхность Земли.

### 9.3. Особенности статики электропроводных жидкостей

Статика электропроводных жидкостей в магнитном поле отличается тем, что действующая в них объемная сила Ампера может вызывать перераспределение давления в жидкости.

При действии силы тяжести с напряжением  $\vec{f}_g = \vec{g}$  и силы Ампера напряжение результирующей массовой силы  $\vec{f}$  будет равно сумме их напряжений:  $\vec{f} = \vec{f}_g + \vec{f}_A = \vec{g} + (1/\rho)[\vec{j} \times \vec{B}]$ . В этом случае основное дифференциальное уравнение статики жидкостей  $\text{grad}p = \rho\vec{f}$  будет иметь вид:

$$\boxed{\text{grad}p = \rho\vec{g} + [\vec{j} \times \vec{B}]} \quad (9.2)$$

Таким образом, сила Ампера может приводить к гораздо более сложным распределениям давления в жидкости, чем только сила тяжести.

### 9.3.1. Распределение давления в электропроводной жидкости в однородном магнитном поле

Рассмотрим распределение давления в несжимаемой жидкости в том случае, когда сила тяжести и сила Ампера лежат на одной прямой.

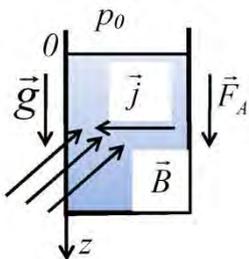


Рис. 9.9. Силы, действующие в электропроводной жидкости в гравитационном и магнитном полях

Это может быть реализовано, когда вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  и плотности тока  $\vec{j}$  перпендикулярны ускорению силы тяжести  $\vec{g}$ , как изображено на рис. 9.9. В этой ситуации и сила тяжести, и сила Ампера имеют только положительные проекции на ось  $z$  и их сумма равна  $\rho g + jB$ .

По аналогии с решением основного дифференциального уравнения в тяжелой несжимаемой жидкости, в данном случае его решение дает следующее распределение давления:

$$p = p_0 + (\rho g + jB)z \quad (9.3)$$

Это выражение можно также записать в виде:

$$p = p_0 + \rho_{\text{эф}} g z,$$

введя понятие эффективной плотности жидкости  $\rho_{\text{эф}} = \rho + \frac{jB}{g}$ .

Формально это выражение совпадает с тем, которое имеет место в случае только силы тяжести, но вместо плотности жидкости  $\rho$  содержит некоторую эффективную плотность  $\rho_{\text{эф}}$ , отличающуюся от  $\rho$ .

В рассматриваемом случае эффективная плотность больше плотности жидкости.

Если изменить направление тока или индукции магнитного поля, направление силы Ампера может измениться на противоположное и тогда  $\rho_{эф}$  будет равна:

$$\rho_{эф} = \rho - \frac{jB}{g},$$

и иметь значение, меньшее, чем плотность жидкости.

Если вспомнить, что соотношение между плотностью жидкости  $\rho$  и плотностью погруженного в нее тела  $\rho_T$  определяет условия плавания тел, приходим к выводу, что в данном случае такие тела будут всплывать, если их плотность меньше ее эффективного значения для

жидкости  $\rho_T < \rho_{эф} = \rho + \frac{jB}{g}$ , но может быть больше плотности жидкости.

В то же время эти тела будут тонуть, если их плотность больше ее эффективного значения для жидкости,  $\rho_T > \rho_{эф} = \rho - \frac{jB}{g}$ , но может быть меньше плотности жидкости.

Таким образом, в рассматриваемой ситуации появляется возможность регулирования процесса всплывания и погружения тел в жидкости в широком диапазоне их плотностей, что с успехом используется при разделении по фракциям смеси материалов с разной плотностью в технологии МГД-сепарации.

### 9.3.2. Пинч-эффект

Еще один интересный эффект статики, называемый пинч-эффектом, имеет место в электропроводной жидкости при протекании по ней электрического тока. Он заключается в том, что под дей-

ствием магнитного поля, создаваемого этим током, возможно всестороннее самосжатие объема жидкости.

Пусть объем электропроводной жидкости имеет форму цилиндра и по его оси течет ток с плотностью  $j_z$ , как изображено на рис. 9.10.

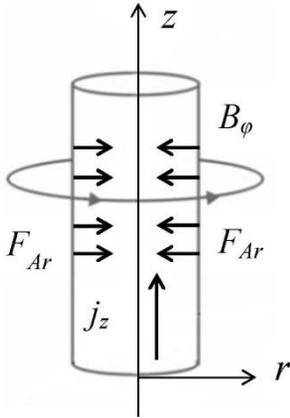


Рис. 9.10. Пинч-эффект

При площади основания цилиндра величина протекающего по нему тока  $I$  будет равна  $I=j_z S$ .

Этот ток создаст вокруг цилиндра и внутри него азимутальное магнитное поле. Снаружи оно будет описываться формулой

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

где  $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная проницаемость вакуума.

Внутри цилиндра магнитное поле будет описываться выражением

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r = \frac{\mu_0 j}{2} r \text{ и}$$

линейно возрастать от оси цилиндра к периферии.

Это магнитное будет воздействовать на протекающий внутри цилиндра ток с силой Ампера, направленной к оси цилиндра. Проекция напряжения этой силы на ось  $r$  будет равна

$$f_{Ar} = -\frac{1}{\rho} j_z B_{\varphi} = -\frac{\mu_0 j^2}{2\rho} r. \text{ Знак минус здесь указывает на то,}$$

что эта сила направлена противоположно направлению координатной оси  $r$ , то есть к оси цилиндра.

Основное дифференциальное уравнение гидростатики определит в этой ситуации распределение давления в жидкости следующим образом:

$$\frac{dp}{dr} = \rho f_{Ar} = -\frac{\mu_0 j^2}{2} r \text{ или } p = p_0 + \frac{\mu_0 j^2}{4} (R^2 - r^2),$$

где  $p_0$  – давление на поверхности цилиндра, а  $R$  – его радиус.

Из этого выражения видно, что давление в жидкости увеличивается к оси цилиндра, под действием всесторонне сжимающей его силы Ампера.

Пинч-эффект примечателен тем, что представляет собой почти единственный перспективный способ реализации управляемой реакции термоядерного синтеза, как практически неисчерпаемого источника энергии. Как известно, такие реакции имеют место на нашем Солнце, благодаря чему Земля обеспечивается необходимой энергией для существования на ней жизни.

Эти реакции идут при очень высоких температурах, больше чем  $10^7$ – $10^8$  К, при которых участвующее в них вещество находится в состоянии плазмы.

Проблема осуществления такой реакции в управляемом режиме в земных условиях заключается в том, чтобы обеспечить устойчивое ее протекание в ограниченном объеме плазмы, создать который с помощью стенок из какого-либо материала при таких температурах очевидно невозможно.

С точки зрения механики, плазма может рассматриваться как электропроводный газ, к которому применимы законы магнитной гидродинамики.

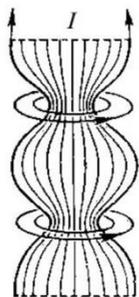


Рис. 9.11. Пинч-эффект в плазме

Поэтому рассмотренный выше пинч-эффект с успехом может решить поставленную проблему и обеспечить удержание плазмы в ограниченном объеме без твердых стенок за счет ее сжатия в собственном магнитном поле при пропускании через нее электрического тока, что иллюстрируется рис. 9.11.

## 9.4. Особенности течений электропроводных жидкостей в магнитном поле (течение Гартмана)

При течении электропроводной жидкости в каналах возникающие в ней токи взаимодействуют с приложенным магнитным полем так, что действующая на эти токи сила Ампера препятствует течению жидкости.

Классическим примером такой ситуации является, названное по имени первого описавшего его ученого, течение Гартмана.

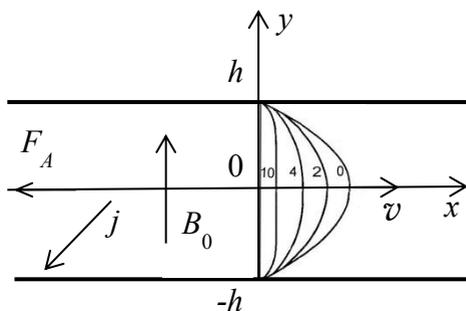


Рис. 9.12. Течение Гартмана

Это течение представляет собой движение электропроводной жидкости в плоскопараллельном канале шириной  $2h$  под действием продольного перепада давления в присутствии поперечного магнитного поля  $\vec{B}_0$ , как это имеет место, например, в канале МГД-генератора и как изображено на рис. 9.12.

Одним из основных параметров, характеризующих течение электропроводной жидкости в магнитном поле, наряду с числом Рейнольдса является число Гартмана, определяемое следующим образом:

$$Ha = B_0 h \sqrt{\frac{\sigma_R}{\eta}},$$

где  $B_0$  – индукция магнитного поля,  $h$  – характерный размер,  $\sigma_R$  – удельная электропроводность (удельная проводимость),  $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ , а  $\eta$  – динамический коэффициент вязкости среды.

Число Гартмана характеризует отношение магнитных сил к вязким.

Теоретическое рассмотрение этой задачи дает следующее распределение скорости в этом течении:

$$v = v_{\text{макс}} \frac{\text{ch}Ha - \text{ch}Ha(y/h)}{\text{ch}Ha - 1}, \quad \frac{dp}{dx} = \text{Const} \quad (9.4)$$

При малых числа Гартмана это выражение переходит в формулу, описывающую плоскопараллельное течение Пуазейля:

$$v = v_{\text{макс}} \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right),$$

профиль скорости которого представлен на рис.9.12 и отмечен цифрой 0, соответствующей нулевому значению числа Гартмана.

Остальные профили скорости на этом рисунке соответствуют значениям числа Гартмана, которыми они отмечены (2, 4, 10), и одинаковому перепаду давления вдоль канала. Как видно из этого рисунка, с увеличением числа Гартмана, то есть с увеличением индукции магнитного поля, при одном и том же перепаде давления скорость течения уменьшается из-за увеличивающегося магнитогидродинамического противодействия (силы Ампера), а профиль скорости становится все более плоским в центральной части канала.

Понятно, что в магнитном поле, расход жидкости через канал при одинаковом перепаде давления будет меньше, чем при течении Пуазейля. В силу того, что в магнитном поле у стенок канала градиент скорости возрастает, сопротивления течению жидкости из-за вязкого трения увеличивается.

Таким образом, в целом магнитное поле оказывает тормозящее действие на поток электропроводной жидкости.

## 10. МАГНИТНЫЕ ЖИДКОСТИ

### 10.1. Основные механизмы взаимодействия магнитных жидкостей с магнитным полем

Еще одним примером текучей среды, способной к взаимодействию с магнитным полем, являются, так называемые, магнитные жидкости. Это взаимодействие обеспечивается другим механизмом по сравнению с электропроводными жидкостями, а именно, за счет того, что эти жидкости обладают магнитными свойствами и способны намагничиваться в магнитном поле, как это имеет место, например, с твердыми ферромагнитными и другими магнитными материалами.

В естественном состоянии текучие среды, обладающие сколь угодно заметной намагниченностью, не существуют. Поэтому магнитные жидкости являются искусственно приготовляемыми системами. А именно, они представляют собой суспензию наноразмерных, порядка 10 нм, частиц твердого ферромагнетика в жидкостеносителе, в качестве которой может выступать практически любая обычная жидкость.

В отличие от рассмотренных ранее магнитореологических суспензий основной целью создания магнитных жидкостей является обеспечение их равномерной по объему намагниченностью  $M$ , вызывающей в первую очередь силовое взаимодействие с внешним магнитным полем, и проявляющееся, например, в притяжении объема жидкости к постоянному магниту, в изменении распределения давления внутри жидкости. Поэтому принципиальным моментом, в отличие от магнитореологических суспензий, является как можно более полное исключение их структурирования и образования в них цепочечных агрегатов, а также, соответственно, по-возможности, сохранение у них ньютоновских вязкостных характеристик.

Для предотвращения слипания частиц, с целью повышения устойчивости системы, они покрываются молекулярным слоем поверхностно-активного вещества, которое нейтрализует их взаимодействие между собой.

Особенностью подобных нанодисперсных систем является то, что при таких размерах твердые частицы находятся в интенсивном хао-

тическом броуновском движении вследствие активных соударений с молекулами жидкости, то есть практически ведут себя как молекулы жидкости, обмениваясь с ними импульсом движения.

Фактически магнитную жидкость можно рассматривать как жидкость, состоящую из двух типов молекул, один из которых обладает магнитными свойствами, а другой нет. Этот тип молекул способен взаимодействовать с внешним магнитным полем, получать от него импульс и передавать его остальным молекулам жидкости. Таким образом, вся жидкость в среднем оказывается способной реагировать на внешнее магнитное поле, в частности, притягиваться к постоянным магнитам.

Одной из основных характеристик магнитных материалов является их намагниченность  $\vec{M}$ , равная магнитному моменту единицы объема вещества и измеряемая в А/м. Зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  называется законом намагничивания. В простейшем случае этот закон имеет линейный вид  $\vec{M} = \chi \vec{H}$ , а  $\chi$  называется магнитной восприимчивостью вещества и является величиной безразмерной. Соответственно, индукция магнитного поля  $\vec{B}$  в намагничивающейся среде определяется суммой напряженности магнитного поля и намагниченности среды  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu \vec{H}$ , где  $\mu_0$  – определенная ранее магнитная проницаемость вакуума, а  $\mu = 1 + \chi$  – безразмерная относительная магнитная проницаемость вещества.

Благодаря собственному магнитному моменту намагничивающиеся вещества способны взаимодействовать с внешним магнитным полем, в частности, притягиваться к постоянным магнитам, то есть перемещаться в направлении от меньшей к большей напряженности магнитного поля, то есть в направлении градиента напряженности модуля поля  $\text{grad}H$ . При этом сила  $d\vec{F}_m$ , с которой магнитное поле притягивает объем намагниченной среды  $dV$  будет равна  $d\vec{F}_m = (\mu_0 M \text{grad}H) dV$ .

Таким образом, в магнитной жидкости будет действовать массовая сила  $d\vec{F}_m$ , напряжение которой  $\vec{f}_m = \frac{d\vec{F}_m}{dm} = \frac{d\vec{F}_m}{\rho dV}$ , равно

$$\boxed{\vec{f}_m = \frac{1}{\rho} \mu_0 M \text{grad} H} . \quad (4.1)$$

## 10.2. Особенности статики магнитных жидкостей

Статика магнитных жидкостей в магнитном поле также как и статика электропроводных жидкостей отличается тем, что действующая в них объемная магнитная сила может вызывать перераспределение давления.

Основное дифференциальное уравнение статики жидкостей  $\text{grad} p = \rho \vec{f}$  при действии силы тяжести и магнитной силы будет иметь вид:

$$\boxed{\text{grad} p = \rho \vec{g} + \mu_0 M \text{grad} H} . \quad (10.2)$$

Таким образом, магнитная сила тоже может приводить к более сложным распределениям давления в жидкости, чем только сила тяжести.

Как и раньше рассмотрим распределение давления в жидкости в том случае, когда сила тяжести и магнитная сила лежат на одной прямой, а  $|\text{grad} H| = G = \text{const}$  и  $M = \text{const}$ , как изображено на рис.10.1.

Решение основного дифференциального уравнения в данном случае дает следующее распределение давления:

$$\boxed{p = p_0 + (\rho g + \mu_0 MG) z} . \quad (10.3)$$

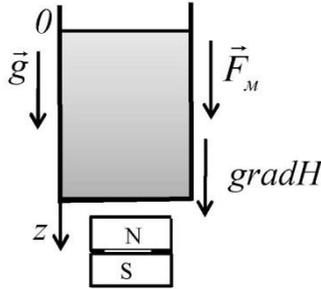


Рис. 10.1. Силы, действующие в магнитной жидкости в гравитационном и магнитном полях

Это выражение опять можно записать в виде:

$$p = p_0 + \rho_{\text{эф}} g z,$$

введя понятие эффективной плотности жидкости

$$\rho_{\text{эф}} = \rho + \frac{\mu_0 M G}{g},$$

которая в данном случае будет больше, чем плотность жидкости.

Если изменить направление градиента напряженности магнитного поля на противоположное, то направление магнитной силы тоже изменится на противоположное и тогда  $\rho_{\text{эф}}$  будет равна:

$$\rho_{\text{эф}} = \rho - \frac{\mu_0 M G}{g},$$

и иметь значение, меньшее, чем плотность жидкости.

Таким образом, в магнитной жидкости будут всплывать тела, если их плотность  $\rho_T$  меньше ее эффективного значения

$$\rho_T < \rho_{\text{эф}} = \rho + \frac{\mu_0 M G}{g},$$

но может быть больше плотности жидкости.

В то же время тела будут тонуть, если их плотность больше ее эффективного значения для жидкости

$$\rho_T > \rho_{эф} = \rho - \frac{\mu_0 MG}{g},$$

но может быть меньше плотности жидкости.

В результате и в магнитной жидкости появляется возможность регулирования процесса всплывания и погружения тел в жидкости в широком диапазоне их плотностей, что также может быть использовано для разделения по фракциям смеси материалов с разной плотностью в технологии магнитожидкостной сепарации.

### **10.3. Перспективные направления применения магнитных жидкостей**

#### **Магнитожидкостные уплотнения.**

Наиболее разработанными и широко распространенными являются магнитожидкостные уплотнения вращающихся валов – герметизаторы, использующие в качестве уплотняющего элемента магнитную жидкость. В данных технических устройствах используется способность магнитной жидкости втягиваться в область наиболее сильного магнитного поля, сохраняя при этом текучесть. Идея устройств состоит в том, что магнитная жидкость, заполняющая кольцевой зазор между вращающимся валом и корпусом, удерживается в этом положении магнитным полем.

Основными преимуществами таких уплотнителей по сравнению с твердотельными являются высокая уплотняющая способность и низкий момент трения, а в сравнении с гидродинамическими – простота конструкции и независимость работоспособности от состояния движения вала, значительным ресурсом эксплуатации. Кроме того, магнитожидкостные уплотнения обладают важным преимуществом перед распространенными контактными и бесконтактными уплотнениями, поскольку способны работать в широком диапазоне скоростей вращения вала, при этом отсутствует износ поверхности вала.

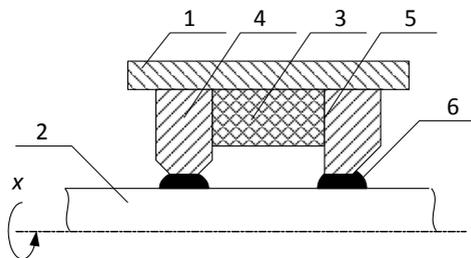


Рис. 10.2. Принципиальная схема магнитожидкостного уплотнения  
1- корпус, 2- герметизируемый вал, 3- кольцевой магнит, 4,5- полюса, 6- магнитная жидкость в уплотняемом рабочем зазоре

## ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

### ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

#### Лабораторная работа №1. Вязкость жидкостей

**Цель работы** – измерение коэффициентов вязкости жидкости и определение их температурной зависимости.

#### Общие сведения

Вязкость или внутреннее трение является одним из самых существенных факторов, определяющих характер движения жидкостей и потери энергии в них при их движении.

Основными следствиями действия сил вязкого трения являются перераспределение скоростей движущихся слоев жидкости и диссипация механической энергии.

Наличие внутреннего трения приводит к переходу части кинетической энергии потока в тепловую, то есть к потере или диссипации механической энергии. В результате происходят потери давления (напора) на прямолинейных участках трубопроводов, а также на различных местных сопротивлениях.

В результате действия сил вязкого трения имеет место очень важное явление, во многом определяющее распределение скоростей частиц жидкости в потоке. Заключается оно в том, что слои жидкости, прилегающие к твердым поверхностям, тормозятся. Жидкость “прилипает” к твердым стенкам. Поэтому на неподвижных твердых стенках скорость жидкости равна нулю, а на движущихся - равна скорости движения стенки. По мере удаления от неподвижной стенки скорость движения жидкости возрастает и, например, в круглой трубе достигает наибольшего значения на оси трубы.

В некоторых ситуациях может оказаться, что силы вязкости малы по сравнению с другими, не играют существенной роли и ими можно пренебречь. Тогда жидкости и газы, в которых пренебрегается силами вязкого трения, называются *идеальными*. В противном случае они называются *реальными* или *вязкими*.

**Физическая природа сил вязкого трения** связана с процессами переноса импульса молекулами жидкости или газа. Импульс (количество движения) молекулы с массой  $m$ , движущейся со скоростью  $\vec{V}$ , есть  $m\vec{V}$ . Наиболее ясно этот процесс можно представить в газе, молекулы которого находятся в хаотическом поступательном движении и, вследствие этого, могут переходить из одних слоев движущегося газа в другие, перенося с собой имеющийся у них импульс. Рассмотрим в потоке газа два слоя 1 и 2, движущиеся с разными скоростями  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$ , причем  $V_1 > V_2$  (рис.1.1).

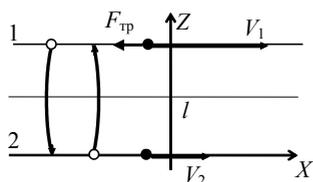


Рис. 1.1.

Если расстояние между слоями меньше длины свободного пробега молекул, то они переходят из слоя в слой без соударений, сохраняя имевшийся у них импульс. Средний импульс молекул в слое 1 равен  $m\vec{V}_1$  и больше, чем у молекул во втором слое  $m\vec{V}_2$ . В результате того, что слой 1

покидают более быстрые молекулы, а на их место приходят более медленные из слоя 2, средний импульс молекул первого слоя уменьшается. Другими словами, обмен молекулами, обусловленный хаотическим тепловым движением, приводит к выравниванию скоростей течения различных слоев газа. Таков механизм переноса импульса от одного слоя движущегося газа к другому. В действительности перенос импульса в жидкостях и газах происходит более сложным образом через многократные столкновения молекул.

В соответствии со вторым законом Ньютона изменение импульса тела в единицу времени равно действующей на него силе. Таким образом, можно сказать, что на слой 1 действует сила  $F_{тр}$ , тормозящая его движение. Эта сила и есть сила вязкого трения. В рассматриваемой ситуации средний импульс молекул слоев и его изменение имеют только  $X$ -проекцию, поэтому сила вязкого трения, действующая на слой 1, тоже направлена по оси  $OX$ . Эта сила направлена противоположно скорости движения, так как тормозит его. Сила вязкого трения касательна к плоскости движущихся слоев и стремится замедлить более быстродвижущиеся слои и ускорить медленные.

Таким образом, для возникновения сил вязкого трения необходимо, чтобы в жидкости или газе имелись слои, движущиеся с разными скоростями, то есть необходим градиент скорости в направлении, перпендикулярном скорости движения слоев. Естественно предположить, что рассматриваемая сила вязкого трения будет тем больше, чем больше площадь  $S$  соприкасающихся слоев, чем больше разность скоростей слоев  $\Delta V = V_1 - V_2$ , и будет тем меньше, чем больше расстояние между слоями (при этом их взаимное влияние ослабевает), то есть  $F_{\text{тр}} \sim S\Delta V/l$ . Отношение  $\Delta V/l$  и есть градиент скорости в рассматриваемой ситуации. Часто эту величину называют *скоростью сдвига*.

Отнесенная к единице площади сила вязкого трения  $F_{\text{тр}}/S$  называется *касательным напряжением* вязкого трения  $\tau$ .

В соответствии со всем вышесказанным, Ньютон предложил закон вязкого трения, который можно сформулировать следующим образом:

*“Касательные напряжения вязкого трения между прямолинейно движущимися слоями жидкости или газа пропорциональны производным скорости по направлению, перпендикулярному движению”*.

Коэффициент пропорциональности обозначается буквой  $\eta$  (или  $\mu$ ) и называется *динамическим коэффициентом вязкости*.

Таким образом, закон вязкого трения Ньютона математически записывается в следующем виде:

$$\tau = \eta \frac{dV}{dn} ,$$

$n$  – обозначение нормали, которое показывает, что производная от скорости берется по нормали к ее направлению.

*Физический смысл* динамического коэффициента вязкости заключается в том, что он численно равен касательному напряжению, возникающему между слоями жидкости, движущимися друг относительно друга со скоростью, равной единице, при расстоянии между этими слоями, равном единице длины.

Размерность динамического коэффициента вязкости  $\eta$  в системе СИ есть Па·с:

$$1 \text{ Па}\cdot\text{с} = 1 \text{ кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$$

В системе СГС динамический коэффициент вязкости измеряется в Пуазах (по имени французского ученого Пуазейля)

$$1 \text{ Пуаз} = 1 \text{ г}/(\text{см}\cdot\text{с}) = 0,1 \text{ кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$$

Обычно пользуются в сто раз меньшей единицей - *сантипуазом*, которой соответствует динамическая вязкость воды при 20,5 °С.

Наряду с динамическим коэффициентом вязкости широко применяется *кинематический коэффициент вязкости*  $\nu$ , представляющий собой отношение первого к плотности  $\rho$  жидкости или газа

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

В системе СИ размерность *кинематического коэффициента вязкости*  $\nu$  есть м<sup>2</sup>/с.

В системе СГС кинематический коэффициент вязкости измеряется в Стоксах (1 Ст = 1 см<sup>2</sup>/с = 10<sup>-4</sup> м<sup>2</sup>/с) или в *сантистоксах* (1сСт = 10<sup>-2</sup> Ст).

Ниже в таблицах приведены значения коэффициентов вязкости трансформаторного масла, воды и воздуха при различных температурах.

Из данных таблиц следует, что с ростом температуры коэффициенты вязкости жидкостей уменьшаются, а газов увеличиваются.

Таблица 1.1 Зависимость плотности и коэффициентов вязкости масла трансформаторного от температуры

$t, ^\circ\text{C}$	0	10	20	30	40	50	60
$\rho, \text{кг}/\text{м}^3$	892,5	886,4	880,3	874,2	868,2	862,1	856,0
$\eta \cdot 10^4, \text{Па}\cdot\text{с}$	629,8	335,5	198,2	128,5	89,4	65,3	49,5
$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	70,5	37,9	22,5	14,7	10,3	7,58	5,78

Таблица 1.2. Зависимость коэффициентов вязкости воды и воздуха от температуры

$t, ^\circ\text{C}$	Вода			Воздух		
	$\rho, \text{кг/м}^3$	$\eta \cdot 10^6, \text{Па}\cdot\text{с}$	$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$\eta \cdot 10^6, \text{Па}\cdot\text{с}$	$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$
0	1000	1788	1,789	1,293	17,2	13,28
10	999,7	1306	1,306	1,247	17,6	14,16
20	998,2	1004	1,006	1,205	18,1	15,06
30	995,7	801,5	0,805	1,165	18,6	16,00
40	992,2	653,3	0,659	1,128	19,1	16,96
50	988,1	549,4	0,556	1,093	19,6	17,95
60	983,2	469,9	0,478	1,060	20,1	18,97

Температурная зависимость коэффициента вязкости воды описывается формулой Пуазейля

$$\eta_t = \eta_0 \left( 1 + 0,0337t + 0,000221t^2 \right)^{-1},$$

где  $\eta_t$  и  $\eta_0$  - динамический коэффициент вязкости при температурах  $t(^{\circ}\text{C})$  и  $0^{\circ}\text{C}$  соответственно.

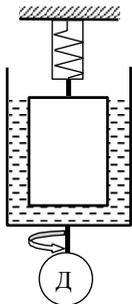


Рис. 1.2.

**Методы измерения коэффициентов вязкости.** Приборы для измерения коэффициентов вязкости называются *вискозиметрами*.

**Ротационные вискозиметры** представляют собой два коаксиальных цилиндра, пространство между которыми заполнено исследуемой жидкостью (рис. 1.2). Если один из цилиндров равномерно вращается, а второй неподвижен, то со стороны увлекаемой в движение жидкости на неподвижный цилиндр будет действовать момент вязких сил, который будет тем больше, чем больше вязкость жидкости. Измеряя момент

силы, действующей на неподвижный цилиндр при заданной скорости вращения движущегося цилиндра, можно определить коэффициент вязкости жидкости.

Для измерения коэффициентов вязкости используется также **метод падающего шарика**, основанный на измерении скорости шарика в вязкой среде. Чем больше вязкость жидкости, тем меньше скорость падения шарика.

**Метод затухания колебаний.** Чем больше вязкость жидкостей или газов, тем быстрее происходит в них затухание различных колебательных движений, например, крутильных колебаний диска, сферы или цилиндра, подвешенных на тонкой нити. В этом методе измеряется декремент затухания колебаний и, зная его, определяются коэффициенты вязкости.

**Капиллярные вискозиметры.** Принцип действия капиллярных вискозиметров основан на измерении времени истечения определенного объема жидкости через круглый капилляр заданного сечения. При этом вязкость жидкостей прямо пропорциональна времени истечения.

## Экспериментальная установка

### *А) Капиллярный вискозиметр*

В работе измеряется кинематический коэффициент вязкости трансформаторного масла с помощью стеклянного капиллярного вискозиметра типа ВЖП-1, изображенного на рис.1.3.

Вискозиметр капиллярный стеклянный типа ВПЖ-1 с висячим уровнем состоит из измерительного резервуара (3), ограниченного двумя кольцевыми отметками  $M_1$  и  $M_2$ , резервуар переходит в капилляр (2) и резервуар (1), который соединен с изогнутой трубкой (5) и трубкой (7). Последняя имеет резервуар (8) с двумя отметками  $M_3$  и  $M_4$ , указывающими пределы наполнения вискозиметра жидкостью. Жидкость из резервуара (3) по капилляру (2) стекает в резервуар (1) по стенкам последнего, образуя у нижнего конца капилляра "висячий уровень". Измерение вязкости при помощи капиллярного вискозиметра основано на определении времени истечения через капилляр определенного объема жидкости из измерительного резервуара.

## Порядок выполнения работы

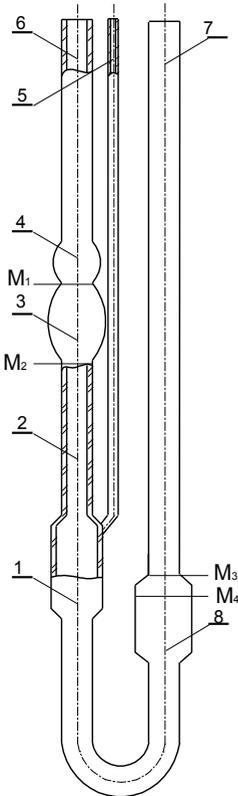


Рис. 1.3.

1. Термостатом устанавливается требуемый температурный режим работы.

2. Вискозиметр устанавливается вертикально в жидкостный термостат так, чтобы уровень воды находился на несколько сантиметров выше расширения резервуара (4).

3. При температуре измерения выдерживают прибор не менее 5 минут, после чего засасывают грушей при закрытой трубке (6) жидкость выше отметки  $M_1$  примерно до половины резервуара (4) и перекрывают кран, соединенный с трубкой (5).

4. Открыть кран на трубке (5) и освободить зажим на трубке (6).

5. Измерить время понижения уровня в трубке (5) от отметки  $M_1$  до отметки  $M_2$ . Необходимо при этом обращать внимание на то, чтобы к моменту подхода уровня жидкости к отметке  $M_1$  в резервуаре (1) образовался висячий уровень, а в капилляре не было пузырьков воздуха.

5. Измерения произвести 5 раз. Результаты измерений занести в табл. 1.3.

7. Увеличить температуру жидкости. Выполнить измерения в соответствии с пп. 3-6.

## Обработка экспериментальных данных

1. При каждой температуре вычислить среднее (из нескольких измерений) время истечения жидкости  $\bar{t} = \sum_{i=1}^N (t_i / N)$ , где  $t_i$  – результат  $i$ -го измерения,  $N$  – число измерений.

2. По формулам  $\nu = K\bar{t}$  и  $\eta = \rho\nu$  вычислить кинематический и динамический коэффициенты вязкости.  $K$  – постоянная вискозиметра,  $K = 0,03246 \text{ мм}^2/\text{с}^2$ .

3. Определить относительную среднюю статистическую погрешность измерений

$$(\Delta\nu/\nu) \cdot 100\% = (\Delta t/\bar{t}) \cdot 100\%,$$

где средняя абсолютная ошибка измерений  $\Delta t$  вычисляется по формуле

$$\Delta t = \sum_{i=1}^N |\Delta t_i| / N,$$

$\Delta t_i = t_i - \bar{t}$  – абсолютная погрешность отдельного измерения.

Данные измерений и вычислений занести в табл. 1.3.

Таблица 1.3

$t, \text{ } ^\circ\text{C}$	№ изм	Время истечения в секундах					Результаты вычислений				
		1	2	3	4	5	$\bar{t}, \text{ с}$	$\Delta t, \text{ с}$	$\nu \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$	$\eta \cdot 10^4, \text{ Па}\cdot\text{с}$	$\Delta\nu/\nu \text{ \%}$
	1										
	...										
	5										

### **Б) Ротационный вискозиметр**

Ротационный вискозиметр ВСН-3 состоит из корпуса 1, измерительной системы, привода и стакана 3 для исследуемой жидкости 4 (рис. 1.4).

Стакан 3 с жидкостью 4 установлен на телескопическом столике 2. Внутри стакана измерительный цилиндр 5 и подвижный полый цилиндр 6 образуют кольцевой зазор, который заполнен исследуемой жидкостью. Цилиндр 6 с помощью привода приводится во вра-

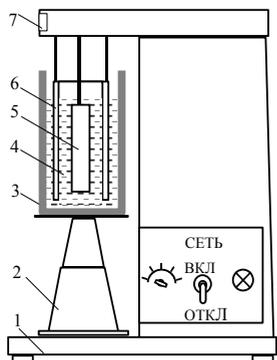


Рис. 1.4.

щение. Измерительный цилиндр 5 соединен с измерительной системой, угол его поворота регистрируется по шкале 7.

Стакан 3 выполнен пустотелым. Через него прокачивается термостатирующая жидкость для задания необходимой температуры.

В данной части работы производится измерение коэффициента вязкости трансформаторного масла при различных скоростях сдвига.

### Порядок выполнения работы

1. Термостатом установить требуемый температурный режим работы. Измерения проводятся при нескольких температурах.
2. Установить переключателем «об/мин» скорость вращения 200 об/мин.
3. Включить тумблер «сеть» прибора.
4. По шкале 7 измерить угол поворота  $\varphi$  измерительного цилиндра. Результат измерений записать в табл. 1.4.
5. Динамический коэффициент вязкости рассчитать по формуле

$$\eta = \frac{0,3 \cdot \varphi}{n} \text{ (Па}\cdot\text{с)}$$

8. Сравнить полученные результаты с табличными данными.
9. Проанализировать полученные результаты.

Таблица 1.4.

№ п/п	Температура, °С	Скорость вращения $n$ , об/мин.	Угол поворота $\varphi$ , град.	$\eta \cdot 10^4$ , Па·с
1				
2				
3				
4				

## Лабораторная работа № 2. Поверхностное натяжение жидкостей

**Цель работы** - изучение действия капиллярных сил и измерение коэффициента поверхностного натяжения жидкостей.

### Общие сведения

Силы поверхностного натяжения или капиллярные силы, возникающие на границах раздела жидкостей с другими средами, играют значительную роль в природе и технике. Ими обуславливается транспорт жидкостей в теле растений, почве и других капиллярно-пористых телах. Они определяют процессы тепло- и массопереноса в таких телах при их сушке и обезвоживании. Капиллярные силы играют определяющую роль при формировании капель жидкостей в разнообразных распылительных системах тепло- и массообменных устройств, в частности, в системах подачи топлива в камеры сгорания. Использование этих сил дало возможность создания новых теплообменных устройств - капиллярно-пористых тепловых труб с очень высокими коэффициентами теплопередачи.

*Физическая природа сил поверхностного натяжения* связана с особым характером межмолекулярного взаимодействия на границах раздела жидкостей с газами, другими жидкостями или твердыми телами. Для того, чтобы представить это яснее, рассмотрим слой жидкости с границей раздела, отделяющей жидкость от ее собственного пара (см. рис.2.1). Граница раздела между жидкостью и ее паром называется *свободной поверхностью*.

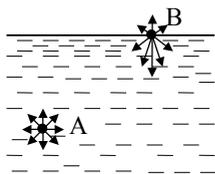


Рис. 2.1.

Любая молекула А, находящаяся в глубине жидкости, окружена со всех сторон такими же молекулами. Поэтому результирующая сила, действующая на нее со стороны этих молекул, будет равна нулю. Совсем по другому обстоит дело с молекулой В, находящейся на свободной поверхности, которая, с одной стороны, окружена молекулами жидкости, а с другой - молекулами пара. Концентрация молекул жидкости значительно больше, чем пара. На молекулу В будет действовать результирующая сила, направленная вглубь жидкости, поскольку притягивающее действие молекул жид-

кости сильнее, чем молекул пара. Из этого следует, что для того, чтобы перевести молекулу из глубины объема жидкости на поверхность, требуется совершить некоторую работу против этой силы, то есть сообщить молекуле дополнительную энергию. Таким образом, молекулы на поверхности жидкости обладают избыточной энергией по сравнению с внутренними молекулами. Другими словами, свободная поверхность жидкости обладает некоторой энергией. При изменении площади свободной поверхности на  $dS$  ее энергия увеличивается на величину  $dU_S$ , поскольку увеличивается число поверхностных молекул. Так как число таких молекул пропорционально площади поверхности, то можно заключить, что *изменение поверхностной энергии пропорционально изменению площади свободной поверхности*

$$dU_S = \sigma dS.$$

Коэффициент пропорциональности  $\sigma$  называется *коэффициентом поверхностного натяжения* и имеет размерность  $\text{Дж/м}^2 = \text{Н/м}$ .

Следовательно, для увеличения площади свободной поверхности жидкости необходимо совершить работу  $dA = -dU_S = -\sigma dS$ .

*Физический смысл коэффициента поверхностного натяжения* заключается в том, что он численно равен работе, которую нужно совершить для увеличения свободной поверхности жидкости на единицу при постоянной температуре.

Коэффициент поверхностного натяжения *убывает* с ростом температуры. Численные значения  $\sigma$  для воды приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1 Поверхностное натяжение воды

$t, ^\circ\text{C}$	0	30	60	90
$\sigma, \text{Н/м}$	0,0756	0,0712	0,0662	0,0608

Наличие у жидкости поверхностной энергии приводит к тому, что энергетически наиболее выгодной является искривлённая форма её поверхности.

Действительно, известно, что всякая система в равновесии находится в том из возможных для неё состояний, при котором её энергия минимальна. Поскольку поверхностная энергия пропорциональ-

на площади поверхности, это означает, что в равновесии площадь свободной поверхности жидкости должна быть минимальной. Известно также, что тело заданного объёма имеет наименьшую поверхность в том случае, когда оно принимает форму шара. Вот почему свободные капли жидкости в невесомости имеют сферическую форму.

Из сказанного выше можно заключить, что вдоль поверхности жидкости (по касательной к ней) действуют силы, стремящиеся сократить эту поверхность (здесь видна аналогия с касательными силами упругости, возникающими в резиновой оболочке воздушного шара, которые уменьшают его поверхность при понижении давления в нём). Эти касательные к поверхности жидкости силы называются силами

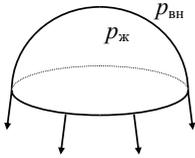


Рис. 2.2.

поверхностного натяжения (рис. 2.2).

Тем не менее, надо помнить, что первопричиной возникновения сил поверхностного натяжения являются силы, испытываемые молекулами поверхностного слоя, направленные внутрь жидкости, в некоторых случаях внутрь той среды, с которой она граничит, то есть перпендикулярно к поверхности.

В результате воздействия сил поверхностного натяжения, например, капля жидкости находится постоянно в сжатом состоянии, т.е. давление внутри нее больше наружного  $p_{ж} > p_{вн}$ . Под выпуклой поверхностью давление в жидкости больше, а под вогнутой меньше, чем снаружи.

Под искривленной поверхностью жидкости имеет место капиллярный скачок давления  $\Delta p_K = p_{ж} - p_{вн}$ . Чем больше кривизна поверхности, тем больше силы поверхностного натяжения, тем больше капиллярный скачок давления.

Кривизна поверхности в каждой точке характеризуется её главными радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$  (наибольшим и наименьшим радиусами кривизны из бесконечного множества их, имеющегося в общем случае в данной точке, в зависимости от выбора плоскости сечения поверхности). Главные радиусы кривизны лежат во взаимно перпендикулярных сечениях. Кривизна поверхности определяется величиной, обратной радиусам кривизны  $(1/R_1 + 1/R_2)$ .

Для капиллярного скачка давления в общем случае имеет место формула Лапласа

$$\Delta p_k = p_{\text{ж}} - p_{\text{вн}} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Для выпуклой поверхности жидкости радиусы кривизны считаются положительными, для вогнутой - отрицательными.

Для сферической капли жидкости (рис. 2.3 а) главные радиусы кривизны равны друг другу и равны радиусу сферы ( $R_1 = R_2 = R$ ), поэтому давление внутри неё на величину  $\Delta p_k = 2\sigma/R$  больше наружного.

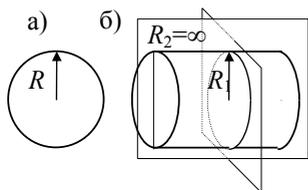


Рис. 2.3.

Для цилиндрического столба жидкости (рис.2.3 б) наименьший радиус кривизны равен радиусу цилиндра  $R_1 = R$ , а наибольший - бесконечности ( $R_2 = \infty$ ), поэтому для

него  $\Delta p_k = \sigma/R$ .

Силами поверхностного натяжения обуславливается поднятие или опускание жидкостей в капиллярах (рис.2.4).

Если жидкость смачивает стенки капилляра, то жидкость в нём поднимается, мениск при этом вогнутый (рис.2.4 а, в, г). Если жидкость не смачивает стенки капилляра, то мениск выпуклый и уровень жидкости в капиллярах ниже, чем в сосуде (рис.2.4 б). Во всех случаях уровень жидкости в капилляре устанавливается таким, что капиллярный скачок давления  $\Delta p_k$  уравнивается гидростатическим давлением столба жидкости в капилляре  $\rho gh$ , (где  $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение силы тяжести),  $\Delta p_k = \rho gh$ .

Для всех приведённых на рис.2.4 ситуаций выше были определены капиллярные скачки давления  $\Delta p_k$ , поэтому легко вычислить высоту поднятия жидкости в этих случаях при полном смачивании стенок капилляров.

1. Цилиндрический капилляр (рис.2.4 а, б). Поверхность жидкости – сфера с радиусом  $R = d/2$  ( $d$  – диаметр капилляра). Тогда

$$h = 4\sigma/\rho g d \quad (2.1)$$

2. Плоскопараллельный капилляр (рис.2.4 в). Поверхность жидкости – цилиндр радиуса  $R = d/2$  ( $d$  – расстояние между пластинами):

$$h = 2\sigma/\rho g d \quad (2.2)$$

3. Клиновидный капилляр (рис. 2.4 г). Расстояние между пластинами в нём изменяется по закону  $d = \varphi x$  ( $\varphi$  – малый угол между пластинами). Подставив это значение  $d$  в формулу (2.2) получим

$$h = 2\sigma/(\rho g \varphi x) = C/x, \quad C = 2\sigma/\rho g \varphi \quad (2.3)$$

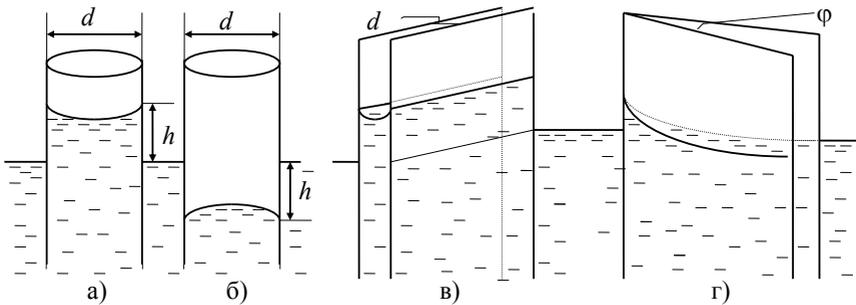


Рис. 2.4.

В этом случае линия пересечения поверхности жидкости и пластин имеет форму гиперболы.

**Методы измерения коэффициента поверхностного натяжения** включают в себя методы, основанные на измерении высоты поднятия жидкости в капиллярах; на изучении капиллярных волн на поверхности жидкости; на изучении формы капель и пузырей, лежащих на плоских поверхностях; на изучении условий отрыва капель.

### А. Определение высоты поднятия воды в цилиндрических капиллярах

1. Выполнить измерение высоты поднятия воды в наборе цилиндрических капилляров различного радиуса. Данные записать в таблицу 2.2.

2. По формуле (2.1) вычислить высоту поднятия жидкости в цилиндрических капиллярах. При расчете выбрать  $\sigma_{\text{воды}}=0,072 \text{ Н/м}$ .

3. Сравнить результаты эксперимента и расчета.

Таблица 2.2 Поднятие жидкости в цилиндрическом капилляре

	$d$ , мм	$h$ , мм	
		измеренное значение	вычисленное значение
1			
2			
4			
3			
5			

3. По формуле (2.1) вычислить высоту поднятия жидкости в цилиндрических капиллярах.

### Б. Метод отрывающейся капли

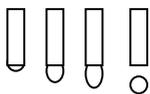


Рис. 2.5.

Для измерения коэффициента поверхностного натяжения в работе применяется **метод отрывающейся капли**, образующейся из нижнего конца вертикальной трубки, заполненной исследуемой жидкостью. Процесс образования капли иллюстрируется на рис. 2.5. Перед отрывом капли образуется шейка, радиус  $r$  которой примерно равен радиусу трубки. Вдоль окружности этой шейки  $2\pi r$  и действует сила поверхностного натяжения  $2\pi r\sigma$  вертикально вверх, которая в момент отрыва должна быть равна силе тяжести- весу капли  $\rho gV$  ( $V$  – объём капли). Таким образом, отрыв капли происходит при условии

$$2\pi r\sigma = \rho gV,$$

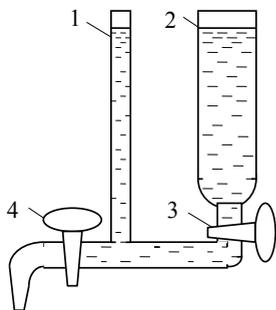


Рис. 2.6.

откуда

$$\sigma = \rho g V / 2\pi r.$$

Часто в качестве радиуса  $r$  берут радиус трубки  $R$ , но вводят поправочный коэффициент  $\sigma = k\rho g V / 2\pi R$  ( $k \approx 1,7$ ).

Константа  $C = k\rho g / 2\pi R$  является постоянной данного прибора и может быть определена его тарировкой по известной жидкости. Тогда для данного прибора

$$\sigma = C\rho V \quad (\text{Н/м}) \quad (2.4)$$

При этом плотность  $\rho$  измеряется в  $\text{кг/м}^3$ , объем  $V$  – в  $\text{м}^3$ ,  $C$  – в  $1/\text{с}^2$ .

Произведение  $\rho V$  представляет собой массу капли. При данной методике можно измерять массу капель на аналитических весах, предварительно отсчитав определённое их количество, или путем измерения плотности жидкости и определения объема капель с помощью, например, микробюретки.

### Экспериментальная установка

Экспериментальная установка включает в себя установленную на штативе микробюретку, набор цилиндрических капилляров.

Микробюретка представляет собой две сообщающиеся вертикальные трубки (1) и (2) (рис. 2.6), одна из которых (1) с шкалой является измерительной и снабжена отводом с краном (4). Вторая трубка служит для наполнения измерительной трубки жидкостью и имеет для этого кран (3).

### Порядок выполнения работы

1. Через широкую часть (2) заполнить микробюретку исследуемой жидкостью при закрытых кранах.
2. Открыв кран (3), заполнить измерительную трубку (1).

3. Закрывать кран (3), а краном (4) установить капельное течение жидкости через отвод (примерно 1 капля за 3 - 4 секунды). Следить, чтобы в микробюретке не было пузырьков воздуха.

4. По шкале на измерительной трубке определить объём  $n$ -ного количества (не менее 10) капель. Повторить измерения 5 раз.

5. С помощью ареометров измерить плотность исследуемой жидкости.

6. Результаты измерений записать в табл. 2.2. Вычислить коэффициент поверхностного натяжения жидкости по формуле (2.4).

7. Опуская в жидкость цилиндрические капилляры разного диаметра, измерить высоту поднятия жидкости в них и вычислить её по формуле (2.1). Результаты измерений записать в табл. 2.3.

### Обработка экспериментальных результатов

1. Объём одной капли равен  $V_1 = V_n/n$ . Для расчётов используется следующее среднее значение  $V_1$  по всем измерениям  $\bar{V} = \sum_{i=1}^N V_{1i}/N$  ( $i$  – номер отдельного измерения,  $N$  – количество измерений).

2. Определяется относительная средняя статистическая погрешность измерений  $(\Delta\sigma/\sigma) \cdot 100\% = (\Delta V/\bar{V}) \cdot 100\%$ , где средняя абсолютная ошибка измерений вычисляется по формуле

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N |V_i - \bar{V}|/N . \text{ Данные расчетов заносятся в таблицу 2.3.}$$

Таблица 2.3. Измерение коэффициента поверхностного натяжения методом отрыва капли

№ изм.	Число капель $n$	Объём капель $V_n, \text{ м}^3$	Объём одной капели $V_1, \text{ м}^3$	$\bar{V}$ $\text{ м}^3$	$V_i - \bar{V}$ $\text{ м}^3$	$\Delta V, \text{ м}^3$	$\sigma, \text{ Н/м}$	$\Delta\sigma/\sigma, \%$
1								
2								
3								

$$\rho = \quad (\text{кг/м}^3)$$

4. Проанализировать полученные результаты измерений и вычислений.

## В. Метод формы подвешенной капли

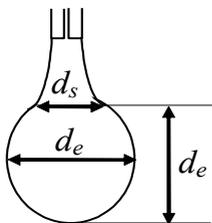


Рис. 2.7. К способу определения коэффициента поверхностного натяжения методом формы неподвижных капель

Суть метода заключается в медленном формировании подвешенных капель на плоской поверхности либо на кончике капилляра (рис. 2.7). Форма подвешенной капли жидкости определяется соотношением гидростатического давления и давления, обусловленного кривизной ее верхушки. Коэффициент поверхностного натяжения находится из выражения

$$\sigma = \frac{\rho g d_e^2}{H} \quad (2.5)$$

Диаметр  $d_s$  измеряется на расстоянии диаметра экватора  $d_e$ , от нижней точки капли, а  $\varphi$  является функцией отношения  $d_s/d_e$ .

При измерениях коэффициента  $\sigma$  формирование капли осуществлено на кончике капилляра. Измерение характерных размеров подвешенной капли произведено как путем ее фотографирования и последующей обработки фотографий, так и путем компьютерной обработки видеоизображения этой капли. Значения функции  $H$  определены из тарировочного графика (рис. 2.8).

### Экспериментальная установка

Экспериментальная установка включает в себя установленную на штативе микробюретку с капилляром, систему фоторегистрации. Для обработки размеров подвешенной капли используется компьютер с установленным на нем графическим пакетом. Для выполнения масштабирования используется линейка.

## Порядок выполнения работы

1. Заполнить микробюретку исследуемой жидкостью.
2. Для формирования капли жидкости на кончике капилляра медленно приоткрыть кран.
3. Сфотографировать подвешенную каплю.
4. Файл с изображением капли ввести в компьютер.

### Обработка экспериментальных результатов

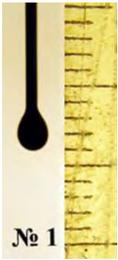


Рис.2.8

1. Открыть файл с изображением капли в графическом редакторе (рисунок 2.8). На открывшейся фотографии расположены подвешенная капля и рядом с ней линейка. Цена малого деления на линейке равна 1 мм.

2. Определить масштабный коэффициент изображения. Для этого выбрать отрезок на линейке длиной  $l_n = 15$  мм и измерить его длину на мониторе компьютера  $l_m$ , воспользовавшись инструментом «Линейка». Результаты измерений записать в табл. 2.4.

Таблица 2.4. Определение масштабного коэффициента

№ изм.	Длина участка линейки $l_n$ , мм	Длина изображения участка линейки на мониторе $l_m$ , пиксель	Масштаб $M$ , мм/пиксель
1			

3. Масштабный коэффициент  $M$  изображения определить по формуле  $M = l_n / l_m$ .

4. Измерить размеры капли  $d_{em}$  и  $d_{sm}$  на экране монитора. Реальные размеры капли рассчитать по формулам

$$d_e = M d_{en}, \quad d_s = M d_{sn}.$$

Полученные данные внести в табл. 2.5.

5. Определить параметр  $S = d_s / d_e$ . По найденному значению  $S$  с помощью вспомогательного графика 2.8 определить значение функции  $1/H$ . Коэффициент поверхностного натяжения жидкости рассчитать по формуле

$$\sigma = \frac{\rho g d_e^2}{H}$$

6. Измерения повторить 3 раза.

7. Проанализировать полученные результаты измерений и вычислений.

Таблица 2.5. Результаты измерений и расчетов

Жидкость	Размер на мониторе $d_{em}$ , пиксель	Реальный размер $d_e$ , мм	Размер на мониторе $d_{sm}$ , пиксель	Реальный размер $d_s$ , мм	S	1/H	$\sigma$ , Н/м
					-	-	

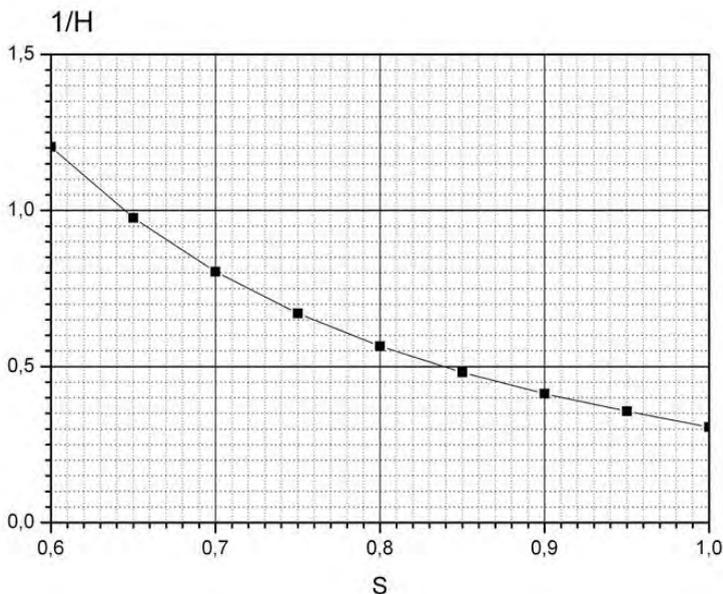


Рисунок 2.8. График для определения функции  $1/H$

### Лабораторная работа №3. Форма свободной поверхности жидкости

**Цель работы** – экспериментальная проверка основного уравнения гидростатики путем исследования формы свободной поверхности жидкости в равномерно вращающемся вокруг своей оси вертикальном цилиндрическом сосуде.

#### Общие сведения

В жидкостях и газах действуют массовые и поверхностные силы. Массовые силы действуют на каждую частицу жидкости и пропорциональны массе жидкости. Поверхностные силы действуют на поверхности выделенного объема жидкости и пропорциональны площади поверхности.

В неподвижной или движущейся как целое (без относительного перемещения слоев) жидкости имеют место только нормальные напряжения, которые называются *давлением*. Этот факт есть следствие легкой подвижности или текучести жидкости. Таким образом, на любую площадку, выделенную в неподвижной жидкости, действует *сила давления*, перпендикулярно к ней. Рассчитанная на единицу площади эта сила называется напряжением сил давления или просто *давлением*  $p$ .

В соответствии с *законом Паскаля* величина давления в данной точке не зависит от ориентации площадки и является только функцией точки:  $p = p(x, y, z)$ .

В системе *СИ* давление измеряется в Паскалях

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2.$$

Распределение давления в покоящейся или движущейся как целое жидкости определяется объемной плотностью  $\rho \vec{f}$  действующих на нее массовых сил и описывается *основным уравнением гидростатики* в дифференциальной форме

$$\text{grad} p = \rho \vec{f} \tag{3.1}$$

где  $\vec{f}$  – плотность массовой сил, т.е. вектор, равный отношению массовой силы  $\Delta\vec{F}$  к массе  $\Delta m$  частицы, на которую она действует:

$$\vec{f} = \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta m} \quad (\text{Н/кг}).$$

Плотность силы  $f$  имеет размерность ускорения  $\text{м/с}^2$ .

Если объем рассматриваемой частицы есть  $\Delta V$ , то  $\rho = \Delta m / \Delta V$ . В соответствии с этим  $\rho\vec{f} = \Delta\vec{F} / \Delta V$  есть сила, приходящаяся на единицу объема, то есть *объемная плотность массовой силы*.

Для силы тяжести  $\Delta\vec{F} = \Delta m \vec{g}$  и  $\vec{f} = \vec{g}$  ( $\vec{g}$  – ускорение силы тяжести).

Известно, что равновесие тел, движущихся с ускорением  $\vec{a}$ , можно рассматривать с позиций статики, если присоединить к действующим силам силы инерции  $\Delta\vec{F}_i = -m\vec{a}$ . Тогда плотность сил инерции, действующих в ускоренно движущейся жидкости, есть

$\vec{f} = -\vec{a}$ . При равномерном вращении с угловой

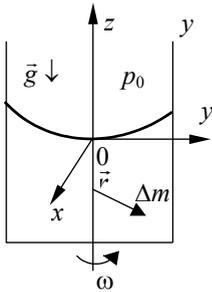


Рис. 3.1.

скоростью  $\omega$  относительно некоторой оси  $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$ , где  $\vec{r}$  – перпендикулярный к оси вращения вектор, проведенный в рассматриваемую точку. Таким образом, если жидкость находится в поле силы тяжести и равномерно вращается как целое вместе с вертикальным цилиндром вокруг его оси с угловой скоростью  $\omega$ , как изображено на рис.3.1, то результирующий вектор плотности массовых сил в ней будет определяться выражением  $\vec{f} = \vec{g} + \omega^2 \vec{r}$  и будет иметь следующие про-

екции на оси координат:

$$f_x = \omega^2 x, \quad f_y = \omega^2 y, \quad f_z = \omega^2 z,$$

Решение основного уравнения гидростатики (3.1) для этого случая дает следующее распределение давления во вращающейся жидкости

$$p = p_0 - \rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (3.2)$$

Начало координат выбрано на поверхности жидкости, так что в точке  $(x=0, y=0, z=0)$  давление равно давлению находящегося над жидкостью газа  $p_0$ .

Как следует из выражения (3.2), давление в жидкости *линейно* увеличивается с глубиной и растет по *квадратичному закону* по мере удаления от оси вращения.

Форма свободной поверхности жидкости определяется, исходя из того факта, что давление газа над ней постоянно. Поэтому она представляет собой поверхность постоянного давления или поверхность уровня,  $p = p_0 = \text{const}$ . В соответствии с этим для вращающейся жидкости из (3.2) получаем следующее уравнение свободной поверхности

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2),$$

которое описывает параболу вращения.

Следует обратить внимание на то, что в данном случае форма поверхности *не зависит* от плотности жидкости.

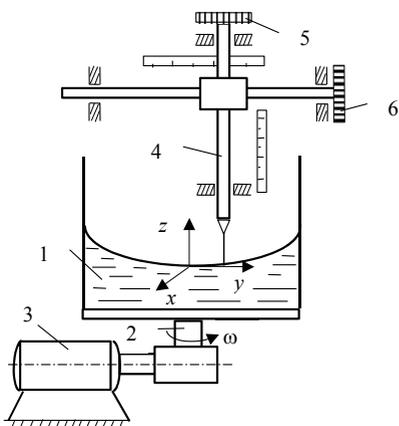


Рис. 3.2.

### Экспериментальная установка

Установка представляет собой прозрачный цилиндрический сосуд (1), в который заливается жидкость (рис. 3.2). Сосуд установлен вертикально на оси вращения (2), соединенной с валом электродвигателя (3). Координаты свободной поверхности  $z$  и  $y$  определяются с помощью игольчатого уровнемера (4). Острые уровнемера вращением винтов (5)

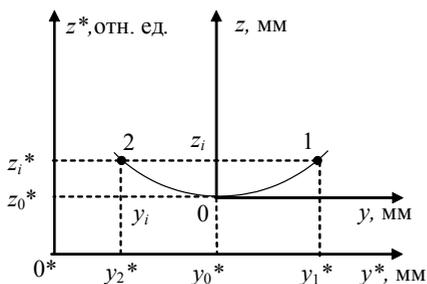
и (6) перемещается в вертикальном и горизонтальном направлениях. Таким образом снимается форма поверхности в вертикальном сечении  $X = 0$ . Число оборотов сосуда  $n$  определяется с помощью тахометра.

### Порядок выполнения работы

1. Включением двигателя сосуд приводится во вращение.

2. После установления режима вращения и стабилизации поверхности произвести измерение координат нижней точки поверхности вращения ( $y_0^*$ ,  $z_0^*$ ) в экспериментальной системе координат  $O^*Y^*Z^*$  (рис.3.3).

2.1. Для этого определяются координаты  $y_1^*$  и  $y_2^*$  двух симметричных точек поверхности 1 и 2, находящихся на одной высоте  $z^*$ . Тогда координата нижней точки поверхности вращения:



$$y_0^* = y_2^* + (y_1^* - y_2^*)/2.$$

2.2. После установки щупа в положение  $y_0^*$  определяется вертикальная координата  $z_0^*$ .

3. Произвести измерение координат поверхности ( $y^*$ ,  $z^*$ ) в экспериментальной системе координат в одну из сторон относительно центра поверхности вращения (с учетом симметрии поверхности вращения). Измерения производить с шагом, обеспечивающим снятие 10 точек ( $i = 1, 10$ ).

4. Определить линейную скорость внешней боковой стенки сосуда  $U$ .

4.1. Насадить на приводной вал тахометра дисковый наконечник. Прижать его цилиндрическую поверхность к наружной поверхности сосуда так, чтобы ось вала тахометра была параллельна оси сосуда.

4.2. Нажать и отпустить кнопку «Пуск» (кнопка «Пуск» расположена напротив цифры на шкале 1000 об./мин.). Часовой механизм тахометра начинает работать.

4.3. После остановки механизма отсоединить наконечник тахометра от измеряемой поверхности и произвести отсчет показаний скорости  $U$  (м/мин) по красной шкале прибора.

4.4. Сбросить показание прибора на нуль нажатием кнопки «Стоп» (кнопка «Стоп» расположена рядом с валом тахометра)

### Обработка экспериментальных данных

1. Вычислить угловую скорость вращения сосуда  $\omega=2U/D$ , (1/с), где  $D= 156$  мм – диаметр наружной поверхности цилиндрического сосуда с жидкостью.

2. Произвести преобразование координат каждой точки поверхности вращения в экспериментальной системе координат ( $O^*Y^*Z^*$ ) в координаты в системе ( $OYZ$ ), связанной с центром поверхности вращения:  $(y_i^*, z_i^*) \rightarrow (y_i, z_i)$ :

$$z_{i \text{ эксп.}} = 0,73 (z_i^* - z_0^*) \text{ (мм)}$$

$$y_i = |y_i^* - y_0^*| \text{ (мм)}$$

где 0,73 – масштабный коэффициент вертикальной шкалы.

3. При найденных значениях  $y_i$  вычислить теоретическое значение координаты  $z_{i \text{ теор.}}$

$$z_{\text{теор}} = \omega^2 y^2 / 2g$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

4. Данные измерений и вычислений занести в табл. 3.1.

$y_0^* = \underline{\hspace{1cm}}$  (мм),  $z_0^* = \underline{\hspace{1cm}}$  (мм),  $U = \underline{\hspace{1cm}}$  (м/мин.),  $\omega = \underline{\hspace{1cm}}$  (1/с).

Таблица 3.1.

№ точки	$z_i^*$ , дел.	$z_{i \text{ эксп.}}$ , мм	$y_i^*$ , мм	$y_i$ , мм	$z_{i \text{ теор.}}$ , мм	$(\Delta z/z) \cdot 100$ , %
1						
...						
10						

5. На одном графике построить экспериментальную  $z = z_{\text{эксп}}(y)$  и теоретическую  $z = z_{\text{теор}}(y)$  формы поверхности жидкости.

6. Определить относительное расхождение между экспериментальными и теоретическими данными и занести результаты в таблицу:

$$(\Delta z/z)_i \cdot 100 \% = (z_i_{\text{эксп}} - z_i_{\text{теор}})/z_i_{\text{эксп}} \cdot 100 \% (\%)$$

7. Провести анализ полученных результатов.

#### **Лабораторная работа №4. Измерение скоростей и давлений в газовых потоках**

**Цель работы** – изучение пневматического метода измерения скорости потоков газов. Изучение устройства и принципа измерения давлений микроманометром.

#### **Общие сведения**

Измерение скоростей и давлений в потоках жидкостей и газов имеет особое значение, поскольку позволяет получить практически всю информацию о свойствах этих потоков. Существует много методов измерения, основанных на различных физических процессах. Одним из наиболее распространенных в настоящее время методов является пневматический метод измерения скорости.

*Пневматический метод измерения скорости* основан на использовании уравнения Бернулли, в соответствии с которым полное давление одинаково для всех сечений потока.

Давление измеряется скоростной трубкой, называемой трубкой Пито-Прандтля (рис. 4.1). Конструктивно она представляет собой изогнутую под прямым углом трубку с двумя отверстиями. Одно отверстие выполнено в торцевой части трубки (критической точке), другое (статическое отверстие) – на боковой стенке трубки. При измерении трубка помещается в исследуемый поток торцевым отверстием навстречу движущейся жидкости либо газу.

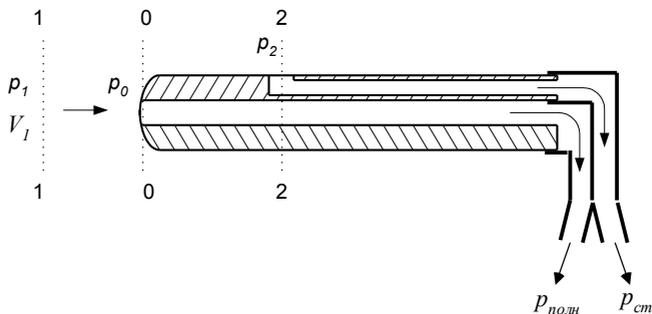


Рис. 4.1.

Поскольку скорость  $V_0$  в торцевой части трубки равна нулю, то эта часть трубки является критической точкой для потока. Уравнение Бернулли для двух сечений 1-1 и 0-0 газового потока имеет вид

$$p_{\text{полн}} = \frac{\rho_{\text{г}} V_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho_{\text{г}} V_0^2}{2} + p_0 = p_0,$$

где  $p_{\text{полн}}$  – полное давление,  $p_1$  и  $p_0$  – статические давления в двух сечениях,  $V_1$  – скорость потока,  $\rho_{\text{г}}$  – плотность газа.

Тогда скорость в потоке равна

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho_{\text{г}}}} = \sqrt{\frac{2p_{\text{дин}}}{\rho_{\text{г}}}},$$

где  $p_{\text{дин}} = \rho V_1^2 / 2$  – динамическое давление.

Таким образом, для измерения скорости потока необходимо знать динамическое давление либо разность между полным и статическим давлениями.

Полное давление  $p_{\text{полн}} = p_0$  можно определить, если отверстие в критической точке трубки Пито-Прандтля соединить с микроманометром. Статическое давление  $p_{\text{ст}} = p_1$  определяется с помощью отверстия в боковой стенке трубки в сечении 2-2 (рис. 4.1). При пренебрежении подтормаживающим влиянием трубки можно считать,

что скорость газа в этом сечении равна скорости  $V_1$ . Из уравнения Бернулли, записанного для сечений 1 – 1 и 2 – 2 следует, что  $p_1 = p_2$ . Отверстие на боковой стенке трубки в сечении 2 – 2 часто называют статическим отверстием.

Если отверстие полного напора насадка соединить с одним коленом микроманометра, а отверстие статического давления – с другим, то микроманометр покажет непосредственно разность давлений (рис.4.2)

$$p_{\text{полн}} - p_{\text{ст}} = \frac{\rho V_1^2}{2} = p_{\text{дин}}$$

Иногда для измерения используются трубки только с одним торцевым отверстием, которые называются трубками Пито. Трубкой Пито измеряется полное давление. Статическое давление в данном случае определяется через отверстие на стенке канала, в котором движется газовый поток.

Для измерения давлений пользуются большим количеством различных приборов, называемых манометрами. Наиболее простыми являются жидкостные манометры, которые работают на принципе сообщающихся сосудов.

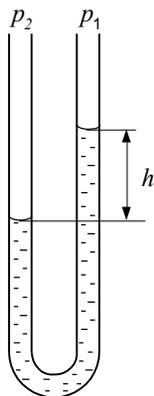


Рис. 4.2.

**U – образный манометр.** Наиболее простым жидкостным манометром является U-образная трубка, заполненная жидкостью с плотностью  $\rho_{\text{ж}}$  (рис.4.2). Измеряемая разность давлений  $\Delta p = p_1 - p_2$  уравновешивается гидростатическим давлением столба жидкости высотой  $h$ :

$$\Delta p = \rho_{\text{ж}} g h .$$

В зависимости от величины измеряемой разности давлений U-образную трубку заполняют жидкостью с соответствующей плотностью. Внутренний диаметр трубки должен быть по возможности одинаков по всей длине и не менее 8...10 мм, чтобы исключить влияние капиллярных сил.

**Микроманометры с наклонными трубками.** Увеличение точности измерения давлений может быть достигнуто применением конструкции манометра с наклонной трубкой, называемой микроманометром. Микроманометры широко используются при проведении научно-исследовательских работ и в промышленных условиях при проведении испытаний теплосиловых и других установок для измерения малых давлений.

Основной частью микроманометра (рис.4.3) является широкий сосуд с наклонной стеклянной трубкой. Наклон трубки предусмотрен с целью увеличения чувствительности и точности отсчета, т.к. вертикальный столб жидкости  $h$ , соответствующей измеряемой разности давлений  $(p_2 - p_1)$ , заменяется наклонным столбом длиной  $A = l - l_0$ :

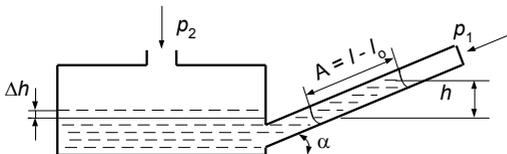


Рис. 4.3

$$h = A \sin \alpha = (l - l_0) \sin \alpha ,$$

где  $l$  – показание наклонной трубки,  $l_0$  – начальный отсчет на трубке ( $l = l_0$  при  $p_1 = p_2$ ).

Угол  $\alpha$  должен быть тем меньше, чем меньше измеряемая разность давлений.

Величина  $\sin \alpha$  называется масштабом микроманометра и обозначается буквой  $K$ . Один из наиболее распространенных микроманометр типа ММН имеет 5 фиксированных углов наклона трубки ( $K = 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,8$ ).

Измеряемая с помощью микроманометра разность давлений определяется выражением

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_{ж} g h = \rho_{ж} g K (l - l_0)$$

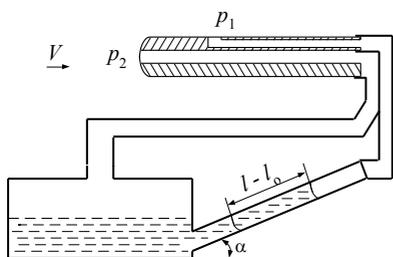


Рис. 4.4.

ния жидкости  $\Delta h$  в широком сосуде можно пренебречь при выполнении условия  $d_1/d_2 > 20$  либо  $F_1/F_2 > 400$ , где  $d_1$ ;  $F_1$  и  $d_2$ ;  $F_2$  – диаметры и площади сечений широкого сосуда и наклонной трубки соответственно.

Схема измерения скорости воздушного потока представлена на рис.4.4. Трубка Пито-Прандтля подсоединена к микроманометру, причем, отверстие полного напора соединено с широкой частью микроманометра, а статическое отверстие – с наклонной трубкой. При таком подключении динамическое давление потока уравнивается столбом жидкости в микроманометре высотой  $h=K(l - l_0)$ :

$$\rho_{\text{ж}} g h = \rho_{\text{г}} \frac{V^2}{2},$$

где  $l - l_0$  – разность показаний микроманометра при наличии скорости потока и в ее отсутствие.

Тогда скорость

$$V = \sqrt{2g \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{г}}} K(l - l_0)}.$$

Однако, сама измерительная трубка вносит некоторое искажение в обтекание и давление, в результате скорость несколько отличается от истинного значения. Поэтому иногда в формулу вводится поправочный коэффициент  $\xi$ , называемый коэффициентом насадка и который определяется в каждом случае из опыта ( $\xi \approx 0,8$ ).

Тогда выражение для скорости принимает вид:

Соотношение диаметров широкого сосуда и трубки должно быть большим, чтобы уровень жидкости в широком сосуде оставался практически постоянным. Тогда достаточно определять положение жидкости в только наклонной трубке (в отличие от U-образного манометра). Величиной изменения уровня

$$V = \sqrt{2g \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{г}}} h \xi}.$$

### Экспериментальная установка

В рабочей области аэродинамической трубы 1 установлена трубка Пито-Прандтля 2 для измерения скорости воздушного потока (рис.4.5). Трубка Пито-Прандтля подсоединена к микроманометру 3. Отверстие полного напора трубки Пито-Прандтля соединено с широкой частью микроманометра, а статическое отверстие – с наклонной трубкой. Показание микроманометра соответствует динамическому давлению, создаваемому потоком воздуха. В аэродинамической трубе воздушный поток создается осевым вентилятором 4, подключенным к блоку питания 5. Величина скорости потока в трубе регулируется изменением тока питания вентилятора, который контролируется вольтметром 6 и амперметром 7.

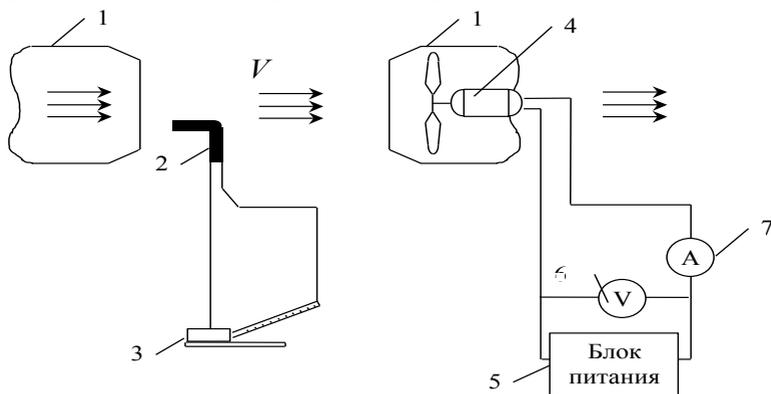


Рис. 4.5. Схема экспериментальной установки

### Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с экспериментальной установкой, с устройством трубки Пито-Прандтля, микроманометра.
2. В отсутствие потока воздуха в аэродинамической трубе отметить начальное показание микроманометра  $l_0$ .

3. Включить блок питания аэродинамической трубы. В соответствии с табл. 4.1 установить начальное значение тока питания вентилятора аэродинамической трубы.

4. При установленном значении тока питания снять показание микроманометра  $l$ . Данные записать в табл. 4.1.

5. В соответствии с табл. 4.1. изменить величину тока питания  $I$ . Произвести все вышеуказанные измерения.

Таблица 4.1

№ опыта	$I, A$	Показания микроманометра		$p_{\text{дин}}$ Па	$V,$ м/с
		$l_0, \text{ мм}$	$l, \text{ мм}$		
1	6				
2	7				
3	8				
4	9				
5	10				

### Обработка экспериментальных данных

1. Вычислить динамическое давление потока воздуха

$$p_{\text{дин}} = \rho_{\text{ж}} g K (l - l_0)$$

где  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность спирта в микроманометре ( $\rho_{\text{ж}} = 809,5 \text{ кг/м}^3$ );

$\rho_{\text{в}}$  – плотность воздуха ( $\rho_{\text{в}} = 1,2 \text{ кг/м}^3$ );

$l - l_0$  – разность показаний микроманометра, м;

$K = 0,2$  – масштаб микроманометра (указан на микроманометре).

2. Вычислить скорость потока воздуха  $V$  по формуле

$$V = \sqrt{2g \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{в}}} K (l - l_0)},$$

3. Данные внести в табл. 4.1.

4. Провести анализ полученных результатов.

## Лабораторная работа № 5. Режимы течения жидкости

**Цель работы** - экспериментальное установление существования ламинарного и турбулентного режимов течения жидкости, определение условий смены режимов.

### Общие сведения

Многочисленные наблюдения течений жидкостей выявили существование двух принципиально различных режимов течения, которые называются *ламинарным* и *турбулентным*. Эти режимы различаются характером движения отдельных частиц жидкости.

При *ламинарном* течении траектории частиц жидкости представляют собой плавные, четко определяющие собой движение отдельных слоев жидкости. Ламинарное течение еще называется слоистым. Из слоя в слой частицы жидкости не переходят.

С увеличением скорости ламинарный режим течения становится неустойчивым. При достижении некоторой критической скорости  $V_{кр}$  имеющиеся в нем малые возмущения скорости начинают развиваться, и режим течения становится *турбулентным*. При турбулентном режиме отдельные частицы жидкости движутся по хаотическим траекториям, в том числе и поперек основного потока. Последнее обеспечивает интенсивное перемешивание жидкости. Истинную скорость  $V$  частицы жидкости в турбулентном потоке можно представить как сумму осредненной по времени скорости  $\bar{V}$  и отклонения  $V'$  действительной скорости от осредненной:  $V = \bar{V} + V'$ . Эти отклонения  $V'$  называются *пульсационными скоростями* или пульсациями. Сказанное относится ко всем трем компонентам скорости. Вследствие хаотического случайного их распределения осредненные по времени значения пульсаций равны нулю  $\overline{V'} = 0$ . Но осредненные значения их квадратов  $\overline{V'^2}$  не равны нулю и характеризуют собой интенсивность турбулентности. Интенсивность турбулентности по отдельным компонентам определяется как  $T_v = \sqrt{\overline{V'^2}} / \bar{V}$  и часто измеряется в процентах.

Осредненное по времени  $t$  значение любой величины  $V$  определяется как интегральное среднее  $\bar{V} = (1/t_0) \int_t^{t+t_0} V dt$  за промежуток времени  $t_0$ , называемый периодом осреднения. В развитых турбулентных потоках интенсивность турбулентности достигает 7-8 %. Кроме амплитуды  $V'$  турбулентные пульсации характеризуются частотой пульсаций  $f$ , которая может охватывать широкий диапазон от (5-10)Гц до (50-100) кГц.

В соответствии с характером течения разные виды имеют профили скоростей жидкости в каналах. Профиль скоростей представляет собой график распределения скоростей частиц по сечению канала. Так в круглой трубе радиуса  $R_0$  при ламинарном течении профиль скоростей имеет параболический вид (рис.5.1а) и описывается формулой Пуазейля

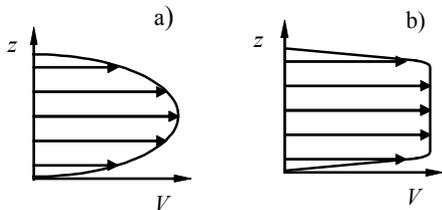


Рис. 5.1.

$$V = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R_0^2 - r^2),$$

где  $p_1$  и  $p_2$  – давления соответственно на входе и выходе из трубы длиной  $l$ ,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости. На стенках трубы скорости частиц жидкости равны нулю вследствие "прилипания".

Максимальное значение скорости достигается в центре трубы, т.е. при  $r = 0$ :

$$V_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R_0^2.$$

Средняя скорость течения в трубе при ламинарном режиме  $V_{\text{cp}} = 0,5V_{\max}$

При турбулентном течении профиль осредненных скоростей более пологий (рис.5.1б). В средней части трубы скорости частиц практически постоянны по всему сечению и только в узком слое возле

стенок спадают до нуля на них вследствие того же прилипания. Такой характер профиля скоростей обуславливается интенсивным перемешиванием жидкости в трубе при турбулентном течении и выравниванием осредненных скоростей частиц в потоке. Средняя скорость течения в трубе при турбулентном режиме  $V_{cp} = 0,8V_{max}$

Реализация того или иного режима течения имеет очень большое практическое значение. Так турбулизация потока, с одной стороны, способствует интенсификации процессов тепло- и массообмена, но, с другой стороны, в сильной степени увеличивает коэффициент сопротивления трения, что совершенно нежелательно при транспортировке жидкостей по трубам, а также при движении тел в жидкостях. Поэтому важно знать, при каких условиях происходит смена режимов течения.

Значение средней скорости потока  $V_{cp}$ , при которой происходит переход одного режима в другой, называется *критической скоростью*  $(V_{cp})_{кр}$ . Большим количеством экспериментов установлено, что критическое значение скорости зависит от вязкости жидкости, описываемой кинематическим коэффициентом вязкости  $\nu$  и размеров, характеризующих поток жидкости  $d$ . При течении жидкости в круглой трубе  $d$  – это ее диаметр. Причем безразмерное отношение  $(V_{cp})_{кр} \cdot d/\nu$  является числом, постоянным для данных условий эксперимента и уже не зависит от рода жидкости и размеров системы (при подобном ее изменении, например, при изменении диаметра трубы). В соответствии с большой важностью безразмерного комплекса  $(V_{cp})_{кр} \cdot d/\nu = Re$  он был назван *критерием (или числом) Рейнольдса*  $Re$  и служит критерием подобия течений жидкости и газов. *Те значения числа Рейнольдса, при которых происходит смена режимов течения, называются критическими,  $Re_{кр}$ . Переходу от ламинарного режима к турбулентному соответствует верхнее критическое значение числа Рейнольдса –  $(Re_{кр})_в$ , обратному переходу - нижнее критическое –  $(Re_{кр})_н$ . Из того, что  $(Re_{кр})_в > (Re_{кр})_н$  следует, что турбулентность исчезает при меньших скоростях потока, чем при которых она возникает. При  $Re > (Re_{кр})_в$  режим течения турбулентный, при  $Re < (Re_{кр})_н$  – ламинарный.*

При промежуточных значениях числа Рейнольдса  $(Re_{кр})_в > Re > (Re_{кр})_н$  могут реализоваться оба режима течения, то есть тот из них, который существовал при подходе  $Re$  к этой области.

Нижнее критическое значение числа Рейнольдса практически *не зависит* ни от каких внешних факторов и, для круглой трубы равно  $(Re_{кр})_н = 2300$ .

Верхнее критическое значение числа Рейнольдса  $(Re_{кр})_в$  в значительной степени определяется разными факторами, которые вносят возмущения в поток жидкости. Наиболее сильным из них является неплавный вход в трубу, служащий источником значительных возмущений. К этим факторам относятся также внешние вибрации, шероховатости стенок. Если по мере возможности устранить все эти возмущающие факторы, то режим ламинарного течения удастся затянуть до чисел Рейнольдса порядка 40000. В обычных условиях  $(Re_{кр})_в \cong 10000$ . Для технических расчетов гидравлических сопротивлений в трубах принимается  $(Re_{кр})_н = (Re_{кр})_в = Re_{кр} = 2300$ .

Тщательное исследование условий смены режимов течения показало, что при значениях числа Рейнольдса близких к критическим, в одном и том же сечении трубы при заданном  $Re$  может происходить чередование ламинарного и турбулентного режимов. Это явление получило название перемежаемости. Причина такой перемежаемости режимов течения заключается в том, что турбулентность образуется вначале в дискретных областях потока в виде заполняющих все поперечное сечение трубы "пробок", протяженность которых зависит от значений  $Re$ . Основной количественной характеристикой явления перемежаемости служит доля времени существования турбулентного режима в данном сечении трубы. Эту безразмерную величину, равную нулю, если течение все время ламинарное, и единице, если течение турбулентное, называют коэффициентом перемежаемости.

Наиболее наглядно разные режимы течения проявляются при визуализации потока жидкости в трубе с помощью подкрашенной струйки жидкости, впускаемой в поток. При ламинарном режиме подкрашенная жидкость тонкой прямолинейной струйкой тянется по всей трубе. При увеличении скорости потока и подходе к ее критическому значению вдоль струйки начинают бежать волны и затем она размывается, так что поток становится практически равномерно

окрашенным. Это означает, что у частиц жидкости появляются составляющие скорости, перпендикулярные оси трубы и возникает турбулентное движение жидкости с интенсивным ее перемешиванием.

### Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки приведена на рис.5.2.

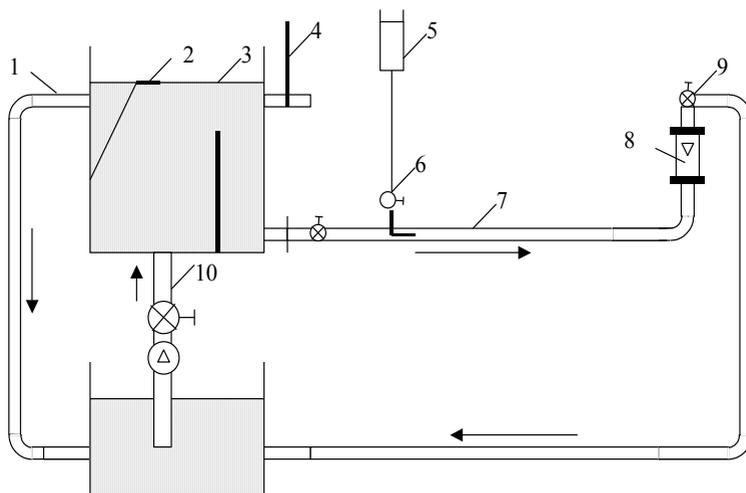


Рис. 5.2.

Режимы течения изучаются в прозрачной круглой трубе (7), вода в которую подается из напорного бака (3). Вода в бак подается насосом через патрубок (10) и уровень ее поддерживается постоянным с помощью перегородки (2) и свободного слива (1). В баке имеются успокоительные перегородки с отверстиями и термометр (4) для определения температуры жидкости. Скорость течения воды в трубе измеряется поплавковым ротаметром (8) и регулируется краном (9). Вода поступает в сливной бак, откуда насосом снова подается в напорный бак. Визуализация режима течения осуществляется введением в поток струйки чернила из бачка (5). Расход чернила регулируется краном (6).

## Порядок проведения работы

1. Включить насос. Открытием крана (9) установить небольшой расход жидкости в трубе.
2. Открыв кран подачи чернила (6) ввести окрашенную струю в поток жидкости. По поведению струи убедиться, что режим течения ламинарный.
3. Определить объемный расход жидкости с помощью расходомера (8). Для этого по шкале измерить высоту поднятия  $n$  поплавка в измерительной трубке ротаметра.
4. Постепенно увеличивая скорость течения жидкости в трубе открытием крана (9), заметить момент появления пульсаций в потоке по поведению струйки краски.
5. Расходомером (8) измерить расход жидкости, соответствующий переходу ламинарного режима в турбулентный.
6. Увеличив открытие крана (9), установить развитый турбулентный режим. Измерить расход.
7. Уменьшая открытие крана (9), определить момент перехода турбулентного режима течения в ламинарный.

## Обработка экспериментальных данных

1. По тарировочному графику определить расход воды  $Q$  (рис.5.3).
2. При известном расходе жидкости  $Q$  определить среднюю скорость ее течения  $V_{\text{cp}} = Q/S$  (где  $S$  – площадь поперечного сечения трубы диаметром  $d$ :  $S = \pi d^2/4$ ). Диаметр трубы  $d = 1,0 \cdot 10^{-2}$  м.
3. Вычислить число Рейнольдса  $Re = V_{\text{cp}} d/\nu$ . Кинематическая вязкость воды  $\nu = 1,007 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с (при температуре  $t = 20$  °С).
4. Данные измерений и вычислений занести в табл. 5.1.

Таблица 5.1

№№ п/п	Показания ротаметра $n$	Расход $Q$	Скорость $V_{\text{ср}}$	Число $Re$	Режим течения
	дел.	м <sup>3</sup> /с	м/с		
1					
2					
3					
4					

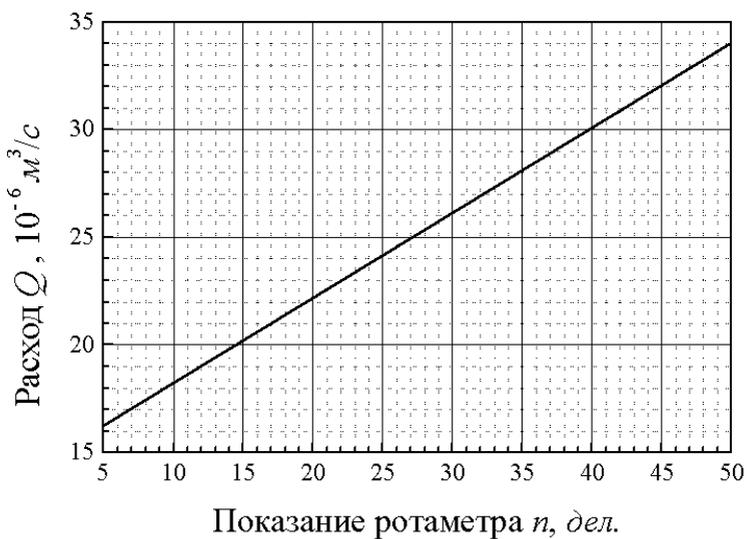


Рис. 5.3. Тарировочный график для определения расхода воды

## Лабораторная работа № 6. Уравнение Бернулли

**Цель работы** – изучение закона сохранения энергии при течении жидкостей и газов и экспериментальная проверка уравнения Бернулли в трубе переменного сечения.

### Общие сведения

Движение идеальных (невязких) жидкостей и газов описывается уравнениями Эйлера. При стационарном баротропном их движении в поле потенциальной массовой силы одним из интегралов (решений) уравнений Эйлера является интеграл Бернулли, выражающий собой постоянство трехчлена Бернулли во всем потоке жидкости, если течение потенциально, и вдоль линии тока, если течение вихревое.

Трехчлен Бернулли представляет собой сумму кинетической энергии единицы массы жидкости  $V^2/2$ , функции давления  $P$  и потенциала плотности массовой силы  $\Phi$ .

Функция давления  $P$  при баротропном движении определяется интегралом  $P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}$ . Баротропным движением называется дви-

жение, при котором плотность жидкости или газа может быть задана только функцией давления, т.е.  $\rho = \rho(p)$ . Примером баротропных движений являются изотермические и адиабатические движения.

Если жидкость несжимаема ( $\rho = \text{const}$ ), то  $P = p/\rho + \text{const}$ . Если массовой силой является сила тяжести ( $\vec{f} = \vec{g}$ ), то  $\Phi = gz + \text{const}$  ( $z$  – вертикальная координата). Поэтому для несжимаемой жидкости, движущейся в поле силы тяжести, *интеграл (или уравнение) Бернулли* имеет вид

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \quad (6.1)$$

В таком виде уравнение Бернулли выражает собой *закон сохранения энергии в жидкостях и газах*. При стационарном движении тяжелой идеальной несжимаемой жидкости *полная удельная энергия* (энергия единицы массы) жидкости  $E$ , представляющая собой сумму *удельной кинетической энергии*  $V^2/2$ , *удельной потенциальной энергии* в поле силы тяжести  $gz$  и *удельной энергии, связанной с работой сил давления*  $p/\rho$ , есть величина **постоянная**. Это **энергетическая интерпретация** уравнения Бернулли.

Для иллюстрации **геометрической интерпретации** уравнения перепишем его, разделив на  $g$

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = H = \text{const} \quad (6.2)$$

В этом случае все члены уравнения (6.2) имеют размерность длины и называются соответствующей им *высотой* или *напором*. В виде (6.2) *уравнение Бернулли выражает закон постоянства полного напора в жидкости*. При стационарном движении тяжелой идеальной несжимаемой жидкости **полный (или гидравлический) напор** (*высота*)  $H$  в жидкости, представляющий собой сумму **динамического напора** (*высоты*)  $V^2/2g$ , **пьезометрического напора** (*высоты*)  $p/\rho g$  и **геометрического напора** (*высоты*)  $z$ , есть величина постоянная. Отметим, что сумма  $p/\rho g + z$  называется **потенциальным напором**.

В реальной вязкой жидкости уравнение Бернулли в точной формулировке (6.1) или (6.2) не выполняется из-за того, что вследствие вязкого трения имеют место необратимые потери механической энергии, а значит и потери напора, связанные с переходом этой энергии в тепловую. Поэтому чем ниже по потоку лежит рассматриваемая точка на линии тока, тем меньше полная механическая энергия единицы массы жидкости  $E$  в ней. Разность этих энергий и напоров между двумя точками 1 и 2 на линии тока определяет *потери энергии* или *напора* между ними  $E_1 - E_2 = \Delta E$ ,  $H_1 - H_2 = \Delta H$ . Причем  $\Delta H = \Delta E/g$ . Соответственно определяются и потери давления между этими точками  $\Delta p = \rho g \Delta H = \rho \Delta E$ .

С учетом этого уравнение Бернулли для реальной жидкости записывается, например, в виде равенства полных напоров в жидкости в двух точках линии тока с учетом потерь напора между ними

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta H_{12} \quad (6.3)$$

В гидравлике применяется еще одно упрощающее предположение, заключающееся в том, что в данном живом сечении трубопровода, характеризующие поток жидкости величины считаются постоянными и равными некоторым средним значениям. Так средняя скорость в сечении трубы  $V_{\text{ср}}$  определяется по объемному расходу жидкости  $Q$  и площади сечения  $S$ :  $V_{\text{ср}} = Q/S$ . При определении удельной кинетической энергии потока  $V^2/2$  по среднему значению скорости  $V_{\text{ср}}$  вместо истинной, в уравнение Бернулли необходимо ввести поправочный коэффициент кинетической энергии  $\alpha$ , значение которого всегда больше единицы.

С учетом этого уравнение Бернулли записывается для двух разных сечений трубы в виде:

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta H_{12} \quad (6.4)$$

При турбулентном режиме течения значение  $\alpha$  близко к единице.

Линия, которая соединяет на графике точки полного напора  $H$  вдоль трубы, как изображено на рис.6.1 (линия  $E-E$ ), называется *напорной линией или линией энергии*. В идеальной жидкости это была бы горизонтальная прямая  $H = H_0 = \text{const}$ . В реальной жидкости она понижается вдоль трубы и ее уклон определяет собой потери напора. Падение напора, приходящееся на единицу длины вдоль потока, называется *гидравлическим уклоном*  $I_1$ :  $I_1 = \Delta H_{12}/l_{12}$ .

Линия  $P-P$ , соединяющая на графике точки потенциального напора  $(p/\rho g + z)$  вдоль трубы, называется *пьезометрической линией*. Падение или возрастание потенциального напора, приходящееся на единицу длины вдоль потока, называется *пьезометрическим уклоном*. Поскольку потенциальный напор может как увеличиваться

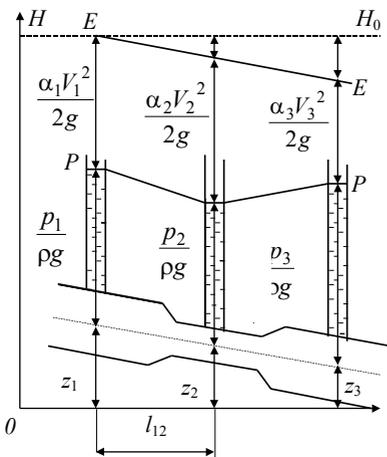


Рис. 6.1.

(Па)

так и уменьшаться вдоль потока, постольку пьезометрический уклон может быть как положительным, так и отрицательным.

Потери энергии  $\Delta E$ , напора  $\Delta H$  или давления  $\Delta p$  подразделяются на *потери на трение* при стабилизированном движении жидкости на длинных линейных участках труб  $\Delta p_{\text{тр}}$  и *потери на сравнительно коротких участках – местных сопротивлениях*  $\Delta p_{\text{м}}$ . В обоих случаях потери давления выражаются в долях кинетической энергии единицы объема жидкости  $\rho V^2/2$

$$\Delta p_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho V^2}{2} \qquad \Delta p_{\text{м}} = \zeta \frac{\rho V^2}{2} \qquad (6.5)$$

$\lambda$  – коэффициент гидравлического трения;  $l$  – длина участка трубы, на котором определяются потери давления;  $d$  – диаметр трубы;  $V_{\text{ср}}$  – средняя скорость потока;  $\zeta$  – коэффициент местного сопротивления. Числовые значения коэффициентов сопротивления  $\lambda$ ,  $\zeta$  для конкретных видов сопротивлений и условий течения имеются в соответствующих справочниках.

## Экспериментальная установка

Работа проводится на установке, подобной той, которая описана в работе №5, только вместо трубы постоянного диаметра установлена труба переменного сечения типа изображенной на рис.6.1. Пьезометрический напор в жидкости определяется по показаниям пьезометрических трубок, выведенных на общий щит и установленных в пяти разных сечениях трубы.

Геометрические характеристики трубы переменного сечения прилагаются к установке.

### Порядок выполнения работы

1. При неподвижной жидкости показания пьезометров одинаковы. Необходимо только проследить, чтобы в них не было пузырьков воздуха.

2. Включением насоса и открытием вентиля на выходе из трубы установить определенный режим течения, при котором наблюдается заметное различие в показаниях пьезометров.

3. Для определения расхода жидкости снять показания расходомера  $n$ .

4. Снять показания всех пьезометров. Поскольку для всех пьезометров принята общая горизонтальная плоскость отсчета 0-0, то их полные показания дают *потенциальный напор* ( $p/\rho g + z$ ). Данные измерений занести в таблицу 6.1.

Показание ротаметра  $n = \underline{\hspace{2cm}}$  (дел.),  $Q = \underline{\hspace{2cm}}$  м<sup>3</sup>/с,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,

Таблица 6.1

Сечение трубы	Диаметр сечения трубы	Площадь сечения трубы	Показания пьезометров (потенциаль- ный напор)	Сред- няя ско- рость	Динами- ческий напор $V^2/2g$ ,	Полный напор $H$ ,
	мм	мм <sup>2</sup>	мм	м/с	мм	мм
1						
...						
5						

## Обработка экспериментальных результатов

1. Определить расход воды при помощи тарировочного графика (рис. 6.2).

2. По измеренному расходу  $Q$  и известных диаметрах сечений трубы  $d$  вычислить средние скорости  $V = Q/S$  ( $S = \pi d^2/4$ ) в тех сечениях трубы, где установлены пьезометры.

2. Вычислить гидродинамический  $V^2/2g$  и полный  $H = V^2/2g + p/\rho g + z$  напоры в этих сечениях.

3. Построить напорную и пьезометрическую линии.

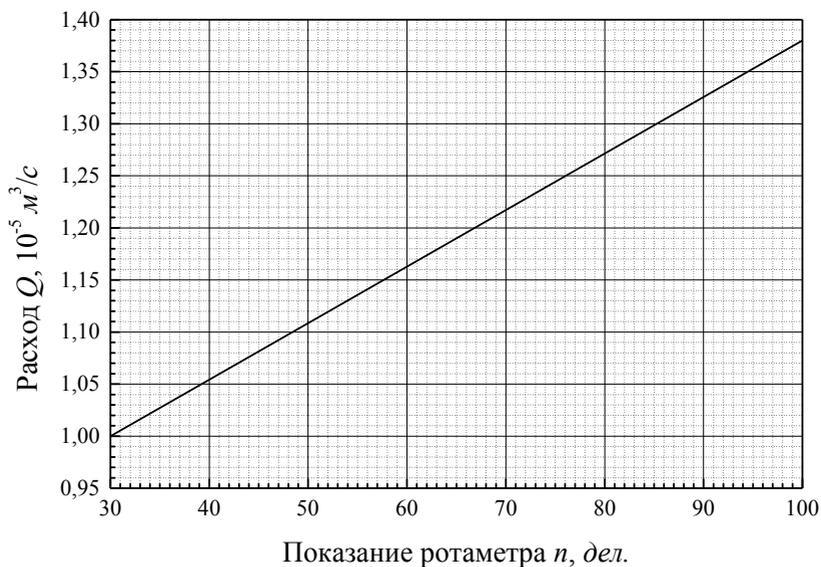


Рис. 6.2. Тарировочный график для определения расхода воды

## Лабораторная работа № 7. Сопротивление движению тел в жидкостях и газах

**Цель работы** – экспериментальное определение зависимости коэффициента лобового сопротивления шара от числа Рейнольдса.

### Общие сведения

Вопросы обтекания тел движущимися потоками жидкости или газа чрезвычайно широко поставлены в практической деятельности человека. Особенно большое значение решение этих вопросов имеет в связи с развитием авиации и мореплавания. В условиях обтекания находятся лопатки турбин и элементы многих других технических устройств.

На тело, находящееся в потоке жидкости или газа, всегда действует некоторая сила со стороны потока.

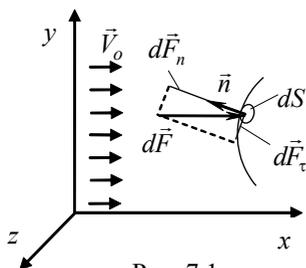


Рис. 7.1

Элементарная сила  $d\vec{F}$ , с которой жидкость действует на участок  $dS$  поверхности обтекаемого тела (рис. 7.1), может быть разложена на нормальную  $d\vec{F}_n$  и касательную  $d\vec{F}_\tau$  к поверхности, составляющие  $(d\vec{F} = d\vec{F}_n + d\vec{F}_\tau)$ , каждая из которых определяется нормальным  $p$  и касательными  $\vec{\tau}$  напряжениями в рассматриваемой точке. Эти составляющие сил определяются выражениями

$$d\vec{F}_n = -p\vec{n}dS, \quad d\vec{F}_\tau = \vec{\tau}dS.$$

Нормальные напряжения представляют собой давление в жидкости  $p$ , а касательные обусловлены силами вязкого трения.

Главный вектор  $\vec{F}$  сил гидродинамического воздействия потока на тело представляет собой результирующую всех сил  $d\vec{F}$  на поверхности тела и выражается их суммой (интегралом)

$$\vec{F} = \int_S d\vec{F} = \int_S d\vec{F}_n + \int_S d\vec{F}_\tau = \vec{F}_n + \vec{F}_\tau.$$

Проекция силы гидродинамического сопротивления  $\vec{F}$  на направление скорости потока на бесконечности  $\vec{V}_0$  (или на направление движения тела) называется *силой лобового сопротивления*  $F_x = F_{nx} + F_{\tau x}$ . Одна часть этой силы  $F_{nx}$  обусловлена нормальным напряжением (давлением) и называется *силой сопротивления давления*. Вторая составляющая силы  $F_{\tau x}$  называется *силой сопротивления трения*, и обусловлена касательным напряжением (вязким трением). Таким образом, сила лобового сопротивления складывается из *силы сопротивления давления и силы сопротивления трения*.

Действие всех этих сил на единицу площади миделева сечения  $\omega$  тела выражается в единицах кинетической энергии единицы объема набегающего потока жидкости  $\rho V_0^2 / 2$ , то есть

$$F_x = c_x \omega \frac{\rho V_0^2}{2} \quad F_{nx} = c_p \omega \frac{\rho V_0^2}{2} \quad F_{\tau x} = c_f \omega \frac{\rho V_0^2}{2}.$$

*Миделево сечение* представляет собой сечение тела плоскостью, перпендикулярной скорости набегающего потока, в том месте, где это сечение имеет наибольшую площадь.

Безразмерный коэффициент  $c_x$  называется *коэффициентом лобового сопротивления* и является коэффициентом пропорциональности между силой лобового сопротивления на единицу миделева сечения и кинетической энергией единицы объема потока жидкости. Он складывается из *коэффициента сопротивления давления*  $c_p$  и *коэффициента сопротивления трения*  $c_f$ :

$$c_x = c_p + c_f.$$

Коэффициент лобового сопротивления зависит в общем случае от числа Рейнольдса  $Re = V_0 l / \nu$  (где  $l$  – характерный размер тела,  $\nu$  – ки-

нематический коэффициент вязкости жидкости или газа). Эта зависимость  $c_x(Re)$  называется *законом сопротивления*.

Как показывает опыт, сила сопротивления давления в значительной степени зависит от формы тела и его ориентации в потоке. Если при обтекании тела большую часть силы лобового сопротивления составляет сила сопротивления давления ( $c_p > c_f$ ), то такое тело называется плохо – или неудобнообтекаемым. Примерами таких тел могут служить шар, цилиндр или пластина при их поперечном обтекании.

Хорошо – или удобнообтекаемыми телами называются такие, для которых сила сопротивления давления мала и большую часть лобового сопротивления составляет сопротивление трения ( $c_p < c_f$ ). К ним относятся пластина при продольном обтекании, крыло самолета, сигарообразные тела.

Основной причиной возникновения сил сопротивления давления является образование вихревых зон за кормой обтекаемого тела вследствие отрыва от поверхности тела пограничного слоя. Эта ситуация изображена на рис. 7.2 и имеет место только в связи с наличием вязкости у жидкости. В идеальной (невязкой) жидкости картина обтекания имела бы симметричный вид, и тело в этом случае не испытывало бы никаких сил сопротивления (в этом заключается так называемый *парадокс Даламбера*).

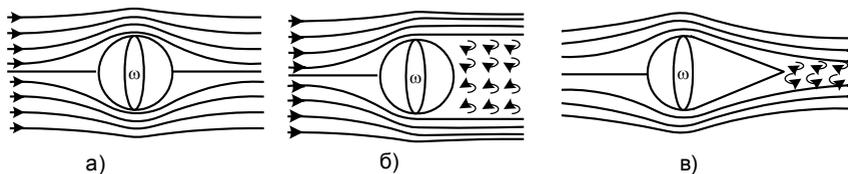


Рис. 7.2.

Вихревая зона представляет собой зону пониженного давления по сравнению с лобовой частью. Эта разность давлений вызывает действующую на тело силу, направленную вдоль потока (или против движения тела), которая и называется силой сопротивления давления. Придание телу хорошо обтекаемой формы заключается в таком изменении его формы (при той же площади миделева сечения  $\omega$ ), при которой обтекание его является безотрывным и ширина вихре-

вой зоны будет минимальной. Эта цель, например, достигается приданием телу сигарообразной формы. Примерно такую форму имеют фюзеляжи самолетов. Хорошо обтекаемую форму имеет крыло самолета.

### А) Определение закона сопротивления при движении шара в жидкости

Закон сопротивления шара  $c_x(Re)$  определяется при его равномерном падении в жидкости под действием силы тяжести. Скорость его движения в такой ситуации называется скоростью витания шара  $V_0$ . При равномерном движении шара равнодействующая всех сил, действующих на него, равна нулю. К этим силам относятся:

- 1) вес шара  $F_g = \rho_T g v = \rho_T g \pi d^3 / 6$  ( $\rho_T$  – плотность материала шара,  $v = \pi d^3 / 6$  – объем шара,  $d$  – его диаметр);
- 2) выталкивающая (архимедова) сила  $F_A = \rho_{ж} g v = \rho_{ж} g \pi d^3 / 6$  ( $\rho_{ж}$  – плотность жидкости);
- 3) сила лобового сопротивления  $F_x = c_x \omega \rho_{ж} V_0^2 / 2$ , где  $\omega = \pi d^2 / 4$  – площадь миделева сечения шара).

Равенство нулю равнодействующей этих сил дает  $F_g - F_A - F_x = 0$ , откуда для коэффициента лобового сопротивления следует формула

$$c_x = \frac{4}{3} \frac{gd}{V_0^2} \frac{\rho_T - \rho_{ж}}{\rho_{ж}} \quad (7.1)$$

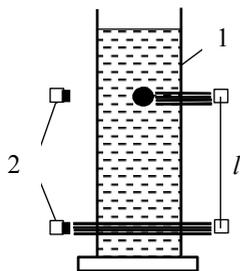


Рис. 7.3.

### Экспериментальная установка

Основным элементом установки является вертикальный цилиндрический сосуд 1, заполненный жидкостью (рис. 7.3). Скорость падения шариков определяется с помощью двух пар фотоэлементов 2 и источников света, расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга. При прерывании светового потока верхний фотоэлемент включает счетчик времени, а нижний выключает, фиксируя

тем самым промежуток времени прохождения шариком расстояния  $l$ .

К установке прилагается набор шариков, их характеристики даны в таблице 7.1.

### Порядок выполнения работы

1. Опуская поочередно шарики в сосуд, определить время  $t$  прохождения ими расстояния  $l$  между фотоэлементами. Результаты записать в таблицу 7.2.

2. Измерить расстояние  $l$  между фотоэлементами.

Таблица 7.1 Характеристики шариков

№ шара	Диаметр, м	Масса, кг
1	0,0352	0,02411
2	0,0352	0,02730
3	0,0324	0,02152
4	0,0352	0,02949
5	0,0352	0,03252
6	0,0327	0,02861
7	0,0352	0,03858

1. Вычислить для каждого шара его плотность  $\rho = m/v = m/(\pi d^3/6)$ .

2. Вычислить скорость витания шаров  $V_0 = l/t$ .

3. По формуле (7.1) вычислить коэффициент лобового сопротивления каждого шара и соответствующее ему число Рейнольдса  $Re = V_0 d / \nu$ . Жидкая среда – силиконовое масло ПМС-400. Коэффициент кинематической вязкости  $\nu = 380 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , плотность –  $973 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

4. Построить график зависимости  $c_x(Re)$ .

5. Проанализировать полученные результаты.

Таблица 7.2

№ шара	Диаметр шара, м	Масса шара, кг	Плотность шара, кг/м <sup>3</sup>	$t$ , с	$V_0$ , м/с	$Re$	$c_x$
1							
...							
6							

## Б) Определение закона сопротивления при обтекании шара воздушным потоком

### Экспериментальная установка

Работа выполняется на аэродинамической трубе (рис. 7.4). Шар помещается в рабочую область трубы. При включении вентилятора шар обтекается потоком воздуха со скоростью  $V_0$ . Скорость потока воздуха измеряется трубкой Пито-Прандтля и микроманометром (на рисунке не показаны).

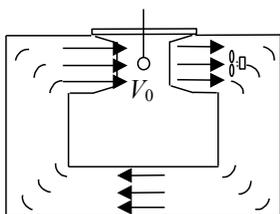


Рис. 7.4.

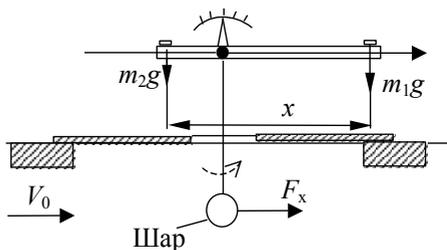


Рис. 7.5.

Для измерения силы лобового сопротивления шар закреплен на рычажных весах (рис. 7.5). Действие этой силы уравновешивается путем перемещения правого груза  $m_1$ . Тогда измерение силы сводится к измерению координаты  $x$  центра правого груза.

## Порядок выполнения работы

1. Установить уровень в микроманометре в нулевое положение с помощью регулятора уровня и уровнемеров. Определить начальное показание микроманометра  $l_0$ . Результат занести в табл. 7.3.
2. Установить в равновесное положение весы с закрепленным в них шаром.
3. Включить аэродинамическую трубу, установив определенное значение скорости воздушного потока в рабочем зазоре.
4. Измерить значение скорости потока с помощью трубки Пито-Прандтля, установленной в рабочем зазоре трубы. Для этого снять показание  $l$  микроманометра. Данные записать в табл. 7.3.
5. Установить в равновесное (нулевое) положение весы при данной скорости потока. Измерить координату центра правого груза  $x$ .
6. Повторить измерения при различных скоростях потока воздуха.

Таблица 7.3

№ п/п	l <sub>0</sub>	l	V <sub>0</sub>	x	F <sub>x</sub>	c <sub>x</sub>	Re
	мм	мм	м/с	мм	Н		
1							
...							
6							

## Обработка экспериментальных данных

1. Вычислить скорость потока воздуха  $V_0$  по формуле

$$V_0 = \sqrt{2g \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{в}}} K(l - l_0)}, \quad (7.2)$$

где  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность спирта в микроманометре ( $\rho_{\text{ж}} = 809 \text{ кг/м}^3$ );

$\rho_{\text{в}}$  – плотность воздуха ( $\rho_{\text{в}} = 1,2 \text{ кг/м}^3$ );

$l - l_0$  – разность показаний микроманометра, м;

$K$  – синус угла наклона трубки микроманометра,  $K = 0,2$ .

2. Вычислить для шара значение числа  $Re = V_0 d / \nu$ . Коэффициент кинематической вязкости воздуха  $\nu = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , диаметр шара  $d = 50 \text{ мм}$ .

3. Силу лобового сопротивления для шара определить по тарифовочному графику (рис. 7.6).

4. Вычислить коэффициент лобового сопротивления  $c_x = F_x / (\omega \rho_v V_0^2 / 2)$ , где  $\omega = \pi d^2 / 4$  – площадь миделева сечения.

5. Построить зависимость  $c_x = c_x(Re)$ .

6. Провести анализ полученных результатов.

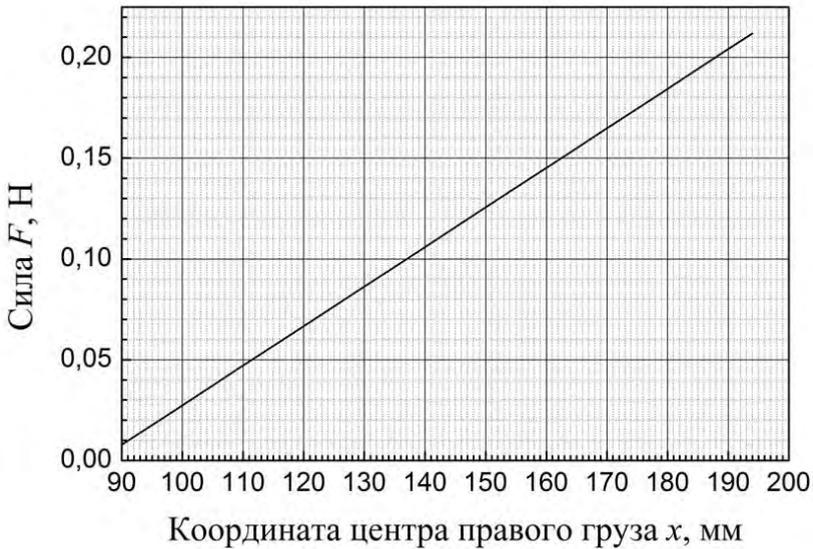


Рис. 7.6. Тарифовочный график для определения силы

## Лабораторная работа № 8. Зависимость лобового сопротивления от формы тела и его ориентации в потоке

**Цель работы** - определение наиболее удобообтекаемой формы и ориентации тела, находящегося в потоке воздуха.

Теоретический материал к работе тот же, что и к работе № 7.

### Экспериментальная установка

Работа выполняется на аэродинамической трубе (рис. 8.1). В рабочей области трубы поток воздуха со скоростью  $V_0$  создается вентилятором 1. Скорость потока воздуха определяется с помощью трубки Пито-Прандтля 2 и микроманометра 3. В рабочую область трубы помещаются тела различной формы 4. Эти тела укреплены на измерительной системе - рычажных весах 5 для измерения силы лобового сопротивления. Измерение силы лобового сопротивления производится путем ее уравновешивания правым грузом 6 и измерения координаты  $x_l$  этого груза. Для исследования предлагаются тела различной формы, но с одинаковым миделевым сечением: шар (а), диск (б), пластина (в), сигарообразные тела (г-д), крыло (е).

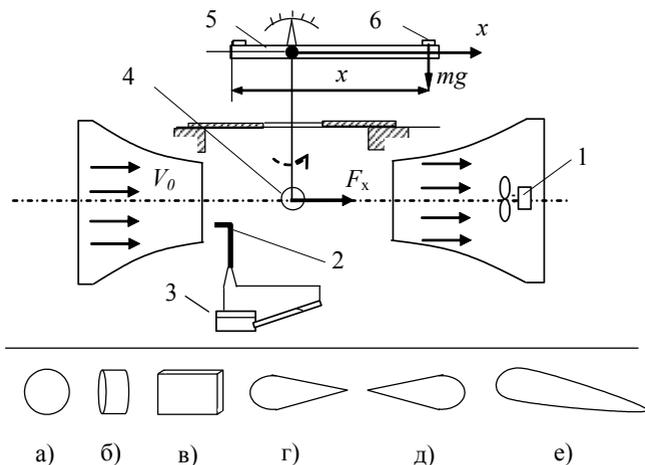


Рис. 8.1.

## Порядок выполнения работы

1. Установить уровень в микроманометре в нулевое положение с помощью регулятора уровня и уровнемеров. Определить начальное показание микроманометра  $l_0$ . Данные записать в табл. 8.1.

2. Закрепить исследуемое тело на измерительной системе.

3. Включить аэродинамическую трубу, установив определенное значение скорости воздушного потока в рабочем зазоре.

4. Измерить значение скорости потока с помощью трубки Пито-Прандтля, установленной в рабочем зазоре трубы. Для этого необходимо снять показание  $l$  микроманометра.

5. Привести в равновесное (нулевое) положение весы при установленной скорости потока. Измерить координату  $x$  центра правого груза.

6. Закрепить на измерительной системе тело другой формы. Повторить указанные измерения в соответствии с пп. 4 - 5.

7. Закрепить на измерительной системе пластину. Установить угол атаки  $\alpha$ , равный нулю. Угол атаки – угол между плоскостью пластины и направлением скорости потока воздуха. Измерить силу лобового сопротивления в соответствии с пп. 4 - 5. Данные измерений записать в табл. 8.2.

8. Установить углы атаки пластины в соответствии с табл. 8.2. Выполнить измерения силы лобового сопротивления.

9. Закрепить на измерительной системе крыло. Выполнить измерения силы лобового сопротивления при различных углах атаки. Данные измерений записать в табл. 8.2.

1. Вычислить скорость потока воздуха  $V_0$  по формуле 7.2.

2. Определить силу лобового сопротивления для исследуемых тел при помощи тарировочного графика (рис. 7.6).

3. Вычислить коэффициент лобового сопротивления  $c_x = F_x / (\omega \rho V_0^2 / 2)$ , где  $\omega$  – площадь миделева сечения.

Площади миделева сечения исследуемых тел:

Шар –  $\omega = 19,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,

диск –  $\omega = 12,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,

сигара –  $\omega = 12,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,

пластина –  $\omega = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ , (при продольном обтекании),  
 крыло самолета –  $\omega = 12,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  (при продольном обтекании).

4. Определить наиболее удобообтекаемое тело.

5. Для пластины и крыла самолета построить график зависимости  $F_x = f(\alpha)$ .

6. Сравнить коэффициенты сопротивления и силы лобового сопротивления тел различной формы. Провести анализ результатов.

Таблица 8.1

Исследуемое тело	$l_0$	$l$	$V_0$	$x$	$F_x$	$c_x$
	мм	мм	м/с	мм	Н	
Шар						
Диск						
Сигара 						
Сигара 						

Таблица 8.2

Исследуемое тело	$\alpha$	$l_0$	$l$	$V_0$	$x$	$F_x$
	град.	мм	мм	м/с	мм	Н
Пластина	0					
	4					
	8					
	12					
	16					
Крыло	0					
	4					
	8					
	12					
	16					

## Лабораторная работа № 9. Подъемная сила в потоке газа

**Цель работы** – определение условий возникновения подъемной силы в потоке воздуха и установление ее зависимости от угла атаки для плоской пластины и крыла самолета.

### Общие сведения

Кроме силы лобового сопротивления при определенных условиях на тела, находящиеся в потоке газа, действует еще и так называемая подъемная сила. Она представляет собой составляющую полной силы гидродинамического воздействия  $\vec{F}$ , которая перпендикулярна скорости набегающего потока (см. теорию к работе № 7).

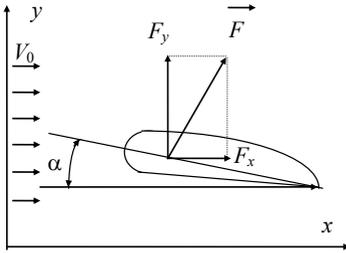


Рис. 9.1.

На рис. 9.1 показаны силы, действующие на крыло самолета в потоке при некотором угле атаки  $\alpha$ . Угол атаки  $\alpha$  – это угол между хордой крыла и направлением скорости набегающего потока. Подъемная сила  $F_y$  также как и сила лобового сопротивления, определяется на единицу площади миделева сечения  $\omega$  и вычисляется в единицах кинетической энергии набега-

ющего потока  $\rho V_0^2 / 2$ :

$$F_y = c_y \omega \frac{\rho V_0^2}{2}.$$

Коэффициент  $c_y$  называется коэффициентом подъемной силы.

От крыла самолета требуется большая подъемная сила при малом лобовом сопротивлении. Крыло тем лучше будет удовлетворять этому требованию, чем больше величина  $K = c_y / c_x$ , которая называется качеством крыла.

Подъемная сила возникает при несимметричном (относительно направления потока) обтекании тел. Эта несимметричность может

создаваться за счет определенной ориентации тела в потоке (например, пластина под углом к скорости потока), а также за счет несимметричного профиля тела (например, крыло самолета). Оба эти фактора могут присутствовать и одновременно (например, то же крыло самолета при разных углах атаки).

Механизм возникновения подъемной силы связан со специфическими особенностями обтекания тел потоком газа, а именно с образованием и отрывом вихрей на их задней кромке. Важным моментом является то, что образование вихрей обусловлено вязкостью газа. В идеальном газе вихреобразование отсутствовало бы, и подъемная сила не возникала бы. Рассмотрим этот механизм на примере обтекания крыла самолета, как изображено на рис.9.2.

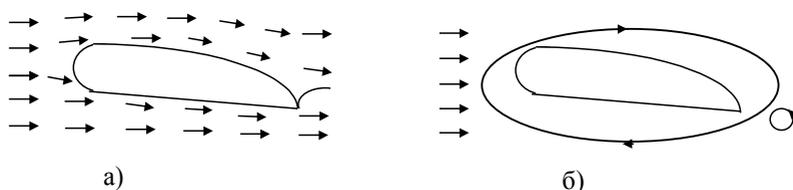


Рис. 9.2.

Частицы воздуха, обтекающие крыло снизу, поднимаются мимо задней его кромки вверх (рис. 9.2а). При этом под действием сил вязкости движение частиц воздуха в пограничном слое становится завихренным. Так как частицы воздуха испытывают торможение со стороны кромки крыла, то они приобретают вращение против часовой стрелки. У кромки образуются вихри с вращением против часовой стрелки, которые срываются и уносятся потоком. Каждый из этих вихрей обладает определенным моментом импульса (количество движения). Поскольку в неподвижном воздухе общий момент импульса системы "крыло - окружающая среда" равен нулю, то в силу закона сохранения момента импульса, он таковым и должен сохраняться. Для этого "в противовес" образующимся вихрям вокруг крыла должен существовать, так называемый "присоединенный вихрь" или циркуляция воздуха с вращением по часовой стрелке (рис. 9.2б). Эта циркуляция, накладываясь на основной поток, приводит к тому, что скорость воздуха над крылом оказывается больше,

чем под крылом. В соответствии с уравнением Бернулли (см. работу № 6) давление под крылом оказывается больше, чем над ним. Эта разность давлений и представляет собой подъемную силу на единицу площади поверхности крыла.

Другое элементарное объяснение возникновения подъемной силы крыла самолета может быть дано следующим образом. Если представить, что поток воздуха (рис. 9.2а) расходится в передней критической точке А и смыкается в задней В, то при этом частицы воздуха над крылом должны пройти больший путь, чем под ним. Значит, над крылом они должны иметь большую скорость, чем под ним. Соответственно давление над крылом меньше, чем под ним.

### **Экспериментальная установка**

Измерение подъемной силы крыла самолета и плоской пластины производится в аэродинамической трубе (схема и методика измерений описаны в работах № 7 и 8).

### **Порядок проведения работы**

1. Включить аэродинамическую трубу, установив в ней постоянное значение скорости  $V_0$  воздушного потока.
2. Внося в рабочий зазор трубы исследуемые профили, измерить действующую на них силу лобового сопротивления  $F_x$  и подъемную силу  $F_y$  при указанных в таблице 9.1 углах атаки. Для этого необходимо уравновесить эти силы правым грузом измерительной системы и измерить координату  $x$  правого груза.
3. Данные измерений и вычислений занести в табл. 9.1.

### **Обработка экспериментальных результатов**

1. Вычислить скорость потока воздуха  $V_0$  по формуле 7.2.
2. Сила лобового сопротивления  $F_x$  и подъемная сила  $F_y$  определяются по тарировочному графику на рис. 7.6.

Таблица 9.1.

№ пп	Угол атаки	Лобовое сопротивление			Подъемная сила			Качество крыла
		$l_0 =$ мм	$V_0 =$ м/с		$l_0 =$ мм	$V_0 =$ м/с		
	$\alpha$	$x$	$F_x$	$c_x$	$x$	$F_y$	$c_y$	$K = c_y/c_x$
	град	мм	Н	-	мм	Н	-	-
Пластина								
1	0							
2	4							
3	8							
4	12							
5	16							
Крыло								
1	0							
2	4							
3	8							
4	12							
5	16							

3. Вычислить коэффициент лобового сопротивления и коэффициент подъемной силы

$$c_x = \frac{F_x}{\rho_v V_0^2 \cdot S} \qquad c_y = \frac{F_y}{\rho_v V_0^2 \cdot S}$$

Пластина –  $S = 0,56 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ ,      крыло –  $S = 0,47 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ .

4. Вычислить качество пластины и крыла  $K = c_y/c_x$

5. Построить зависимости  $c_x$ ,  $c_y$  и качества крыла  $K$  от угла атаки.

6. Определить критический угол атаки  $\alpha_{кр}$ , при котором подъемная сила начинает падать.

7. Проанализировать зависимость качества крыла  $K$  от угла атаки  $K = f(\alpha)$ .

## Лабораторная работа №10. Определение потерь напора и коэффициентов сопротивления на участках сложного трубопровода

**Цель работы:** экспериментальное определение потерь напора и коэффициентов сопротивления при транспортировании жидкости по сложному трубопроводу.

### Общие сведения

Для перемещения жидкостей и газов по трубопроводу необходимо затрачивать некоторую энергию. Эта энергия зависит не только от физических свойств текучей среды, но и от характеристик трубопроводной системы. Для того, чтобы сократить потери энергии на транспортирование жидкостей и газов, а также уметь выбрать оптимальную геометрию трубопроводной системы, необходимо изучить основные закономерности течения жидкостей и газов по трубопроводам.

Поток жидкости либо газа характеризуется *объемным расходом*  $Q$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) либо *массовым расходом*  $M$  ( $\text{кг}/\text{с}$ ) и средней по сечению трубы *скоростью*  $V$  ( $\text{м}/\text{с}$ ). Расход является одной из основных характеристик потоков жидкости либо газа.

*Расходом* называется количество жидкости или газа, которое перемещается через поперечное сечение трубопровода в единицу времени.

Объемный и массовый расходы связаны между собой соотношением  $M = \rho Q$ . Объемный расход определяется через скорость выражением  $Q = VS$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения трубы ( $\text{м}^2$ ).

При движении реальных жидкостей и газов часть механической энергии движения необратимо превращается в тепловую. Эта часть энергии называется *потерей энергии*  $\Delta E$ . Потери энергии обусловлены существованием сил вязкого трения в жидкостях и газах, т.е. вязкости. С потерями энергии связаны *потери давления*  $\Delta p_{\text{пот}} = \rho \Delta E$  и *потери напора*

$$\Delta h_{\text{пот}} = \frac{\Delta p_{\text{пот}}}{\rho g} = \frac{\Delta E}{g},$$

где  $\rho$  – плотность жидкости либо газа;  $g$  – ускорение свободного падения. Потери давления  $\Delta p_{\text{пот}}$  измеряются в Паскалях, потери напора  $\Delta h_{\text{пот}}$  – в метрах.

Существование сил вязкости приводит к затратам энергии на перемещение текучих сред. Для перемещения текучей среды по трубопроводу с расходом  $Q$  необходима затрата мощности

$$N = \Delta p_{\text{пот}} Q, \text{ Вт.} \quad (10.1)$$

Гидравлические потери давления (напора) обычно делят на два вида. Первый вид представляет собой потери давления на трение  $\Delta p_{\text{тр}}$  при стабилизированном движении жидкости в длинных трубах. Эти потери равномерно распределяются по всей длине трубы. Потери второго вида  $\Delta p_{\text{м}}$  сосредоточены на сравнительно коротких участках трубопроводов и вызваны местными изменениями конфигурации канала. Эти сопротивления называются местными. Примерами местных сопротивлений могут служить участки резкого расширения и сужения трубопровода, места слияния и разделения потоков, различного рода трубопроводная аппаратура (вентили, клапаны, задвижки, дроссели и т.п.). Характерной особенностью движения жидкости через местные сопротивления является образование вихрей в потоке, что вызывает значительные потери энергии (давления, напора).

Таким образом, полные потери давления и напора определяются выражениями:

$$\Delta p_{\text{пот}} = \Delta p_{\text{тр}} + \Delta p_{\text{м}}; \quad (10.2)$$

$$\Delta h_{\text{пот}} = \Delta h_{\text{тр}} + \Delta h_{\text{м}}.$$

Потери давления (напора) по длине для случая установившегося движения жидкости по трубопроводу круглого сечения определяются по формуле Дарси-Вейсбаха:

$$\Delta p_{\text{тр}} = \lambda \frac{l \rho V^2}{d} \quad \Delta h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l V^2}{d 2g}, \quad (10.3)$$

где  $\lambda$  – коэффициент гидравлического трения (коэффициент потерь напора по длине);  $l$  – длина рассматриваемого участка трубы,  $d$  – диаметр трубопровода;  $V$  – средняя скорость движения жидкости.

Из формулы видно, что величина потерь напора по длине возрастает с увеличением скорости потока, длины трубы и уменьшается с увеличением диаметра трубопровода.

Если трубопровод некруглого сечения, в формулу (10.3) подставляется гидравлический диаметр  $d_{\text{г}} = 4S/\Pi$ , где  $S$  – площадь сечения трубы,  $\Pi$  – ее периметр.

Местные потери определяются по формулам

$$\Delta p_{\text{м}} = \zeta \frac{\rho V^2}{2}, \quad \Delta h_{\text{м}} = \zeta \frac{V^2}{2g}, \quad (10.4)$$

где  $\zeta$  – коэффициент местного сопротивления.

Коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  зависит от режима течения жидкости и шероховатости трубы. Зависимость коэффициента гидравлического трения  $\lambda$  от числа  $Re$  называется законом сопротивления. При ламинарном режиме течения шероховатость стенок трубы не влияет на потери напора, и коэффициент гидравлического трения определяется по формуле

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64\nu}{Vd}, \quad (10.5)$$

Формулы (10.3) и (10.5) показывают, что при ламинарном движении потери на трение по длине трубы пропорциональны скорости в первой степени.

При турбулентном течении потери напора по длине зависят от шероховатости стенок трубы. Для развитого турбулентного течения характерен квадратичный закон сопротивления, при котором  $\Delta h_{\text{тр}} \sim V^2$ .

Коэффициент местного сопротивления  $\zeta$  также зависит от режима течения, вида и конструктивного исполнения местного сопротивления.

Сравнительный анализ различных гидравлических сопротивлений показывает, что потери напора значительно возрастают при резком изменении диаметра трубы, при резких поворотах и т.п.

Значения коэффициентов сопротивления, как правило, определяются опытным путем и в обобщенном виде содержатся в справочниках в виде эмпирических формул, таблиц, графиков.

**Основные методы снижения потерь энергии** при транспортировании жидкостей и газов по сложным трубопроводам: использование труб с гладкой внутренней поверхностью; обеспечение плавных поворотов потока; устройство более плавного изменения поперечного сечения потока жидкости; устройство плавных входов и выходов из труб; разогрев при перекачивании высоковязких жидкостей; введение полимерных добавок в поток жидкости.

### Экспериментальная установка

Схема установки приведена на рис.10.1. Вода из напорного бака 1 проходит последовательно через входной вентиль 2, магистральный трубопровод 3, участки трубопровода с резким 4 и плавным 5 поворотами, резким расширением 6 и резким сужением 7, диафрагму 8 и сливается в бак 10.

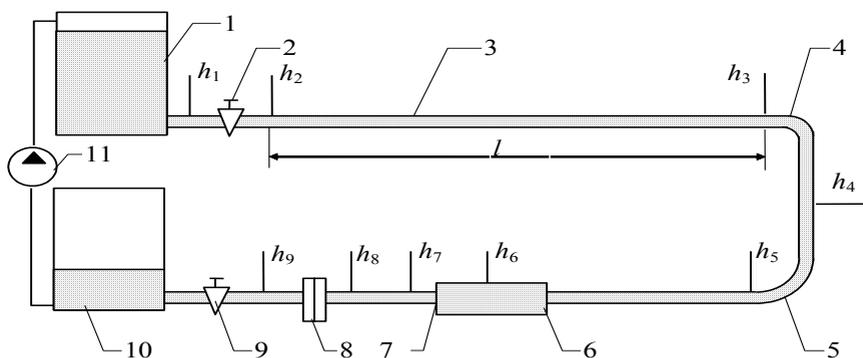


Рис. 10.1. Схема экспериментальной установки

Расход воды регулируется вентилем 9 и определяется по перепаду напора на диафрагме 8 с помощью тарировочного графика. Уровень в баке 1 поддерживается постоянным с помощью насоса 11.

Пьезометрический напор в жидкости на различных участках трубопровода определяется по показаниям пьезометрических трубок  $h_1$  -  $h_{10}$ , выведенных на общий щит и установленных на исследуемых участках трубопровода.

Длина магистрального участка трубопровода  $l = 1,7$  м; его диаметр  $d = 1,6 \cdot 10^{-2}$  м; плотность воды –  $1000 \text{ кг/м}^3$

### Порядок выполнения работы

1. Включить насос 11 и заполнить напорный бак 1.
2. Открыть вентиль 2 полностью и с помощью вентиля 9 установить заданное значение расхода воды. Величина расхода определяется по разности  $\Delta h_{9,10}$  показаний пьезометров  $h_9$  и  $h_{10}$  ( $\Delta h_{9,10} = h_9 - h_{10}$ ) и тарировочному графику на рис. 10.2.
3. При установленном значении расхода снять показания всех пьезометров, данные занести в табл. 10.1.
4. Уменьшить расход жидкости. Снять показания всех пьезометров, данные занести в табл. 10.1.

5. После выполнения работы закрыть вентили 2 и 9 и отключить насос.

Таблица 10.1

№ опыта	Показания пьезометров								
	$h_1$ , мм	$h_2$ , мм	$h_3$ , мм	$h_4$ , мм	$h_5$ , мм	$h_6$ , мм	$h_7$ , мм	$h_8$ , мм	$h_9$ , мм
1									
...									
8									

### Обработка экспериментальных данных

1. По перепаду напора на диафрагме  $\Delta h_{8,9} = h_8 - h_9$  с помощью тарировочной кривой на рис. 10.2 определить расход воды  $Q$  для всех 8-ми опытов. Данные занести в табл. 10.2.

2. Определить среднюю скорость воды в трубопроводе  $V=4Q/\pi d^2$ .

3. Для каждого значения скорости потока вычислить потери напора по длине  $\Delta h_{2,3} = h_2 - h_3$  и на отдельных участках трубопровода (местных сопротивлений) в соответствии с табл. 10.2.

4. Вычислить коэффициент гидравлического трения и коэффициенты местных сопротивлений по формулам

$$\lambda = \frac{2g\Delta h_{2,3}d}{lV^2} \qquad \xi = \frac{2g\Delta h_m}{V^2}$$

5. Построить график зависимости  $\lambda = f(Re)$ .

6. Провести сравнительный анализ потерь энергии на каждом из участков сложного трубопровода. Обратит внимание на влияние скорости течения на потери напора.

Таблица 10.2

№ опыта		1	2	3	4	5	6	7	8
Расход, $м^3/с$									
Средняя скорость, $м/с$									
Число $Re$									
Входной вентиль	$\Delta h_{M\ 1,2}, М$								
	$\xi_{1,2}$								
Магистральный трубопровод	$\Delta h_{2,3}, М$								
	$\lambda_{2,3}$								
Резкий поворот на $90^\circ$	$\Delta h_{M\ 3,4}, М$								
	$\xi_{3,4}$								
Плавный поворот на $90^\circ$	$\Delta h_{M4,5}, М$								
	$\xi_{4,5}$								
Резкое расширение	$\Delta h_{M\ 5,6}, М$								
	$\xi_{5,6}$								
Резкое сужение	$\Delta h_{M\ 6,7}, М$								
	$\xi_{6,7}$								
Диафрагма	$\Delta h_{M8,9}, М$								
	$\xi_{8,9}$								

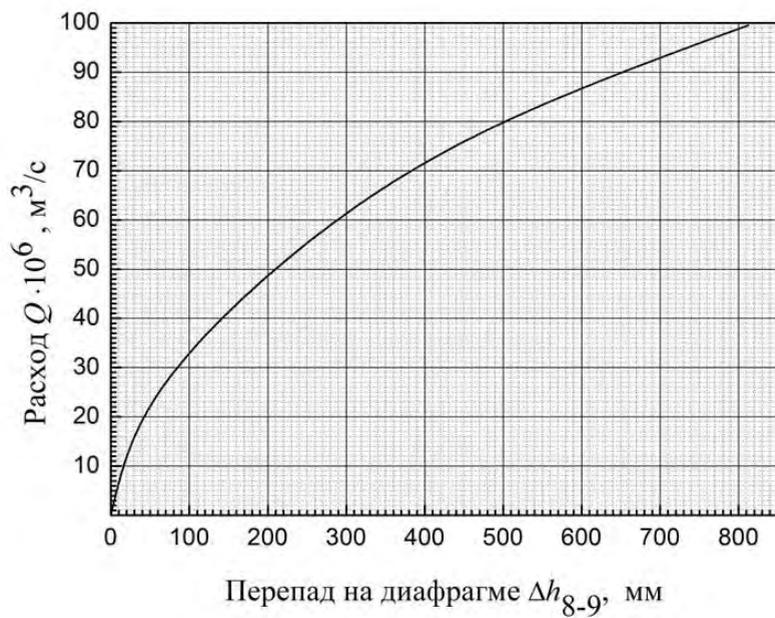


Рис. 10.2. Тарировочный график для определения расхода воды

# МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

## 1. Физические свойства жидкостей и газов

### *Плотность.*

Плотность  $\rho$  – физическая величина, определяемая для однородных веществ как отношение массы  $m$  вещества к занимаемому им объему  $V$ :  $\rho = m/V$ .

Плотность неоднородных веществ определяется в каждой точке пространства, занятого веществом, как предел отношения массы к объему, когда объем стягивается к данной точке

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta m / \Delta V .$$

Неоднородность плотности жидкости или газа может быть обусловлена неоднородным распределением в них температуры, давления либо разного рода примесей и растворенных веществ.

Единица измерения плотности –  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Величина, обратная плотности, называется удельным объемом  $V_{\text{уд}} = 1/\rho$  и измеряется в  $\text{м}^3/\text{кг}$ .

Удельный вес  $\gamma$  определяет вес единицы объема жидкости. Для однородной среды  $\gamma = G/V$ , где  $G$  – вес объема жидкости  $V$ . Единица измерения удельного веса  $\gamma$  –  $\text{Н}/\text{м}^3$ . Поскольку  $G = mg$ , то плотность и удельный вес связаны между собой соотношением  $\gamma = \rho g$ .

Плотность жидкостей и газов зависит от давления и температуры и определяется из уравнения состояния вида  $\rho = \rho(T, p)$ . Для газов наиболее распространенным уравнением состояния является уравнение Клапейрона-Менделеева. С ростом температуры плотность жидкостей уменьшается (кроме воды в диапазоне температур от 0 до 4 °С), а с ростом давления – увеличивается. Зависимость плотности жидкостей от температуры характеризуется коэффициентом теплового расширения  $\beta_T$ , а от давления – коэффициентом объемного сжатия  $\beta_p$ . Сжимаемость жидкостей очень незначительна, и чаще всего

не учитывается. В этом случае жидкости называются несжимаемыми.

#### *Поверхностное натяжение.*

Вследствие поверхностного натяжения на искривленной свободной поверхности жидкости существует капиллярный скачок давления, определяемый формулой Лапласа

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны поверхности.

Например, главные радиусы кривизны сферы равны ее радиусу  $R$  и капиллярный скачок давления –  $\Delta p = (2\sigma/R)$ .

Для цилиндрической поверхности жидкости радиуса  $R$ :  $R_1 = R$ ,  $R_2 = \infty$ , а скачок давления –  $\Delta p = (\sigma/R)$ .

Коэффициент поверхностного натяжения воды при 20°C равен 0,073 Н/м.

#### *Вязкость жидкостей и газов.*

Вязкость жидкостей (внутреннее трение) – свойство жидкостей оказывать сопротивление относительному перемещению ее слоев и возникает между слоями жидкости, движущимися с разными скоростями. Наличие внутреннего трения приводит к переходу части кинетической энергии потока в тепловую, то есть к потере или диссипации механической энергии.

Вязкость характеризуется динамическим коэффициентом вязкости  $\eta$ , имеющим размерность Па·с = кг/м·с, и кинематическим коэффициентом вязкости  $\nu = \eta/\rho$ , который имеет размерность м<sup>2</sup>/с.

С ростом температуры вязкость жидкостей убывает, а газов – растет.

В табл. 2 и табл. 3 Приложения 2 приведены значения коэффициентов вязкости трансформаторного масла, воды и воздуха при различных температурах. Значения коэффициента вязкости различных жидкостей приведены в табл. 4.

Сила внутреннего трения  $F_{тр}$ , отнесенная к единице поверхности трения  $S$ , называется касательным напряжением  $\tau$  вязкого трения.

Касательное напряжение вязкого трения определяется законом вязкого трения Ньютона и пропорционально изменению скорости  $dv$  на единицу расстояния  $dn$  между движущимися слоями жидкости или газа:

$$\tau = \eta \frac{dv}{dn}.$$

Некоторые свойства жидкостей приведены в таблицах Приложения 1.

### *Задачи*

1.1. Определить вес 0,5 л воды ( $\rho_{\text{воды}} = 1000 \text{ кг/м}^3$ ) и 0,5 л ртути, ( $\rho_{\text{ртуть}} = 13600 \text{ кг/м}^3$ ).

Ответ:  $G_{\text{воды}} = 4,9 \text{ Н}$ ;  $G_{\text{ртуть}} = 66,6 \text{ Н}$ .

1.2. Определить плотность дизельного мазута, если пикнометр объемом  $V_0 = 200 \text{ см}^3$ , заполненный мазутом, имеет массу  $m = 230,52 \text{ г}$  при собственной массе пустого пикнометра  $m_0 = 60,81 \text{ г}$ .

Ответ:  $\rho = 848,5 \text{ кг/м}^3$ .

1.3. Масса  $1 \text{ м}^3$  метана при определенных условиях составляет 0,7 кг. Определить плотность и удельный объем  $V_{\text{уд}}$  метана при этих условиях.

Ответ:  $\rho = 0,7 \text{ кг/м}^3$ ,  $V_{\text{уд}} = 1,429 \text{ м}^3/\text{кг}$ .

1.4. Определить удельный объем воздуха, если его плотность равна  $1,293 \text{ кг/м}^3$ .

Ответ:  $V_{\text{уд}} = 0,773 \text{ м}^3/\text{кг}$ .

1.5. Определить плотность дымовых газов, покидающих печь при температуре  $800^\circ\text{С}$ , если их плотность при  $0^\circ\text{С}$  и атмосферном давлении равна  $1,3 \text{ кг/м}^3$ .

Ответ:  $\rho = 0,33 \text{ кг/м}^3$ .

1.6. В вертикальном цилиндрическом резервуаре диаметром 4 м хранится 100 т нефти с плотностью  $850 \text{ кг/м}^3$  при  $0^\circ\text{C}$ . Определить изменение уровня  $\Delta h$  нефти в резервуаре при изменении температуры до  $30^\circ\text{C}$ . Коэффициент теплового расширения нефти  $-7,2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ . Расширение резервуара не учитывать.

Ответ:  $\Delta h = 0,202 \text{ м}$ .

1.7. В отопительный котел поступает  $50 \text{ м}^3/\text{час}$  воды при температуре  $70^\circ\text{C}$ . Какой объем в час воды будет выходить из котла, если нагрев производится до  $90^\circ\text{C}$ , а коэффициент температурного расширения воды  $6,4 \cdot 10^{-4} \text{ 1/K}$ .

Ответ:  $Q_V = 50,64 \text{ м}^3/\text{час}$ .

1.8. Поршневой компрессор всасывает атмосферный воздух при давлении  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$  и температуре  $T_0 = 17^\circ\text{C}$  с производительностью  $Q_0 = 5 \text{ м}^3/\text{мин}$  и нагнетает его в резервуар емкостью  $V_0 = 12 \text{ м}^3$ . Через сколько минут давление в резервуаре поднимется до  $p_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , если при сжатии температура воздуха повышается до  $T_1 = 87^\circ\text{C}$ .

Ответ:  $t = 9,2 \text{ мин}$ .

1.9. В полностью заполненном резервуаре содержится 10 тонн нефти при температуре  $10^\circ\text{C}$ . Какая масса жидкости вытечет из этого резервуара, если температура жидкости повысится до  $30^\circ\text{C}$ . (Температурным расширением резервуара пренебречь).

Ответ:  $m = 144 \text{ кг}$ .

1.10. В сосуд объемом 50 л под некоторым давлением закачено 50,5 л эфира. Определить, не учитывая деформацию сосуда, изменение давления в нем, если коэффициент объемного сжатия эфира при температуре  $20^\circ\text{C}$  равен  $\beta_p = 1,95 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{Н}$ .

Ответ: давление увеличилось на  $51,3 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

1.11. Закрытый герметично сосуд имеет объем 10 л и заполнен полностью водой. Определить, пренебрегая деформацией сосуда, изменение давления в нем при изменении температуры воды на  $40^\circ\text{C}$ . Коэффициент теплового расширения воды  $\beta_T = 0,00018 \text{ K}^{-1}$ , а коэффициент объемного сжатия  $\beta_p = 4,19 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ .

Ответ: давление увеличилось на  $1,72 \cdot 10^5$  Па.

1.12. В баллон объемом 300 л при давлении 100 стандартных атмосфер накачан воздух. Через несколько часов вследствие утечек через неплотности давление воздуха в баллоне упало до 90 стандартных атмосфер. Пренебрегая деформацией баллона, определить объем вытекшего воздуха, приведенный к атмосферному давлению, считая температуру постоянной.

Ответ:  $3 \text{ м}^3$

1.13. Определить величину капиллярного скачка давления на поверхности жидкости в вертикальных капиллярах:

(а) цилиндрическом с диаметром  $d = 2R$

(б) плоскопараллельном шириной  $d = 2R$ .

$$\text{Ответ: (а) } \Delta p = \frac{2\sigma}{R} = \frac{4\sigma}{d}; \quad \text{(б) } \Delta p = \frac{\sigma}{R} = \frac{2\sigma}{R}.$$

1.14. Определить высоту поднятия  $h$  воды в вертикальном круглом стеклянном капилляре диаметром 0,2 мм (рисунок 1.1). ( $\sigma_{\text{вод.}} = 0,073 \text{ Н/м}$ ).

Решение.

Давление в точках  $A$  и  $B$ :

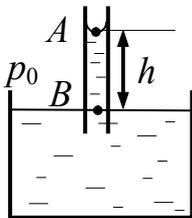


Рисунок 1.1

$$p_A = p_0 - \frac{2\sigma}{R},$$

$$p_B = p_A + \rho gh = p_0 - \frac{2\sigma}{R} + \rho gh.$$

$$\text{Поскольку } p_B = p_0, \text{ то } \Delta p = \frac{2\sigma}{R} = \rho gh.$$

$$\text{Отсюда } h = \frac{2\sigma}{\rho g R}.$$

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g d} = \frac{4 \cdot 0,073}{1000 \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} = 146 \text{ мм}.$$

Ответ:  $h = 146 \text{ мм}$ .

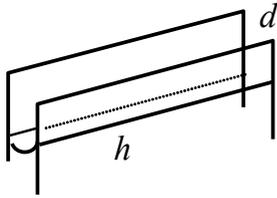


Рисунок 1.2

1.15. Определить высоту поднятия  $h$  воды в вертикальном плоскопараллельном стеклянном капилляре с шириной зазора в нем 0,2 мм (рисунок 1.2).

Ответ  $h = 0,073$  м.

1.16. Определить силу, сжимающую две плоскопараллельные прямоугольные стеклянные пластины площадью  $100 \text{ см}^2$ , зазор между которыми заполнен водой, а ширина его равна 10 микрон.

Ответ:  $F = 14,6$  Н.

1.17. Для определения коэффициента поверхностного натяжения воды методом отрыва капле была использована пипетка с диаметром выходного отверстия 2 мм. Масса 40 капле оказалась равной 1,9 г. Чему равно значение коэффициента поверхностного натяжения воды?

Ответ:  $\sigma = 74$  мН/м.

1.18. Определить высоту поднятия воды в вертикальном клиновидном стеклянном канале с шириной, которая изменяется по закону  $d = \varphi x$  ( $\varphi$  – угол расширения зазора) (рисунок 1.3).

Ответ:  $h = \frac{2\sigma}{\rho g \varphi x} = \frac{C}{x}$ .

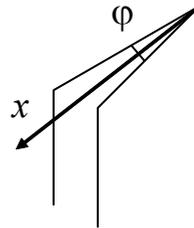


Рисунок 1.3

1.19. В капиллярной трубке радиусом 0,5 мм жидкость поднялась на 11 мм. Найти плотность данной жидкости, если ее коэффициент поверхностного натяжения 22 мН/м.

Ответ:  $\rho = 820 \text{ кг/м}^3$ .

1.20. Найти массу воды, поднявшейся по капиллярной трубке диаметром 0,5 мм.

Ответ:  $m = 12$  мг.

1.21. Определить вязкость воды, если при измерениях ротационным вискозиметром с размерами внутреннего неподвижного цилиндра  $d = 2$  см,  $h = 5$  см. Закручивающий момент сил  $M = 4 \cdot 10^{-5}$  Н·м при скорости вращения внешнего цилиндра  $n = 10$  об/с и ширине зазора между цилиндрами  $\delta = 0,5$  мм.

Решение.

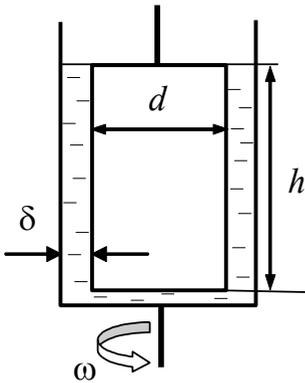


Рисунок 1.4

Момент силы  $M = F \cdot R$ .

Закон вязкого трения

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\delta},$$

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\delta} \cdot S.$$

$$F = \frac{M}{R} = \eta \frac{\Delta v}{\delta} \cdot 2\pi R \cdot h.$$

Линейная скорость вращения

$$v = 2\pi n R = 6,28 \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 0,63 \text{ м/с}.$$

Разность скоростей

$$\Delta v = v = 0,63 \text{ м/с}.$$

Тогда коэффициенты вязкости

$$\eta = \frac{M\delta}{2\pi\Delta v R^2 h} = \frac{4 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{6,28 \cdot 0,63 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

Ответ:  $\eta = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$

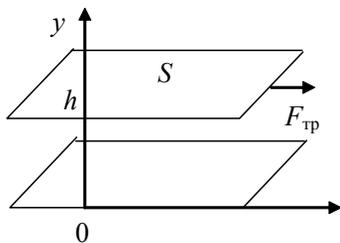


Рисунок 1.5

1.22. Как изменится сила трения в плоскопараллельном смазочном слое, если в качестве смазки вместо машинного масла использовать глицерин (рисунок 1.5)?

Ответ:  $F_{\text{гл}}/F_{\text{м}} = 12$ .

## 2. Статика

В жидкостях и газах действуют массовые (объемные) и поверхностные силы.

Массовые силы действуют на каждую частицу жидкости. Такими силами являются сила тяжести, сила инерции и т.п.

Поверхностные силы действуют на поверхностях выделенных объемов жидкости. К таким силам относятся силы давления, действующие перпендикулярно к поверхности, силы трения, которые направлены по касательной к поверхности.

На любую площадку, выделенную в неподвижной или движущейся как целое жидкости, действует сила давления. Рассчитанная на единицу площади эта сила называется напряжением сил давления или просто давлением  $p$ . Физическая природа сил давления определяется тепловым движением молекул жидкости и их соударениями с рассматриваемыми площадками, находящимися в жидкости.

В соответствии с *законом Паскаля* величина давления в данной точке не зависит от ориентации площадки и является только функцией точки:  $p = p(x, y, z)$ .

В системе СИ давление измеряется в Паскалях:  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ .

В зависимости от выбора начала отсчета давление бывает абсолютным, атмосферным, избыточным и вакуумметрическим (рисунок 2.1).

Если давление измерено относи-

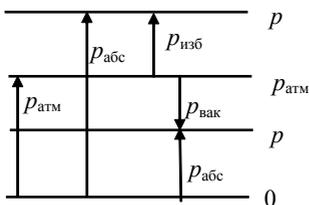


Рисунок 2.1

тельно нуля, то оно называется абсолютным давлением  $p_{\text{абс}}$ . В технике часто выбирают за начало отсчета атмосферное давление. Тогда давление определенное относительно атмосферного давления называется избыточным давлением  $p_{\text{изб}} = p - p_{\text{атм}}$ .

Если абсолютное давление меньше атмосферного, то их разность называется вакуумметрическим давлением  $p_{\text{вак}} = p_{\text{атм}} - p$ .

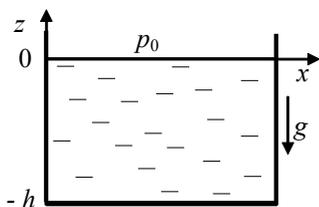


Рисунок 2.2

В однородной жидкости, находящейся в поле силы тяжести (рисунок 2.2) распределение давления описывается выражением

$$p = p_0 - \rho g z,$$

где  $p_0$  – давление на поверхности жидкости,  $\rho$  – плотность жидкости,  $z$  – координата погружения данной точки.

Давление в жидкости на глубине  $h$ :  $p = p_0 + \rho g h$ .

Поверхностями постоянного давления являются горизонтальные плоскости.

На тела, погруженные в жидкость, действует сила давления.

В декартовой системе координат проекции силы давления на оси координат определяются выражениями

$$F_x = p_{\text{ц.и.}} \cdot S_x, \quad F_y = p_{\text{ц.и.}} \cdot S_y, \quad F_z = p_{\text{ц.и.}} \cdot S_z,$$

где  $p_{\text{ц.и.}}$  – давление, приложенное в точках центра инерции проекций  $S_x, S_y, S_z$  рассматриваемой поверхности давления на плоскости, перпендикулярные соответствующим осям координат.

Вертикальная составляющая силы давления может быть определена также как  $F_z = \rho g V$ , где  $V$  – объем жидкости, находящийся над поверхностью давления.

Сила, действующая на погруженное в жидкость твердое тело, определяется как равнодействующая сил давления, действующих на его поверхности. Горизонтальные составляющие силы давления, действующие на боковые поверхности тела, уравнивают друг друга. Вертикальная составляющая силы, действующая на нижнюю поверхность, всегда больше силы, действующей сверху. Поэтому равнодействующая сил давления направлена снизу вверх и равна

весу жидкости, вытесненному этим телом:  $F_A = \rho_{ж} g V$ . Сила  $F_A$  называется силой Архимеда.

В жидкости помимо силы Архимеда на тело действует еще направленная вниз сила тяжести. Условия плавания тела в жидкости определяются соотношением этих сил, т.е. соотношением плотностей тела и жидкости.

### Задачи

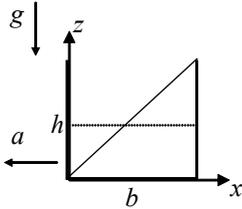


Рисунок 2.3

2.1. Жидкость движется в кубическом сосуде  $10 \times 10 \times 10$  см равноускоренно с ускорением  $a$  в направлении одной из боковых сторон сосуда. В покоящемся состоянии жидкость заполняет сосуд наполовину его объема. При каком ускорении жидкость начнет переливаться через край сосуда?

Решение.

Распределение давления

$$p = p_0 + \rho a x - \rho g z,$$

откуда уравнение свободной поверхности  $z = \frac{a}{g} x$ .

Объем неподвижной жидкости  $V_0 = b^2 h = b^3 / 2$ .

Объем жидкости при ее движении  $V_1 = x b b / 2 = b^2 x / 2$

Условие постоянства объема  $V_0 = V_1$ . Тогда  $b^3 / 2 = b^2 x / 2$ .

$x = b$ ,  $z = b$ . Подставляем в уравнение поверхности:  $b = \frac{a}{g} b$ .

Ответ:  $a = g$ .

2.2. Определить давление на поверхность батискафа, погруженного в море на глубину 2 км.

Ответ:  $p = 20,1 \cdot 10^6$  Па.

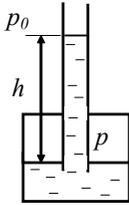


Рисунок 2.4

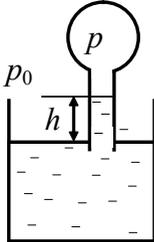


Рисунок 2.5

2.3. Определить абсолютное и избыточное давление  $p$  в сосуде, заполненном водой (рисунок 2.4). Высота поднятия воды в трубке  $h = 200$  мм.

Ответ:  $p_{\text{абс.}} = 101,96$  кПа,  $p_{\text{изб.}} = 1,96$  кПа.

2.4. Открытый сосуд заполнен ртутью (рисунок 2.5). Определить абсолютное и избыточное давление внутри колбы  $p$ , если высота поднятия ртути  $h = 30$  мм.

Ответ:  $p_{\text{абс.}} = 93,34$  кПа,  $p_{\text{вак.}} = 6,66$  кПа.

2.5. Определить разность уровней  $h$  в вертикальном U-образном ртутном манометре (рисунок 2.6), один конец которого сообщается с атмосферой, а второй подсоединен к сосуду с давлением газа в нем  $p = 2 \cdot 10^5$  Па.

Ответ:  $h = 0,735$  мм.

2.6. Два открытых сообщающихся сосуда в виде U-образной трубки заполнены ртутью (рисунок 2.7). Затем в один из них доливается вода, образуя над поверхностью ртути в этом сосуде водяной столб высотой  $h_1 = 27$  см. Определить разность уровней ртути  $h_2$  в сосудах.

Ответ:  $h_2 = 0,02$  м.

2.7. Определить разность уровней ртути  $h_{\text{рт}}$  в U-образной трубке, заполненной трехслойной системой жидкостей (рисунок 2.8), если  $h_{\text{в}} = 60$  см, а  $h_{\text{м}} = 8$  см,  $\rho_{\text{м}} = 900$  кг/м<sup>3</sup>.

Ответ:  $h_{\text{рт}} = 39$  мм.

2.8. По показанию U-образного ртутного манометра определить избыточное давление  $p$  в сосуде (рисунок 2.9), если разность уровней ртути  $h = 150$  мм.

Ответ:  $p_{\text{изб}} = 20,4$  кПа.

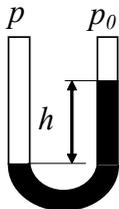


Рисунок 2.6

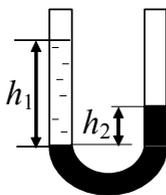


Рисунок 2.7

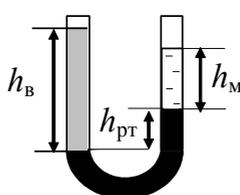


Рисунок 2.8

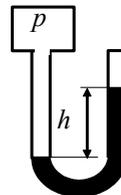


Рисунок 2.9

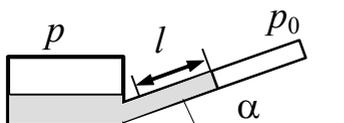


Рисунок 2.10

2.9. Микроманометр представляет собой два сообщающихся сосуда. Один из них – широкая чашка, другой – трубка, наклоненная под углом  $\alpha$  к горизонтальному уровню (рисунок 2.10). Измерение давления сводится к измерению длины  $l$  столбика спирта в трубке относительно уровня спирта в широкой чашке.

Определить величину избыточного давления, если  $l = 180$  мм, а  $\alpha = 45^\circ$ .

Ответ:  $p_{\text{изб}} = 918,6$  Па

2.10. Разрежение в газоходе парового котла измеряется микроманометром (рисунок 2.11). Угол наклона измерительной трубки  $\alpha = 30^\circ$ . Длина столбика воды, отсчитанная по шкале  $l = 160$  мм. Определить абсолютное давление газов, если атмосферное давление  $p_0 = 740$  мм рт. ст.

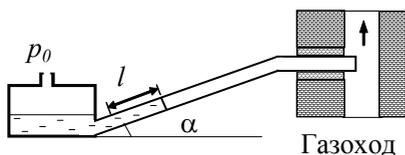


Рисунок 2.11

Угол наклона измерительной трубки  $\alpha = 30^\circ$ . Длина столбика воды, отсчитанная по шкале  $l = 160$  мм. Определить абсолютное давление газов, если атмосферное давление  $p_0 = 740$  мм рт. ст.

Ответ: 97,9 кПа.

2.11. Давление в газогенераторе изменилось на  $1,7 \cdot 10^{-2}$  атмосферы. Как изменилась разность уровней воды в U-образном манометре, присоединенном к генератору?

Ответ:  $\Delta h = 0,176$  м.

2.12. В цилиндрический сосуд налита ртуть и вода в равных по массе количествах. Общая высота двух слоев жидкостей равна 29,2 см. Определить давление жидкостей на дно сосуда. Плотность ртути  $13600 \text{ кг/м}^3$ , плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

Ответ:  $p = 5,3 \text{ кПа}$ .

2.13. Под каким давлением должна давать воду насосная станция небоскреба, расположенная в подвале здания, чтобы давление воды в водопроводе на высоте верхнего этажа было не менее  $1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Высота верхнего этажа по отношению станции 200 м.

Ответ:  $p = 21,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

2.14. В сообщающихся сосудах находится ртуть. Диаметр правого сосуда в четыре раза больше диаметра левого сосуда. В левый сосуд наливают столб воды высотой 70 см. Насколько поднимется уровень ртути в правом сосуде и насколько опустится в левом? Насколько поднимется уровень ртути в узком сосуде, если такой же высоты столб воды налить в широкий сосуд?

Ответ:  $\Delta h = 30 \text{ мм}$ ; 48 мм.

2.15. В печи дымовые газы имеют в среднем температуру  $300^\circ\text{C}$  и плотность  $0,44 \text{ кг/м}^3$ . Температура наружного воздуха  $14^\circ\text{C}$  и давление 760 мм. рт. ст. Определить при высоте дымовой трубы 5 м разность напоров по обе стороны печной дверки, если она закрыта. Определить разность напоров в миллиметрах водяного столба

Ответ:  $\Delta h = 4 \text{ мм вод. столба}$ .

2.16. Полый объект П-образного сечения расположен на дне реки на глубине 20 м от поверхности. Как велико должно быть давление сжатого воздуха внутри объекта, для того чтобы вода не просачивалась через поверхность соприкосновения объекта и речного дна?

Ответ:  $p = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

2.17. Для измерения высоты полета воздушных шаров применяется барометр. Перед вылетом он показывал барометрическое давление 745 мм рт.ст., а в наивысшей точке подъема 500 мм рт.ст. Считая

температуру воздуха по высоте постоянной ( $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), определить высоту подъема воздушного шара.

Ответ:  $h = 3,3\text{ км}$ .

2.18. Определить давление атмосферного воздуха на высоте  $10\text{ км}$  над уровнем моря. Изменение температуры воздуха: от  $15\text{ }^{\circ}\text{C}$  на уровне моря с падением на  $6,5$  градусов на каждые  $1000\text{ м}$  высоты. Давление на уровне моря  $760\text{ мм рт.ст.}$

Ответ:  $p = 198,1\text{ мм рт.ст.} = 26,4\text{ кПа}$ .

2.19. Сосуд прямоугольной формы объемом  $6\text{ м}^3$  полностью заполнен водой. Определить силу давления на боковые стенки и дно сосуда, если его длина и ширина соответственно равны  $3$  и  $2\text{ м}$ .

Ответ:  $F_{\text{дно}} = 58,8\text{ кН}$ ,  $F_{\text{бок}} = 9,8$  и  $14,8\text{ кН}$ .

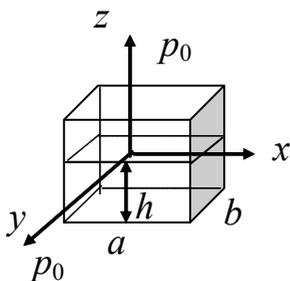


Рисунок 2.12

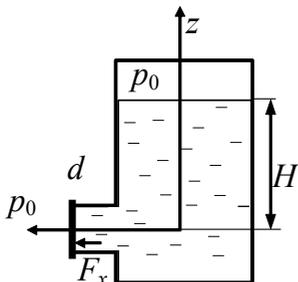


Рисунок 2.13

2.20. Жидкость заполняет прямоугольный сосуд с площадью основания  $a \times b$  (рисунок 2.12). Уровень жидкости в сосуде  $h$ . Определить силу давления на дно сосуда и боковые стенки, если  $a = 4\text{ м}$ ,  $b = 3\text{ м}$ ,  $h = 0,5\text{ м}$ .

Ответ:  $F_{\text{дно}} = \rho g h a b$ ,

$$F_{\text{бок},y} = \frac{1}{2} \rho g h^2 a = 3,6\text{ кН},$$

2.21. Определить усилие, открывающее крышку люка открытого нефтехранилища (рисунок 2.13), запирающую круглое отверстие диаметром  $d = 600\text{ мм}$ , расположенное на глубине  $H = 2,8\text{ м}$ . Плотность нефти равна  $890\text{ кг/м}^3$ .

Ответ:  $F_x = 6,9\text{ кН}$ .

2.22. Определить усилие, открывающее крышку люка закрытого нефтехранилища с избыточным давлением 400 мм рт.ст., запирающую круглое отверстие диаметром  $d = 600$  мм, расположенное на глубине  $H = 2,8$  м, если плотность нефти равна  $890 \text{ кг/м}^3$ .

Ответ:  $F_x = 21,98 \text{ кН}$ .

2.16. Полый объект П-образного сечения расположен на дне реки на глубине 20 м от поверхности. Как велико должно быть давление сжатого воздуха внутри объекта, для того чтобы вода не просачивалась через поверхность соприкосновения объекта и речного дна?

Ответ:  $p = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

2.17. Для измерения высоты полета воздушных шаров применяется барометр. Перед вылетом он показывал барометрическое давление 745 мм рт.ст., а в наивысшей точке подъема 500 мм рт.ст. Считая температуру воздуха по высоте постоянной ( $10^\circ\text{C}$ ), определить высоту подъема воздушного шара.

Ответ:  $h = 3,3 \text{ км}$ .

2.18. Определить давление атмосферного воздуха на высоте 10 км над уровнем моря. Изменение температуры воздуха: от  $15^\circ\text{C}$  на уровне моря с падением на  $6,5$  градусов на каждые 1000 м высоты. Давление на уровне моря 760 мм рт.ст.

Ответ:  $p = 198,1 \text{ мм рт.ст.} = 26,4 \text{ кПа}$ .

2.19. Сосуд прямоугольной формы объемом  $6 \text{ м}^3$  полностью заполнен водой. Определить силу давления на боковые стенки и дно сосуда, если его длина и ширина соответственно равны 3 и 2 м.

Ответ:  $F_{\text{дно}} = 58,8 \text{ кН}$ ,  $F_{\text{бок}} = 9,8$  и  $14,8 \text{ кН}$ .

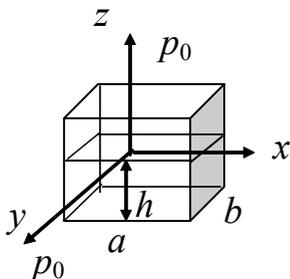


Рисунок 2.12

2.20. Жидкость заполняет прямоугольный сосуд с площадью основания  $a \times b$  (рисунок 2.12). Уровень жидкости в сосуде  $h$ . Определить силу давления на дно сосуда и боковые стенки, если  $a = 4 \text{ м}$ ,  $b = 3 \text{ м}$ ,  $h = 0,5 \text{ м}$ .

Ответ:  $F_{\text{дно}} = \rho g h a b$ ,

$$F_{\text{бок,у}} = \frac{1}{2} \rho g h^2 a = 3,6 \text{ кН},$$

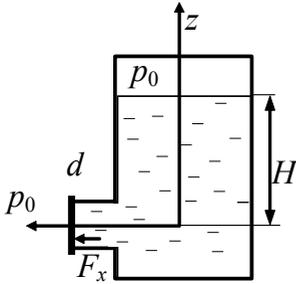


Рисунок 2.13

2.21. Определить усилие, открывающее крышку люка открытого нефтехранилища (рисунок 2.13), запирающую круглое отверстие диаметром  $d = 600$  мм, расположенное на глубине  $H = 2,8$  м. Плотность нефти равна  $890 \text{ кг/м}^3$ .

Ответ:  $F_x = 6,9 \text{ кН}$ .

2.22. Определить усилие, открывающее крышку люка закрытого нефтехранилища с избыточным давлением  $400 \text{ мм рт.ст.}$ , запирающую круглое отверстие диаметром  $d = 600$  мм, расположенное на глубине  $H = 2,8$  м, если плотность нефти равна  $890 \text{ кг/м}^3$ .

Ответ:  $F_x = 21,98 \text{ кН}$ .

2.23. В сосуде находится сжатый воздух. Давление в нем равно 4 давлениям окружающей атмосферы. Для удержания пробки, закрывающей круглое отверстие в сосуде, необходимо приложить силу  $91,2 \text{ Н}$ . Радиус отверстия  $1 \text{ см}$ . Определить атмосферное давление.

Ответ:  $96,8 \text{ кПа}$ .

2.24. В подводной части судна образовалось отверстие, площадь которого  $5 \text{ см}^2$ . Отверстие находится на  $3 \text{ м}$  ниже уровня воды. Какая минимальная сила требуется, чтобы удержать заплату, закрывающую отверстие с внутренней стороны судна?

Ответ:  $F_{\text{min}} = 14,7 \text{ Н}$ .

2.25. Открытый бак с размерами дна  $a = 2 \text{ м}$  и  $b = 2 \text{ м}$  заполнен водой на высоту  $1 \text{ м}$  (рисунок 2.14). Определить вертикальную  $F_z$  и горизонтальную  $F_x$  проекции сил давления на дно и на наклонные боковые стенки бака.

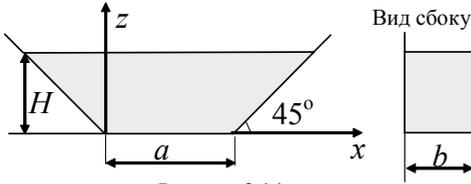


Рисунок 2.14

Ответ:  $F_z = 40$  кН,  $F_x = 10^4$  Н.

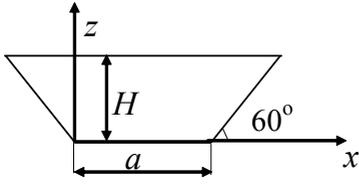


Рисунок 2.15

2.26. Открытый бак с размерами дна  $a = 2$  м и  $b = 1,2$  м заполнен водой с температурой  $80^{\circ}\text{C}$  на высоту  $H = 1,8$  м (рисунок 2.15). Определить полные силы давления на дно и боковые стенки бака. Плотность воды при  $80^{\circ}\text{C}$  –  $972$  кг/м<sup>3</sup>.

Ответ: На дно действует сила  $F_z = 42$  кН, Сила на боковые стенки:  $F_z = 21,8$  кН,

2.27. Резервуар для хранения жидкости имеет на глубине  $H = 2$  м цилиндрический затвор диаметром  $d = 10$  см длиной  $b = 16$  см (рисунок 2.16). Определить вертикальную и горизонтальную составляющие сил давления воды, действующих на затвор.

Ответ:  $F_z = 3,14$  Н,  $F_x = 320$  Н.

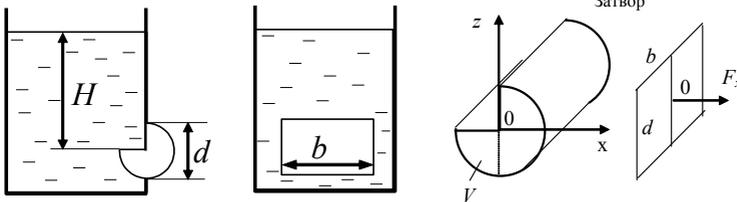


Рисунок 2.16

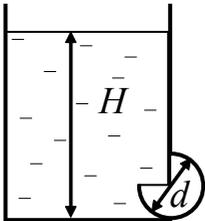


Рисунок 2.17

2.26. Определить направление и величину силы давления воды на криволинейную поверхность затвора, установленного в прямоугольном отверстии вертикальной стенки резервуара (рисунок 2.17). Даны: глубина резер-

вуара  $H = 3$  м, диаметр и ширина затвора  $d = 0,6$  м и  $b = 6$  м.

Ответ:  $F = 97,3$  кН,  $\alpha = 2,49^\circ$ .

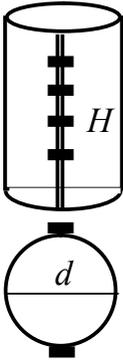


Рисунок 2.18

2.27. Цилиндрический резервуар диаметра  $d = 1$  м и высотой  $H = 2$  м состоит из двух полуцилиндрических частей, скрепленный между собой болтами (рисунок 2.18). Резервуар полностью заполнен водой. Определить силу давления, действующую на дно резервуара и силу, разрывающую болты, скрепляющие полуцилиндры.

Ответ:  $F_{\text{дно}} = 15,0$  кН,  $F_{\text{бок}} = 20,0$  кН.

2.28. По паропроводу диаметром  $d = 300$  мм и длиной 2 м к паровой турбине высокого давления подводится пар. Определить силу разрыва трубы паропровода (а продольном направлении), если избыточное давление в паропровode  $p = 90 \cdot 10^5$  Па.

Ответ:  $F = 5400$  кН.

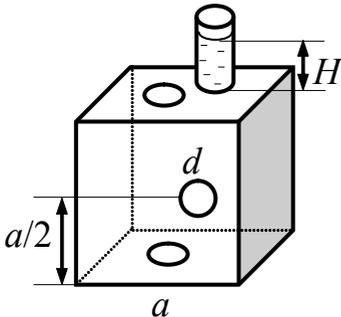


Рисунок 2.19

2.29. Кубический резервуар для хранения жидкостей с длиной сторон  $a$  соединяется с атмосферой через вертикальную трубку, укрепленную на его верхней стенке (рисунок 2.19). На верхней стенке, на дне и на середине (по высоте) одной из боковых сторон имеются круглые отверстия диаметра  $d = 2$  см, закрытые крышками. Резервуар заполнен водой так, что уровень ее в соединительной трубе относительно

верхней стенки равен  $H = 1$  м. Определить величины сил, открывающих эти крышки.

Ответ:  $F_{\text{дно}} = 914$  Н,  $F_{\text{бок}} = 628$  Н,  $F_{\text{верхн}} = 314$  Н.

2.30. Определить силу, выдавливающую стекло иллюминатора ( $d = 30$  см) самолета, летящего на высоте 10 км.

Ответ:  $F = 4,5$  кН.

2.31. Вода, находящаяся под давлением  $p = 2,5$  ати, заполняет резервуар через трубу диаметром  $d = 15$  мм (рисунок 2.20). Определить минимально необходимый диаметр шарообразного поплавка  $D_{\text{попл}}$ , обеспечивающий автоматическое закрытие клапана при наполнении резервуара, если  $a = 100$  мм,  $b = 500$  мм. Собственным весом рычага, клапана и поплавка пренебречь.

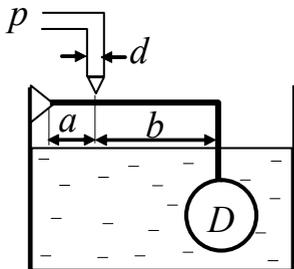


Рисунок 2.20

Примечание. Давление  $p = 2,5$  ати соответствует избыточному давлению, измеренному в атмосферах относительно атмосферного давления.

Ответ:  $D_{\text{попл}} = 0,11$  м.

2.32. Определить минимальную длину  $l$  стороны кубического полого металлического сосуда массой 1 кг, при которой он не будет тонуть в воде.

Ответ:  $l = 0,1$  м.

2.33. Определить минимальный радиус  $R$  полого сферического металлического сосуда массой 1 кг, при которой он не будет тонуть в воде.

Ответ:  $R = 0,062$  м.

2.34. Определить минимальную  $l$  длину цилиндрического полого металлического сосуда массой 1 кг и диаметром 4 см, при которой он не будет тонуть в воде.

Ответ:  $l = 0,796$  м.

2.35. Определить максимально возможную толщину листа  $\delta$ , в который надо раскатать железный кубик со стороной  $a$ , чтобы из этого листа сделать кубический сосуд со стороной  $b$ , не тонущий в воде.

Ответ:  $\delta = \frac{a^3}{6b^2} = \frac{a^3}{6 \cdot 4 \cdot a^2} = \frac{a}{24}$ .

2.36. Сколько бревен  $N$  диаметром  $d = 300$  мм и длиной  $l = 10$  м необходимо для сооружения плота, способного удержать груз массой 2,1 т. Плотность дерева  $800 \text{ кг/м}^3$ .

Ответ:  $N = 15$  бревен.

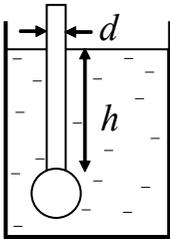


Рисунок 2.21

2.37. Ареометр массой  $m_a = 40$  г состоит из шарика объемом  $V_{ш} = 15 \text{ см}^3$  и трубки с внешним диаметром  $d = 25$  мм (рисунок 2.21). Определить глубину  $h$ , на которую погрузится трубка ареометра в воду и в керосин ( $\rho = 760 \text{ кг/м}^3$ ).

Ответ:  $h_b = 0,05$  м,  $h_k = 0,07$  м.

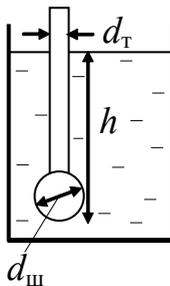


Рисунок 2.22

2.38. Ареометр весом 108 г имеет диаметр трубки  $d_t = 20$  мм и диаметр шарика  $d_{ш} = 30$  мм. Определить плотность жидкости, если глубина погружения ареометра составляет  $h = 200$  мм (рисунок 2.22).

Ответ:  $\rho = 1600 \text{ кг/м}^3$ .

2.39. Вес тела, погруженного в жидкость с плотностью  $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$ , равен  $G_1 = 5$  Н. При погружении этого тела в жидкость

с другой плотностью  $\rho_2 = 1260 \text{ кг/м}^3$  его вес становится равным  $G_2 = 4 \text{ Н}$ . Определить плотность тела  $\rho$ .

$$\text{Ответ: } \rho = \frac{G_2 \rho_1 - G_1 \rho_2}{G_2 - G_1} = 2300 \text{ кг/м}^3.$$

2.40. Тело массой  $m = 1 \text{ кг}$ , погруженное в бензин, весит  $9,4 \text{ Н}$ . При погружении этого тела в другую жидкость его вес равен  $9,0 \text{ Н}$ . Определить плотность жидкости. Плотность бензина  $700 \text{ кг/м}^3$ .

$$\text{Ответ: } \rho_2 = \frac{(mg - G_2) \rho_1}{mg - G_1} = 1400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

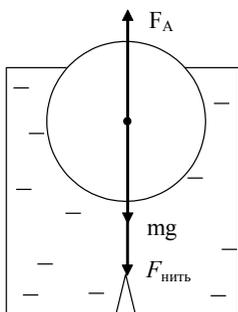


Рисунок 2.23

2.41. Поплавок, имеющий массу  $m = 1,0 \text{ кг}$ , натягивает нить, закрепленную на дне водоема (рисунок 2.23). 90% объема поплавка погружено в воду. Определить силу натяжения нити  $F_{\text{нить}}$ , если плотность материала поплавка в 4 раза меньше плотности воды.

$$\text{Ответ: } F_{\text{нить}} = 25,5 \text{ Н}.$$

2.42. Пловец лежит неподвижно на воде лицом вверх, причем в воду погружено все тело, за исключением небольшой части лица. Найти объем тела пловца  $V$ , если масса пловца  $75 \text{ кг}$ .

Ответ:  $V \approx 75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$  при предположении, что плотность тела человека близка плотности воды.

2.43. Оболочка воздушного шара имеет объем  $100 \text{ м}^3$  и наполнена водородом. Вес оболочки вместе с водородом  $500 \text{ Н}$ . Определить подъемную силу шара и плотность слоя воздуха, в котором шар будет находиться в равновесии. Плотность воздуха у поверхности земли  $1,29 \text{ кг/м}^3$ .

$$\text{Ответ: } F = 780 \text{ Н}, \rho = 0,5 \text{ кг/м}^3.$$

2.44. Человек поднимает железный шар массой 30 кг. Какой массы шар он поднимет, находясь под водой? Принять плотность железа  $8000 \text{ кг/м}^3$ .

Ответ:  $m = 34,286 \text{ кг}$ .

2.45. На одной чашке весов лежит кусок серебра массой 105 г, на другой – стекло массой 130 г. Какая чашка перетянет при погружении весов в воду? Плотность серебра  $10,5 \text{ г/см}^3$ , стекла –  $2,6 \text{ г/см}^3$ .

Ответ: Перетянет чашка с серебром.

2.46. В сосуд налита вода и сверх нее – бензин плотностью  $700 \text{ кг/м}^3$ . Определить какая часть объема поплавка будет находиться в воде и в бензине при плавании его в данной двухслойной жидкости?

Ответ:  $2/3$  в бензине,  $1/3$  в воде.

2.47. Стальной трубопровод с внешним диаметром  $D$  и толщиной стенки 10 мм опущен в воду при прокладке через реку. При каком значении  $D$  подъемная сила будет равна весу трубы? Плотность стали  $7800 \text{ кг/м}^3$ . Задачу решить для единицы длины трубы равной 1 м.

Ответ:  $D = 312 \text{ мм}$ .

2.48. Металлический шарик медленно опускается в жидкой ванне без вращения с постоянной скоростью при заданной температуре жидкой ванны. Даны: диаметр шарика 4 мм, плотность материала шарика –  $1860 \text{ кг/м}^3$ , ванна заполнена водой при температуре 330 К. Определить скорость, с которой опускается шарик.

Ответ:  $v = \frac{(\rho_{ш} - \rho_{ж})gV_{ш}}{6\pi\eta R}$ .

### 3. Одномерные течения жидкостей и газов.

*Характеристики потока жидкостей и газов.*

В трубопроводах течение жидкостей и газов характеризуется средней по сечению скоростью потока  $v$ , определяемой отношением

объемного расхода жидкости  $Q_V$  к площади поперечного сечения трубы  $S$ :

$$v = Q_V/S.$$

Объемный расход определяется объемом жидкости, прошедшим через поперечное сечение трубы в единицу времени, и измеряется в  $\text{м}^3/\text{с}$ . Поток жидкости может также характеризоваться массовым расходом  $Q_m$ , который определяется массой жидкости, прошедшей через поперечное сечение трубы в единицу времени, и измеряется в  $\text{кг}/\text{с}$ . Массовый расход равен объемному, умноженному на плотность жидкости:

$$Q_m = \rho Q_V.$$

Расход может быть определен через среднюю по сечению скорость:

$$\text{объемный расход} - Q = v S,$$

$$\text{массовый расход} - Q_m = \rho Q = \rho v S.$$

*Режимы течения.* Существуют два режима течения жидкостей и газов: ламинарный и турбулентный. Режим течения определяется числом Рейнольдса  $Re = vd/\nu$ . Критическое значение числа Рейнольдса при течении в трубах равно 2300. При  $Re < 2300$  режим ламинарный, при  $Re > 2300$  – турбулентный.

*Закон сохранения массы* выражается как постоянство массового расхода для всех сечений потока жидкости либо газа  $Q_m = \text{const}$ . Массовые расходы жидкости в двух разных сечениях трубы 1 и 2 одинаковы:

$$Q_{m1} = Q_{m2}, \text{ либо } \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2,$$

где  $\rho_1, \rho_2, v_1, v_2$  – плотность жидкости и скорости в сечениях 1 и 2,  $S_1$  и  $S_2$  – площади сечений.

Если жидкость несжимаема, то закон сохранения массы выражается постоянством объемного расхода  $Q_V = \text{const}$  и имеет вид

$$Q_{V1} = Q_{V2}, \quad v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

*Закон сохранения энергии в жидкостях и газах* выражается уравнением Бернулли.

При стационарном движении тяжелой идеальной несжимаемой жидкости полная удельная энергия (энергия единицы массы) жидкости есть величина постоянная:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = e_{\Pi} = \text{const}.$$

В геометрической интерпретации уравнение Бернулли определяет постоянство полного напора, и уравнение имеет вид

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = H_{\Pi} = \text{const}.$$

Закон сохранения энергии может быть также сформулирован как постоянство полного давления:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho gz = P_{\Pi} = \text{const}.$$

Напор  $H$  и давление  $p$  связаны между собой соотношением

$$H = p / \rho g.$$

В реальных жидкостях из-за вязкости всегда существуют потери энергии потока, и тогда уравнение Бернулли для двух сечений потока имеет вид

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 + \rho gz_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \rho gz_2 + \Delta p,$$

где  $\Delta p$  – потери давления на участке течения между выбранными сечениями.

*Гидравлические сопротивления.*

Потери давления в трубопроводах разделяются на два вида: потери давления при стабилизированном движении жидкости в трубах

$\Delta p_{\tau}$  и потери на местных сопротивлениях  $\Delta p_{\text{м}}$ . Потери на местных сопротивлениях сосредоточены на сравнительно коротких участках трубопроводов (примерно до десяти диаметров трубы) и вызываются местными изменениями конфигурации канала.

Потери давления на трение в круглых трубах определяются по формуле Дарси-Вейсбаха

$$\Delta p_{\tau} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2},$$

в которой  $l$  – длина рассматриваемого участка трубы,  $d$  – ее диаметр,  $\rho$  – плотность жидкости,  $v$  – средняя скорость потока,  $\lambda$  – коэффициент Дарси или гидравлический коэффициент трения. Для некруглых труб в формулу Дарси-Вейсбаха вместо  $d$  вводится гидравлический диаметр  $d_h = 4S/\Pi$ , где  $S$  – площадь сечения трубы,  $\Pi$  – ее периметр.

Потери давления на местных сопротивлениях вычисляются по формуле Вейсбаха

$$\Delta p_{\text{м}} = \zeta \frac{\rho v^2}{2},$$

где  $\zeta$  – коэффициент местного сопротивления.

Коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  зависит от числа Рейнольдса и шероховатости трубы. Для некруглых труб он может также зависеть от формы сечения трубы.

При ламинарном режиме течения ( $Re < 2300$ ) шероховатость труб не оказывает влияния на гидравлический коэффициент трения, и он равен  $\lambda = 64/Re$ .

При турбулентном режиме течения для гладких труб он определяется по формуле Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}.$$

При развитии турбулентном режиме шероховатость оказывает влияние на коэффициент  $\lambda$ , и выражения для его расчета приводятся в справочниках.

Коэффициенты местных сопротивлений  $\zeta$  зависят от числа Рейнольдса только при ламинарном режиме течения. При турбулентном движении  $\zeta$  считается зависящим только от вида и конструктивного исполнения местного сопротивления.

Значения коэффициентов сопротивления, как правило, определяются опытным путем и в обобщенном виде содержатся в справочниках в виде эмпирических формул, таблиц, графиков.

Для выполнения расчетов потерь давления принимается принцип наложения потерь, в соответствии с которым полные потери давления  $\Delta p$  в простом трубопроводе представляют собой сумму потерь на трение по длине  $\Delta p_T$  и потерь на всех местных сопротивлениях  $\Delta p_M$ :  $\Delta p = \Delta p_T + \Sigma \Delta p_M$ . Тогда потери давления определяются выражениями

$$\Delta p = \left( \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta \right) \frac{\rho v^2}{2}.$$

При известных потерях давления  $\Delta p$  и расходе жидкости  $Q$  можно определить мощность  $N$ , необходимую для обеспечения заданного расхода жидкости  $N = Q \Delta p$ .

При последовательном соединении простых трубопроводов конечная точка предыдущего трубопровода соединяется с начальной точкой последующего (рисунок 3.1).

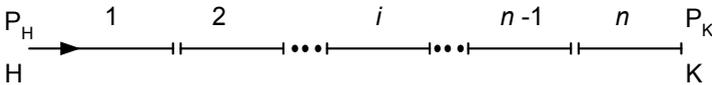


Рисунок 3.1. Последовательное соединение трубопроводов 1,2,...,i,..., n-1, n

При последовательном соединении расход жидкости во всех трубопроводах одинаков

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_i = \dots = Q_{n-1} = Q_n.$$

Полные потери давления между начальным и конечным сечениями равны сумме потерь на каждом из участков

$$\Delta p_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \Delta p_i .$$

В соответствии с уравнением Бернулли давление в начальном сечении  $p_{\text{н}}$  равно

$$p_{\text{н}} = p_{\text{к}} + \rho g(z_{\text{к}} - z_{\text{н}}) + \frac{\rho(v_{\text{к}}^2 - v_{\text{н}}^2)}{2} + \Delta p_{\Pi} .$$

При параллельном соединении трубопроводов все они имеют общие начальную (Н) и конечную (К) точки (рисунок 3.2).

Потери давления во всех ветвях параллельного соединения будут одинаковы

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 = \dots = \Delta p_i = \dots = \Delta p_{n-1} = \Delta p_n .$$

Сумма расходов в ветвях равна полному подводимому расходу

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_i + \dots + Q_{n-1} + Q_n = Q .$$

Разветвленный трубопровод в общем случае состоит из  $n$  ветвей, выходящих из одной точки. В конечных сечениях каждой из ветвей задано значение давления  $p_{ki}$  (рисунок 3.3).

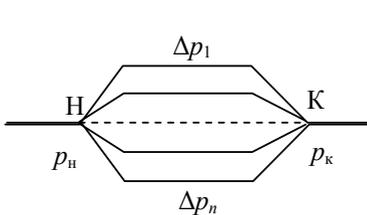


Рисунок 3.2

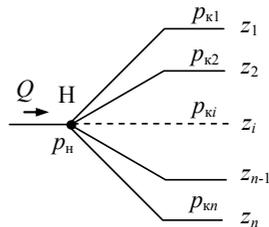


Рисунок 3.3

Пренебрегая динамическими давлениями, для каждой ветви такого трубопровода можно записать выражение для давления в начальной точке  $p_n$ :

$$\left. \begin{aligned} p_n &= p_{к1} + \rho g z_1 + \Delta p_1 \\ p_n &= p_{к2} + \rho g z_2 + \Delta p_2 \\ p_n &= p_{ки} + \rho g z_i + \Delta p_i \\ p_n &= p_{кn} + \rho g z_n + \Delta p_n \end{aligned} \right\} n$$

и уравнение сохранения полного расхода

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_i + \dots + Q_{n-1} + Q_n = Q.$$

Потери давления в каждой ветви вновь выражаются через соответствующие расходы.

Если трубопровод расположен горизонтально ( $z_1 = z_2 = \dots = z_i = \dots = z_n$ ) и конечные давления во всех ветвях одинаковы  $p_{к1} = p_{к2} = \dots = p_{кn}$ , то получается  $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \dots = \Delta p_n$ , как и для параллельного соединения.

### Задачи

3.1. Определить режим течения (ламинарный или турбулентный) при движении воды в круглой трубе диаметром  $d = 1$  см при объемном расходе  $Q = 3 \cdot 10^{-5}$  м<sup>3</sup>/с. Как изменится критическое значение числа Рейнольдса, если диаметр трубы увеличится в 3 раза?

Ответ:

а)  $Re = 3820$ ,      б) не изменится.

3.2. Определить критическое значение скорости воды при ее движении в круглой трубе диаметром 1 см.

Ответ:  $v_{кр} = 0,23$  м/с.

3.3. Определить критическое значение скорости при движении в трубе круглого сечения диаметром 46 мм воздуха при 20 °С и давлении 0,1 МПа и масла (плотность 963 кг/м<sup>3</sup>, динамический коэффициент вязкости 0,035 Па·с).

Ответ:

а) Для воздуха ( $\nu = 0,018 \cdot 10^{-3}$  Па·с,  $\rho = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>)  $v_{кр} = 0,75$  м/с;

б) Для масла  $v_{кр} = 1,8$  м/с.

3.4. Определить режим течения жидкости в межтрубном пространстве теплообменника

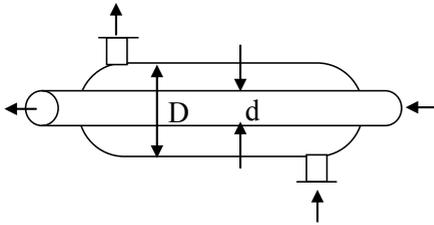


Рисунок 3.4

типа «труба в трубе» (рисунок 3.4). Наружная труба имеет внутренний диаметр 46 мм, в внутренняя – наружный диаметр 25 мм. Массовый расход жидкости 3730 кг/час, ее плотность 1150 кг/м<sup>3</sup>, динамический коэффициент вязкости  $1,2 \cdot 10^{-3}$  Па·с.

Ответ:  $Re = 15500$ , режим турбулентный.

3.5. Вода подается с массовым расходом 8000 кг/час по трубе диаметром 50 мм при температуре 20 °С. Как изменится режим течения в трубе, если по ней течет нефть с тем же массовым расходом. Кинематический коэффициент вязкости нефти  $0,6 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с, плотность – 890 кг/м<sup>3</sup>.

Ответ:

Для воды  $Re = 57000$  – режим турбулентный;

Для нефти  $Re = 1060$  – режим ламинарный.

3.6. В поверхностном конденсаторе паровой турбины охлаждающая вода проходит с расходом  $Q = 8$  л/с по 250 параллельным цилиндрическим трубкам. Определить максимальный диаметр трубок, при котором еще будет турбулентное движение жидкости, обеспечивающее лучшую передачу тепла. Принять для нижней границы турбулентного режима число Рейнольдса  $Re_{кр} = 3000$ . Температура воды 10 °С (коэффициент вязкости  $\nu = 0,013 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с).

Ответ:  $d_{\max} = \frac{4Q}{Re_{кр} \nu N \pi} = 0,01 \text{ м}.$

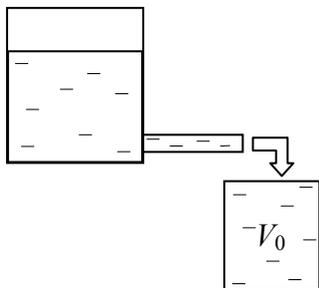


Рисунок 3.5

3.7. По трубе диаметром  $d = 25$  мм пропускается вода температурой  $10^\circ\text{C}$ . Определить, в течение какого времени будет наполняться мерный сосуд емкостью  $V_0 = 3$  л (рисунок 3.5) при режимах течения, соответствующим числам Рейнольдса 2300 и 14000. При  $10^\circ\text{C}$  вязкость воды  $\nu = 0,0131 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Ответ:

При  $\text{Re} = 2300$ :  $\tau_1 = 50,8$  с,

При  $\text{Re} = 14000$ :  $\tau_2 = 8,4$  с.

3.8. Определить критическую среднюю скорость, при которой движение воды по трубопроводу диаметром 100 мм переходит из ламинарного в турбулентное. Динамический коэффициент вязкости воды  $0,00103 \text{ Па}\cdot\text{с}$ , плотность –  $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

Ответ:  $V_{\text{кр}} = 0,024 \text{ м}/\text{с}$ .

3.9. По трубе диаметром 203 мм перекачивается 100 л/с мазута, кинематическая вязкость которого постепенно увеличивается вследствие остывания. Определить при каком значении кинематической вязкости в трубе будет иметь место критический режим движения.

Ответ:  $\nu = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

3.10. В шлюзовой камере, имеющей ширину 40 м и длину 300 м, уровень воды за время 0,5 часа понижается на 8 м. Определить средний расход в водопускных трубах

Ответ:  $Q_V = 53,3 \text{ м}^3/\text{с}$ .

3.11. По трубопроводу диаметром 156 мм перекачивают мазут удельного веса  $0,9 \text{ т}/\text{м}^3$ . Определить объемный расход и среднюю скорость, если массовый расход равен 50 т/час.

Ответ:  $Q_V = 0,0154 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $v = 0,808 \text{ м}/\text{с}$ .

3.12. На оси водопроводной трубы диаметром 20 мм установлена трубка Пито-Прандтля с дифференциальным ртутным манометром.

Определить максимальную и среднюю скорости движения воды, если разность уровней ртути в манометре равна 18 мм.

Ответ:  $v_{max} = 2,2$  м/с,  $v_{cp} = 1,75$  м/с.

3.13. По трубопроводу диаметром 140 мм перекачивается вода. Скорость воды измеряется трубкой Пито-Прандтля. Определить среднюю скорость, объемный и массовый расход воды, если разность уровней ртути в U-образном манометре 12 мм.

Ответ:  $v_{max} = 1,8$  м/с,  $v_{cp} = 1,44$  м/с,  $Q_V = 0,021$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_m = 21$  кг/с.

3.14. Трубопровод диаметром  $d_1 = 100$  мм имеет местное сужение с диаметром  $d_2 = 25$  мм. Определить массовый расход и скорость в узкой части трубопровода, если перекачивается мазут с объемным расходом в широкой части 10 л/с. Плотность мазута 950 кг/м<sup>3</sup>.

Ответ:  $v_2 = 20,4$  м/с,  $Q_m = 9,5$  кг/с.

3.15. Трубопровод диаметром 100 мм имеет местное сужение, в котором его диаметр 25 мм. Определить массовый расход, среднюю скорость в трубопроводе и скорость в узкой его части, если перекачивается мазут плотностью 0,95 т/м<sup>3</sup> в количестве 10 л/с.

Ответ:  $Q_m = 9,5$  кг/с,  $v_{cp} = 1,27$  м/с,  $v_{уз} = 20,4$  м/с.

3.16. Поршень движется со скоростью 1 м/с в горизонтальном цилиндре насоса диаметром 20 см и выталкивает воду через отверстие диаметром 2 см. С какой скоростью вода вытекает из отверстия? Какое избыточное давление в цилиндре создает поршень?

Ответ:  $v = 100$  м/с,  $p_{изб} = 5$  МПа.

3.17. Скорость воды в широкой части горизонтальной трубы переменного сечения равна 20 см/с. Чему равна скорость в узкой части трубы, диаметр которой в 1,5 раза меньше диаметра широкой части?

Ответ:  $v = 0,45$  м/с.

3.18. Трубка Пито-Прандтля установлена по оси газопровода диаметром 400 мм, по которому перекачивается водород. Показание спиртового дифференциального манометра 17 мм. Определить объ-

емный расход газа, если давление водорода  $2 \cdot 10^5$  Па и температура  $17^\circ\text{C}$ , удельный вес спирта  $8000 \text{ Н/м}^3$ .

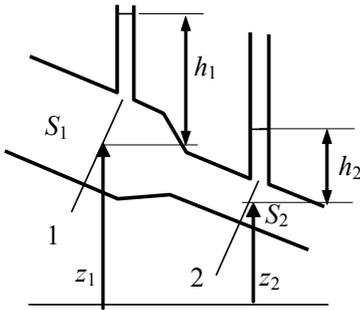


Рисунок 3.6

3.19. На рисунке 3.6 показан расходомер (трубка) Вентури для измерения расхода жидкости в трубах. Известны площади сечения  $S_1$  и  $S_2$  и их координаты  $z_1$  и  $z_2$ . Определить скорость жидкости в поперечном сечении 1 и ее объемный расход по показаниям  $h_1$  и  $h_2$  пьезометрических трубок.

Ответ:

$$Q = S_1 v_1$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{2g[(h_1 - h_2) + (z_1 - z_2)]}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1}}$$

3.20. Ветер оказывает давление  $100 \text{ Па}$  на плоскую стенку, расположенную перпендикулярно скорости ветра. Определить скорость ветра, если плотность воздуха равна  $1,29 \text{ кг/м}^3$ .

Ответ:  $v = 12,5 \text{ м/с}$ .

3.21. Струя воды диаметром  $20 \text{ мм}$  движется со скоростью  $10 \text{ м/с}$  и ударяется о неподвижную плоскую стенку, установленную перпендикулярно струе. Найти силу давления струи на стенку. Считать, что после удара скорость воды равна нулю.

Ответ:  $F = 15,7 \text{ Па}$ .

3.22. Пожарный тушит огонь из брандспойта (сужающийся конус), диаметр которого у устья  $2 \text{ см}$ , а у корня  $8 \text{ см}$ . Скорость струи на выходе из брандспойта  $15 \text{ м/сек}$ . Пренебрегая сопротивлением в брандспойте, найти силу, с которой пожарному приходится удерживать брандспойт.

Ответ:  $F = 66,27 \text{ Н}$ .

3.23. Какое давление создает компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вытекает из него со скоростью 25 м/сек? Плотность краски –  $0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

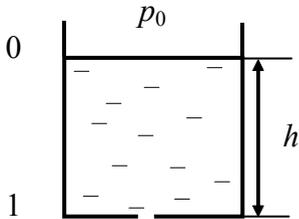
Ответ:  $p = 250 \text{ кПа} + \text{давление окружающей среды}$ .

3.24. Горный поток на некотором участке имеет резкое падение уровня дна (водопад). Расход воды в водопаде  $100 \text{ м}^3/\text{с}$ , средняя скорость на подходе к водопаду 5 м/с. Высота падения 25 м. Определить теоретическую мощность водопада.

Ответ:  $N = 25,7 \text{ МВт}$ .

3.25. В круглой трубе диаметром  $d = 2 \text{ см}$  и длиной 100 м насосом создается перепад давления  $0,5 \cdot 10^3 \text{ Па}$ . Определить максимальную скорость воды в центре трубы.

Ответ:  $v_{\text{max}} = 0,125 \text{ м/с}$ .



3.26. В широком открытом баке уровень воды 1 м (рисунок 3.7). Вода вытекает из бака через малое отверстие в дне бака. Определить скорость истечения воды через отверстие.

Ответ:  $v = 4,4 \text{ м/с}$ .

Рисунок 3.7

3.27. По горизонтальной трубе круглого сечения диаметром 10мм при температуре 282 К прокачивается глицерин с перепадом давления на единицу длины трубы  $2 \cdot 10^{-3} \text{ Па/м}$ . Определить объемный расход глицерина, среднюю скорость глицерина, число Рейнольдса.

Ответ:  $Q_V = 3,53 \cdot 10^{-13} \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $v = 4,49 \cdot 10^{-9} \text{ м/с}$ ,  $Re = 4 \cdot 10^{-8}$ .

3.28. По горизонтальной трубе круглого сечения диаметром 10мм при температуре 282 К прокачивается глицерин с перепадом давления на единицу длины трубы  $4 \cdot 10^{-3} \text{ Па/м}$ . Определить объемный расход глицерина, напряжение трения на стенке трубы  $\tau_w$ .

Ответ:

$$Q_v = 3,53 \text{ м}^3/\text{с}; \tau_w = -\eta \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R}, \tau_w = \frac{\Delta p R}{2L} = 10^{-5} \text{ Па}.$$

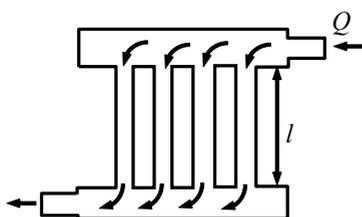


Рисунок 3.8

3.29. Масляный радиатор состоит из четырех цилиндрических трубок (рисунок 3.8). Определить потерю напора в радиаторе при расходе масла  $Q = 0,2$  л/с, если внутренний диаметр трубок 12 мм, длина каждой трубки  $l = 300$  мм и кинематическая вязкость масла  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Потерями напора на входе в трубку и выходе из нее, а также влиянием начального участка пренебречь.

Ответ:  $\Delta H_{\text{пот}} = 0,01$  м.

3.30. Вода перетекает из верхнего бака в нижний бак по сифонному трубопроводу (рисунок 3.9). Вход в трубу снабжен сеткой.

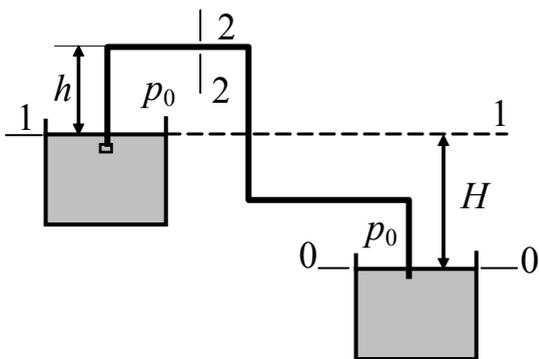


Рисунок 3.9

Определить величину вакуума  $p$  в сечении 2 – 2 и расход воды в трубопроводе.

Даны: разность уровней жидкости в баках  $H=4,5$  м, длина трубы  $l = 30$  м, высота сифона  $h=2,5$  м, диаметр трубы  $d=5$  см. Принять длину трубы до сечения 2 – 2, равной  $l/3$ ,

коэффициенты сопротивлений принять равными:  $\zeta_{\text{с}} = 0,5$ ,  $\zeta_{\text{закр}} = 0,29$ ,  $\zeta_{\text{вых}} = 0,5$ , гидравлический коэффициент трения  $\lambda = 0,028$ .

Ответ:  $Q_V = 0,43 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  
 Разрежение в сечении 2 – 2

$$\frac{p_0 - p_2}{\rho g} = h + \frac{V^2}{2g} + \left( \lambda \frac{l'}{d} + \sum \zeta' \right) \frac{V^2}{2g} = 4,26 \text{ м}.$$

3.31. В поверхностном конденсаторе паровой машины охлаждающая вода проходит по двум последовательным секциям (ходам), каждая из которых содержит 250 параллельных латунных трубок длиной  $L = 5 \text{ м}$  и диаметром  $d = 16 \text{ мм}$ . Определить потери напора в конденсаторе при расходе воды  $Q = 360 \text{ м}^3/\text{ч}$ .

Учитывать потери напора на трение в трубках (рассматривать их как гидравлически гладкие) и местные потери напора (вход в трубки  $\zeta_{\text{вх}} = 0,5$ , выход из трубок  $\zeta_{\text{вых}} = 1$ , поворот на  $180^\circ$  внутри камеры при переходе от одного пучка труб к другому  $\zeta_{\text{пов}} = 2,5$ ). Кинематический коэффициент вязкости воды  $\nu = 0,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Ответ:  $\Delta H_{\text{пот}} = 3,51 \text{ м}$ .

3.32. Вода сливается из бака  $A$  в бак  $B$  по трубопроводу, диаметр которого  $d = 80 \text{ мм}$  и длина  $l = 10 \text{ м}$  (рисунок 3.10). Из бака  $B$  вода вытекает в атмосферу через цилиндрический насадок такого же диаметра  $d_1 = 80 \text{ мм}$  (коэффициент расхода  $\mu = 0,82$ ).

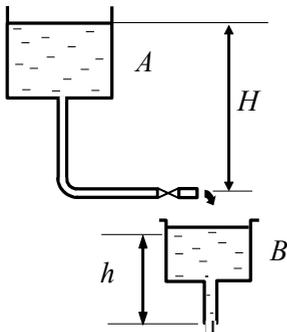


Рисунок 3.10

Коэффициенты сопротивления колена и вентиля в трубе  $\zeta_{\kappa} = 0,3$ ,  $\zeta_{\text{в}} = 4$ ; гидравлический коэффициент трения  $\lambda = 0,03$ ; коэффициент сопротивления входа в трубу из большого резервуара  $\zeta_{\text{вх}} = 0,5$ , коэффициент сопротивления выхода из трубы  $\zeta_{\text{вых}} = 1$ .

Определить напор  $H$ , который нужно поддерживать в баке  $A$ , чтобы уровень в баке  $B$  находился на высоте  $h = 1,5 \text{ м}$ .

Ответ:  $H = 9,64 \text{ м}$ .

3.32. Прямоугольный резервуар вертикальными перегородками делится на три части, сообщающиеся друг с другом (рисунок 3.11).

Определить расход воды через систему и найти распределение напоров  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ , если диаметр отверстия в первой перегородке  $d_1 = 100$  мм, диаметр выходного сечения коноидальной насадки на второй перегородке  $d_2 = 50$  мм, диаметр цилиндрической насадки  $d_3 = 70$  мм. Считать, что начальный напор  $H = 1,4$  м поддерживается постоянным.

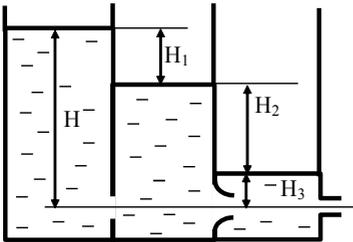


Рисунок 3.11

Условия истечения	$\mu$
Круглое отверстие в тонкой стенке	0,62
Цилиндрический насадок	0,82
Сужающийся коноидальный насадок	0,97

Ответ:  $H_1 = 0,141$  м,  
 $Q = 0,0081$  м<sup>3</sup>/с.

$H_2 = 0,922$  м,  $H_3 = 0,337$  м.

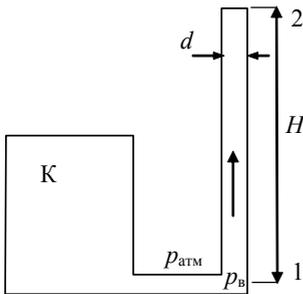


Рисунок 3.12

3.33. В котельной установке осуществляется выброс дымовых газов через дымовую трубу с расходом  $Q_m = 18\ 000$  кг/час (рисунок 3.12). Для обеспечения такого расхода вакуумметрическое давление у основания трубы должно быть равным  $p_в = 200$  Па. Определить высоту трубы  $H$ , обеспечивающую заданное разрежение у основания, если ее диаметр  $d = 1$  м.

Средняя плотность дымовых газов  $\rho_r = 0,6$  кг/м<sup>3</sup>, окружающего атмосферного воздуха –  $\rho_{возд} = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>. Гидравлический коэффициент трения в трубе  $\lambda = 0,03$ .

$$\text{Ответ: } H = \frac{\frac{P_e}{\rho_e g}}{\frac{\rho_{\text{возд}}}{\rho_e} - 1 - \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}} = 41 \text{ м.}$$

3.34. Параллельный трубопровод состоит из двух труб (рисунок 3.13).

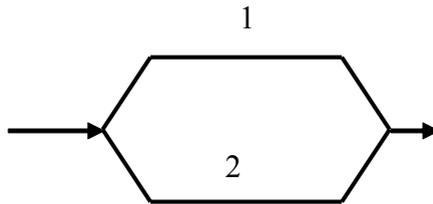


Рисунок 3.13

а) Длина одной трубы  $l_1$ , другой -  $l_2$ . Все остальные характеристики труб одинаковы. Найти соотношение между расходами жидкости в этих трубах.

б) Диаметр одной трубы  $d_1$ , другой -  $d_2$ . Длины и остальные характеристики труб одинаковы. Найти соотношение между расходами жидкости в этих трубах.

в) Длина одной трубы  $l_1$ , другой -  $l_2$ . Режим течения жидкости в трубах ламинарный. Диаметры труб одинаковы. Найти соотношение между расходами жидкости в этих трубах.

г) Диаметр одной трубы  $d_1$ , другой -  $d_2$ . Режим течения жидкости в трубах ламинарный. Длины труб одинаковы. Найти соотношение между расходами жидкости в этих трубах.

д) Длина одной трубы  $l_1$  и ее диаметр  $d_1$ . Длина другой трубы  $l_2$ . Определить такой диаметр второй трубы  $d_2$ , чтобы расходы жидкости в трубах были одинаковы. Остальные характеристики труб одинаковы.

е) Длина одной трубы  $l_1$  и ее диаметр  $d_1$ . Длина другой трубы  $l_2$ . Режим течения жидкости в трубах ламинарный. Определить такой

диаметр второй трубы  $d_2$ , чтобы расходы жидкости в трубах были одинаковы.

3.35. Разветвленный трубопровод состоит из двух труб, каждая из которых выходит в атмосферу (рисунок 3.14).

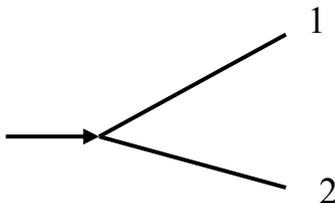


Рисунок 3.14

а) Длина одной трубы  $l_1$ , другой –  $l_2$ . Все остальные характеристики труб одинаковы. Найти соотношение между расходами жидкости в этих трубах.

б) Диаметр одной трубы  $d_1$ , другой –  $d_2$ . Длины и остальные характеристики труб одинаковы. Найти соотношение между расходами жидкости в этих трубах.

в) Длина одной трубы  $l_1$ , другой –  $l_2$ . Режим течения жидкости в трубах ламинарный. Диаметры труб одинаковы. Найти соотношение между расходами жидкости в этих трубах.

г) Диаметр одной трубы  $d_1$ , другой –  $d_2$ . Режим течения жидкости в трубах ламинарный. Длины труб одинаковы. Найти соотношение между расходами жидкости в этих трубах.

д) Длина одной трубы  $l_1$  и ее диаметр  $d_1$ . Длина другой трубы  $l_2$ . Определить такой диаметр второй трубы  $d_2$ , чтобы расходы жидкости в трубах были одинаковы. Остальные характеристики труб одинаковы.

е) Длина одной трубы  $l_1$  и ее диаметр  $d_1$ . Длина другой трубы  $l_2$ . Режим течения жидкости в трубах ламинарный. Определить такой диаметр второй трубы  $d_2$ , чтобы расходы жидкости в трубах были одинаковы.

3.36. Уровень воды в водонапорном баке на 7 м выше водоразборной задвижки. Определить диаметр  $d$  стальной трубы, обеспечивающей пропуск воды 180 куб.м /час если длина трубы 270 м. Эквивалентная длина местных сопротивлений 40 м, гидравлический коэффициент трения – 0,02.

Ответ:  $d = 0,205$  м.

3.37. Жидкость вытекает из бака по трубе диаметром  $d$  и длиной  $L$  (рисунок 3.15). Для увеличения при том же напоре  $H$  пропускной способности трубопровода в точках 1 и 2 подсоединяют параллельную

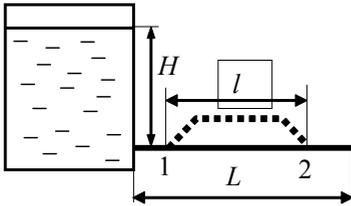


Рисунок 3.15

ветвь из трубы длиной  $l$  и диаметром  $d$ . Определить, во сколько раз изменится расход в трубопроводе. Считать, что гидравлические коэффициенты трения для всех участков трубопровода одинаковы.

Ответ:  $\frac{Q_2}{Q_1} = \sqrt{\frac{L}{L - (3/4)l}}$ ; если  $L = l$ , то  $\frac{Q_2}{Q_1} = 2$ .

3.38. Определить, как изменится пропускная способность трубопровода при одном и том же напоре, если труба диаметром  $d$  и длиной  $L$  заменяется двумя одинаковыми параллельными трубами той же длины, суммарная площадь которых равна площади сечения заменяемой трубы. Считать, что гидравлический коэффициент трения для труб остался тем же.

Ответ:  $Q_2/Q_1 = 0,84$ .

## Приложение. Таблицы физических свойств жидкостей и газов

Таблица 1

Плотность жидкостей (при 20<sup>0</sup>С)

Жидкость	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Жидкость	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Азотная кислота	1510	Масло подсолнечное	920-930
Ацетон	791	Морская вода	1010-1030
Бензин	680-720	Молоко	1028-1032
Бензол	879	Нефть	760-850
Вода	998	Ртуть	1355
Глицерин	1260	Серная кислота (концентрированная)	1830
Масло минеральное (смазочное)	900-930	Толуол	8660
Масло трансформаторное	880	Этиловый спирт	790

Таблица 2

Зависимость плотности и коэффициентов вязкости масла трансформаторного от температуры

$T, ^\circ C$	0	10	20	30	40	50	60
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	892,5	886,4	880,3	874,2	868,2	862,1	856,0
$\eta \cdot 10^4$ , Па·с	629,8	335,5	198,2	128,5	89,4	65,3	49,5
$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	70,5	37,9	22,5	14,7	10,3	7,58	5,78

Таблица 3

Зависимость коэффициентов вязкости воды и воздуха от температуры

$T, ^\circ\text{C}$	Вода			Воздух		
	$\rho, \text{кг/м}^3$	$\eta \cdot 10^6, \text{Па}\cdot\text{с}$	$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$\eta \cdot 10^6, \text{Па}\cdot\text{с}$	$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$
0	1000	1788	1,789	1,293	17,2	13,28
10	999,7	1306	1,306	1,247	17,6	14,16
20	998,2	1004	1,006	1,205	18,1	15,06
30	995,7	801,5	0,805	1,165	18,6	16,00
40	992,2	653,3	0,659	1,128	19,1	16,96
50	988,1	549,4	0,556	1,093	19,6	17,95
60	983,2	469,9	0,478	1,060	20,1	18,97

Таблица 4

Динамический коэффициент вязкости для некоторых жидкостей

Жидкость	$T, ^\circ\text{C}$	$\eta \cdot 10^3, \text{Па}\cdot\text{с}$	Жидкость	$T, ^\circ\text{C}$	$\eta \cdot 10^3, \text{Па}\cdot\text{с}$
Ацетон	18	0,337	Масло касторовое	20	1400
Бензин	15	0,65	Масло минеральное смазочное	15	27,5
Глицерин (безводный)	15	1499	Масло трансформаторное	20	24,5
Керосин	15	2,17	Нефть	15	7

Таблица 5

Поверхностное натяжение воды

$T, ^\circ\text{C}$	0	30	60	90
$\sigma, \text{Н/м}$	0,0756	0,0712	0,0662	0,0608

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Методические указания содержат теоретический и справочный материал, необходимый для выполнения курсовой работы "Расчет сложного трубопровода" по дисциплине "Механика жидкости и газа". Приводятся принципы расчета трубопроводов различной конфигурации и на примерах рассмотрены основные моменты выполнения курсовой работы.

### 1. Основные физические свойства жидкостей

#### 1.1. Плотность

Плотность  $\rho$  – физическая величина, определяемая для однородных веществ как отношение массы  $m$  вещества к занимаемому им объему  $V$ :

$$\rho = m/V .$$

Плотность неоднородных веществ определяется в каждой точке пространства, занятого веществом, как предел отношения массы к объему, когда объем стягивается к данной точке

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta m / \Delta V$$

Неоднородность плотности жидкости может быть обусловлена неоднородным распределением в ней температуры либо давления.

Единица измерения плотности –  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Удельный вес  $\gamma$  определяет вес единицы объема жидкости. Для однородной среды  $\gamma = G/V$ , где  $G$  – вес объема жидкости  $V$ . Единица измерения удельного веса  $\gamma$  –  $\text{Н}/\text{м}^3$ . Поскольку  $G = mg$ , то плотность и удельный вес связаны между собой соотношением  $\gamma = \rho g$ .

Плотность жидкостей зависит от давления и температуры. С ростом температуры плотность жидкостей уменьшается (кроме воды в

диапазоне температур от 0 до 4 °С). С ростом давления плотность жидкостей увеличивается.

Плотности некоторых жидкостей приведены в табл. 1. Влияние температуры на плотность воды и трансформаторного масла дано в табл. 2 и табл. 3.

Сжимаемость жидкостей под действием приложенного давления характеризуется коэффициентом объемного сжатия  $\beta_p = (1/\rho)(\partial\rho/\partial p)$ . Обратная ему величина  $E_{ж} = 1/\beta_p$  называется объемным модулем упругости. При обыкновенной температуре и давлении для воды можно считать  $\beta_p = 47 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$ ,  $E_{ж} = 2 \cdot 10^9 \text{ Па}$ .

Таблица 1. Плотность жидкостей (при 20<sup>0</sup>С)

Жидкость	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Жидкость	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Азотная кислота	1510	Масло подсолнечное	920-930
Ацетон	791	Морская вода	1010-1030
Бензин	680-720	Молоко	1028-1032
Бензол	879	Нефть	760-850
Вода	998	Ртуть	1355
Глицерин	1260	Серная кислота (концентрированная)	1830
Масло вазелиновое	800	Соляная кислота (38%)	1190
Масло минеральное (смазочное)	900-930	Толуол	8660
Масло трансформаторное	880	Этиловый спирт	790

## 1.2. Вязкость жидкостей

Вязкость жидкостей (внутреннее трение) – свойство жидкостей оказывать сопротивление относительному перемещению ее слоев. Наличие внутреннего трения приводит к переходу части кинетической энергии потока в тепловую, то есть к потере или диссипации механической энергии.

Вязкость характеризуется динамическим коэффициентом вязкости  $\eta$ , имеющим размерность Па·с = кг/м·с. В системе СГС динамический коэффициент вязкости измеряется в Пуазах (П). Единицы измерения динамического коэффициента вязкости связаны между собой соотношением  $1 \text{ П} = 1 \text{ г/см} \cdot \text{с} = 0,1 \text{ Па} \cdot \text{с}$ .

Кинематический коэффициент вязкости определяется выражением  $\nu = \eta/\rho$  и имеет размерность м<sup>2</sup>/с. В системе СГС измеряется в Стоксах:  $1 \text{ Ст} = 1 \text{ см}^2/\text{с} = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ .

С ростом температуры вязкость жидкостей убывает, а газов – растет.

В табл. 2 и табл. 3 приведены значения коэффициентов вязкости трансформаторного масла, воды и воздуха при различных температурах.

Таблица 2. Зависимость плотности и коэффициентов вязкости масла трансформаторного от температуры

$t, ^\circ\text{C}$	0	10	20	30	40	50	60
$\rho, \text{ кг/м}^3$	892,5	886,4	880,3	874,2	868,2	862,1	856,0
$\eta \cdot 10^4, \text{ Па} \cdot \text{с}$	629,8	335,5	198,2	128,5	89,4	65,3	49,5
$\nu \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$	70,5	37,9	22,5	14,7	10,3	7,58	5,78

Таблица 3. Зависимость коэффициентов вязкости воды и воздуха от температуры

$t, ^\circ\text{C}$	Вода			Воздух		
	$\rho, \text{ кг/м}^3$	$\eta \cdot 10^6, \text{ Па} \cdot \text{с}$	$\nu \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$	$\rho, \text{ кг/м}^3$	$\eta \cdot 10^6, \text{ Па} \cdot \text{с}$	$\nu \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$
0	1000	1788	1,789	1,293	17,2	13,28
10	999,7	1306	1,306	1,247	17,6	14,16
20	998,2	1004	1,006	1,205	18,1	15,06
30	995,7	801,5	0,805	1,165	18,6	16,00
40	992,2	653,3	0,659	1,128	19,1	16,96
50	988,1	549,4	0,556	1,093	19,6	17,95
60	983,2	469,9	0,478	1,060	20,1	18,97

Значения коэффициента вязкости различных жидкостей приведены в табл. 4.

Таблица 4. Динамический коэффициент вязкости для некоторых жидкостей

Жидкость	$t, ^\circ\text{C}$	$\eta \cdot 10^3, \text{Па}\cdot\text{с}$	Жидкость	$t, ^\circ\text{C}$	$\eta \cdot 10^3, \text{Па}\cdot\text{с}$
Ацетон	18	0,337	Масло касторовое	20	1400
Бензин	15	0,65	Масло минеральное смазочное	15	27,5
Глицерин (безводный)	15	1499	Масло трансформаторное	20	24,5
Керосин	15	2,17	Нефть	15	7

## 2. Основные характеристики течения жидкости

### 2.1. Средняя скорость течения и расход

При гидравлических расчетах трубопроводов течение жидкости полностью характеризуется средней по сечению скоростью потока  $u$ , определяемой отношением объемного расхода жидкости  $Q$  к площади поперечного сечения трубы  $S$ :  $u = Q/S$ .

Объемный расход определяется объемом жидкости, прошедшим через поперечное сечение трубы в единицу времени, и измеряется в  $\text{м}^3/\text{с}$ . Поток жидкости может также характеризоваться массовым расходом  $Q_m$ , который определяется массой жидкости, прошедшей через поперечное сечение трубы в единицу времени, и измеряется в  $\text{кг}/\text{с}$ . Массовый расход равен объемному, умноженному на плотность жидкости:  $Q_m = \rho Q$ .

Средняя скорость течения жидкости в водопроводных сетях принимается 1-1,5 м/с.

## 2.2. Режимы течения

Режим движения жидкости бывает ламинарным и турбулентным. Потери энергии в потоке зависят от режима движения жидкости.

При ламинарном (слоистом) режиме течение устойчивое, частицы жидкости движутся по плавным непересекающимся траекториям. Слои жидкости движутся не перемешиваясь. Жидкость плавно обтекает встречающиеся препятствия.

Турбулентный режим характеризуется беспорядочным (хаотичным) движением частиц жидкости, что обеспечивает сильное перемешивание слоев, выравнивание характеристик потока в его сечении. Турбулентное течение жидкости в отличие от ламинарного описывается не мгновенным значением скорости частиц, а ее значением, осредненным за достаточно большой промежуток времени. Вследствие интенсивного хаотического движения жидкости турбулентный режим характеризуется большими потерями энергии, чем ламинарный при том же расходе. Тот или иной режим движения жидкости определяется соотношением сил инерции и сил вязкости в потоке, которое выражается безразмерным комплексом – критерием (числом) Рейнольдса  $Re = ud_r/\nu$ , в котором  $u$  – средняя по сечению скорость потока,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости жидкости,  $d_r$  – гидравлический диаметр трубы, равный отношению учетверенной площади сечения трубы к ее периметру  $\Pi$ :  $d_r = 4S/\Pi$ . Для круглой трубы  $d_r$  равен ее диаметру. Для прямоугольной трубы с размерами  $(a \times b)$  диаметр равен  $d_r = 2ab/(a + b)$ .

Переход от ламинарного режима течения к турбулентному происходит при определенных значениях числа Рейнольдса, называемых критическими  $(Re)_{кр}$ . Нижний предел  $(Re)_{кр}$  для трубы круглого сечения равен примерно 2300. Устранением возмущающих воздействий (вибраций, шероховатостей стенок, острых углов при входе в трубу) можно добиться значительного повышения  $(Re)_{кр}$  (до 12000-13000). Для технических расчетов принимается  $(Re)_{кр} = 2300$ . При  $Re < 2300$  течение считается ламинарным, при  $Re > 2300$  – турбулентным.

### 3. Основные уравнения движения жидкости

#### 3.1. Уравнение неразрывности

Это уравнение есть следствие закона сохранения массы в движущейся жидкости и говорит о том, что массовый расход жидкости вдоль трубы есть величина постоянная,  $Q_m = \text{const}$ . Массовые расходы жидкости в двух разных сечениях трубы 1 и 2 одинаковы:

$$Q_{m1} = Q_{m2}$$

Для объемных расходов  $Q$  это соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} \rho Q_1 &= \rho Q_2, \text{ либо} \\ \rho u_1 S_1 &= \rho u_2 S_2, \end{aligned}$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – площади сечений 1 и 2.

Для несжимаемой ( $\rho = \text{const}$ ) жидкости, к которой относится практически любая капельная жидкость, уравнение неразрывности определяет постоянство объемного расхода  $Q$  вдоль трубы:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2, \\ u_1 S_1 &= u_2 S_2. \end{aligned}$$

#### 3.2. Уравнение энергии (уравнение Бернулли)

Это уравнение выражает собой закон сохранения энергии. Для идеальной (невязкой) жидкости оно определяет постоянство полной удельной энергии потока. Полная удельная энергия потока  $E_m$ , рассчитанная на единицу массы, складывается из удельной кинетической энергии  $u^2/2$ , удельной потенциальной энергии в поле силы тяжести  $gz$  ( $z$  – вертикальная координата потока) и внутренней энергии, определяемой работой сил давления. Последняя для несжимаемой жидкости имеет вид  $p/\rho$ . Таким образом, уравнение Бернулли для идеальной жидкости записывается в виде

$$E_m = \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}, \quad (1)$$

либо

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2.$$

Для удельной энергии, рассчитанной на единицу объема жидкости, уравнение Бернулли определяет собой закон сохранения полного давления в идеальной жидкости  $P$ , представляющего сумму динамического (скоростного) давления  $u^2/2$ , пьезометрического (статического)  $p$  и геометрического  $\rho gz$ . Умножив уравнения (1) на плотность  $\rho$ , получаем

$$P = \frac{\rho u^2}{2} + p + \rho gz = \text{const} \quad (2)$$

$$\frac{\rho u_1^2}{2} + p_1 + \rho gz_1 = \frac{\rho u_2^2}{2} + p_2 + \rho gz_2.$$

Для удельной энергии потока, рассчитанной на единицу веса жидкости, уравнение Бернулли определяет собой закон сохранения полного напора  $H$ , представляющего собой сумму динамического напора  $u^2/2g$ , пьезометрического (статического)  $p/\rho g$  и геометрического  $z$ . Разделив уравнения (1) на  $g$ , получим для этого случая

$$H = \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{const}, \quad (3)$$

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2.$$

Вместо давления  $p$  в жидкости в технике часто используется понятие напора  $H$ , представляющего собой отношение давления к удельному весу жидкости  $H = p/\rho g$ . Напор измеряется в единицах длины, м.

При движении реальной (вязкой) жидкости часть ее энергии необратимым образом переходит в тепло за счет действия сил вязкого трения. Эта часть энергии называется потерей энергии. Уравнение Бернулли для вязкой жидкости в виде (1) - (3) становится несправедливым. Если сечение 2 находится ниже по потоку, то в правую часть уравнения Бернулли необходимо добавить соответствующие потери удельной энергии  $\Delta E_m$ , связанные с ними потери давления  $\Delta p = \rho \Delta E_m$ , и напора  $\Delta H = \Delta E_m/g = \Delta p/\rho g$ . Потери давления  $\Delta p$  определяются потерями энергии, приходящимися на единицу объема жидкости, и имеют размерность  $\text{Н/м}^2 = \text{Дж/м}^3$ . Потери напора определяются потерями энергии, приходящимися на единицу веса жидкости, и имеют размерность  $\text{Дж/Н} = \text{м}$ . Таким образом, уравнение Бернулли для реальной жидкости записывается в виде

$$\alpha_1 \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \alpha_2 \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \Delta E_m,$$

$$\alpha_1 \frac{\rho u_1^2}{2} + p + \rho gz_1 = \alpha_2 \frac{\rho u_2^2}{2} + p_2 + \rho gz_2 + \Delta p, \quad (4)$$

$$\alpha_1 \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \alpha_2 \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta H.$$

Для реальных жидкостей в уравнение Бернулли вводится также коэффициент Кариолиса  $\alpha$ , учитывающий неравномерность распределения скорости жидкости в поперечном сечении трубы. В расчетах для ламинарного течения жидкости принимается  $\alpha = 2$ , для турбулентного –  $\alpha = 1$ .

Для горизонтальных участков труб ( $z_1 = z_2$ ) постоянного сечения ( $u_1 = u_2$ ) потери давления или напора равны соответственно разности

статических давлений или напоров в рассматриваемых сечениях  $\Delta p = P_1 - P_2$ ,  $\Delta H = H_1 - H_2$ .

## 4. Гидравлические сопротивления

### 4.1. Общие формулы для вычисления потерь давления

Потери давления в трубопроводах разделяются на два вида. Первый вид представляют собой потери давления на трение  $\Delta p_{\text{тр}}$  при стабилизированном движении жидкости в длинных трубах. Эти потери равномерно распределяются по всей длине трубы. Потери второго вида ( $\Delta p_{\text{м}}$ ) сосредоточены на сравнительно коротких участках трубопроводов (примерно до десяти диаметров трубы) и вызываются местными изменениями конфигурации канала. Эти сопротивления называются местными. Примерами местных сопротивлений могут служить участки резкого расширения и сужения трубопровода, места слияния и разделения потоков, различного рода трубопроводная аппаратура (вентили, клапаны, задвижки, дроссели и т.п.). Характерной особенностью движения жидкости через местные сопротивления является образование вихрей в потоке, что вызывает значительные потери энергии (давления, напора).

Потери давления на трение в круглых трубах определяются по формуле Дарси-Вейсбаха

$$\Delta p_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u^2}{2}, \quad (5)$$

в которой  $l$  – длина рассматриваемого участка трубы,  $d$  – ее диаметр,  $\rho$  – плотность жидкости,  $u$  – средняя скорость потока,  $\lambda$  – коэффициент Дарси или коэффициент гидравлического трения.

Коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  – величина безразмерная и численно равна потере давления на участке трубы с длиной равной диаметру ( $l = d$ ), отнесенной к динамическому давлению в жидкости при  $l = d$

$$\lambda = \frac{\Delta p_{тр}}{(\rho u^2 / 2)}.$$

Для некруглых труб в формулу Дарси-Вейсбаха (5) вместо  $d$  вводится гидравлический диаметр  $d_r$ .

Потери давления на местных сопротивлениях вычисляются по формуле Вейсбаха

$$\Delta p_m = \zeta \frac{\rho u^2}{2} \quad (6)$$

где  $\zeta$  – коэффициент местного сопротивления, величина безразмерная и численно равная отношению потери давления на сопротивлении к динамическому давлению в потоке.

$$\zeta = \Delta p_m / (\rho u^2 / 2)$$

Коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  зависит от числа Рейнольдса и шероховатости трубы. Эта зависимость называется законом сопротивления. Для некруглых труб он может также зависеть от формы сечения трубы.

Коэффициенты местных сопротивлений  $\zeta$  зависят от числа Рейнольдса только при ламинарном режиме течения, который редко реализуется в технических трубопроводах. При турбулентном движении  $\zeta$  считается зависящим только от вида и конструктивного исполнения местного сопротивления.

Значения коэффициентов сопротивления, как правило, определяются опытным путем и в обобщенном виде содержатся в справочниках в виде эмпирических формул, таблиц, графиков.

## 4.2. Шероховатость труб

Наличие шероховатости внутренних стенок труб приводит к тому, что при определенных режимах течения обтекание бугорков шероховатости потоком жидкости происходит с образованием на них

вихрей. Как и всякое вихреобразование в потоке это приводит к повышению потерь давления в трубах. Шероховатость труб различают по форме бугорков, их размерам, расстояниям между ними. Шероховатость может быть равномерной (равномерно-зернистой) и неравномерной. Большинство технических труб имеет неравномерную шероховатость.

Равномерно-зернистая шероховатость характеризуется средней высотой  $\Delta$  бугорков на поверхности трубы. Средняя высота  $\Delta$  измеряется в миллиметрах и называется абсолютной шероховатостью. Отношение  $\Delta$  к диаметру трубы называется относительной шероховатостью  $\bar{\Delta} = \Delta/d$ . Для технических расчетов труб с неравномерной шероховатостью используется понятие эквивалентной шероховатости, абсолютная величина  $K_s$ , которой соответствует средней высоте бугорков равномерно-зернистой шероховатости  $\Delta$ , вызывающей те же потери давления, что и в реальных условиях.

В табл. 5 даны значения эквивалентной шероховатости для труб из различных материалов. В таблице под чертой приведены средние значения шероховатости  $K_s$ .

Таблица 5. Значения  $K_s$  для труб из различных материалов

Материал труб	Состояние труб	$K_s$ , мм
Рукава и шланги резиновые		0,03
Тянутые из стекла и цветных металлов	новые	$\frac{0,001 - 0,01}{0,005}$
	новые	$\frac{0,02 - 0,05}{0,03}$
Стальные бесшовные	бывшие в употреблении	$\frac{0,15 - 0,3}{0,02}$
	новые	$\frac{0,03 - 0,1}{0,05}$

Материал труб	Состояние труб	$K_3$ , мм
	бывшие в употреблении (ржавые)	$\frac{0,8 - 1,5}{1,0}$
Стальные оцинкованные	новые	$\frac{0,1 - 0,2}{0,15}$
	бывшие в употреблении	$\frac{0,4 - 0,7}{0,5}$
Чугунные	новые	$\frac{0,2 - 0,5}{0,3}$
	бывшие в употреблении	$\frac{0,5 - 1,5}{1,0}$
Асбоцементные	новые	$\frac{0,05 - 0,1}{0,085}$
	бывшие в употреблении	0,6
Бетонные	при хорошей поверхности с затиркой	$\frac{0,3 - 0,8}{0,5}$
	с грубой (шероховатой) поверхностью	3 – 9

### 4.3. Законы сопротивления

Законом сопротивления является зависимость  $\lambda(Re, K_3/d)$ . На основе многочисленных экспериментов установлены следующие закономерности гидравлического сопротивления круглых труб, приведенные в табл. 6. При ламинарном режиме течения ( $Re < 2300$ ) шероховатость труб не оказывает влияния на коэффициент

сопротивления, и закон сопротивления соответствует теоретическому решению Пуазейля для гладких труб,  $\lambda = 64/Re$ .

При турбулентном режиме течения в определенном диапазоне чисел Рейнольдса ( $4000 < Re < Re_{пред}$ ) шероховатость также не сказывается на законе сопротивления, и он имеет вид, установленный

Блазиусом для гладких труб:  $\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}$ . Имеет место так называемая

зона гидравлически гладких труб. Предельное значение числа Рейнольдса  $Re_{пред}$ , выше которого начинает сказываться шероховатость, определяется величиной, эквивалентной относительной шероховатости  $K_3/d$ .

Таблица 6. Законы сопротивления

Зона сопротивления	Границы зоны	Закон сопротивления
1. Ламинарное течение	$Re < 2300$	$\lambda = 64/Re$ – закон Гагена-Пуазейля
2. Зона гидравлически гладких труб при турбулентном режиме течения	$4000 < Re < 20 \frac{d}{K_3}$	$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}$ – формула Блазиуса; $\lambda = \frac{1}{(1,8 \cdot \lg Re - 1,64)^2}$ – формула Филоненко-Альтшуля
3. Переходная зона (от зоны гидравлически гладких труб к зоне квадратичного сопротивления)	$20 \frac{d}{K_3} < Re < 500 \frac{d}{K_3}$	$\lambda = 0,11 \left( \frac{K_3}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}$ – формула Альтшуля
4. Зона квадратичного сопротивления	$500 \frac{d}{K_3} < Re$	$\lambda = \frac{1}{\left( 1,74 + 2 \lg \frac{d}{K_3} \right)^2}$ –

Зона сопротивления	Границы зоны	Закон сопротивления
		формула Прандтля – Никурадзе $\lambda = 0,1 \left( \frac{K_{\Sigma}}{d} \right)^{0,25} -$ формула Б.Л.Шифринсона

Чем больше относительная шероховатость, тем при меньших  $Re$  она начинает сказываться (тем меньше  $Re_{\text{пред}}$ ). Для труб с неравномерной шероховатостью  $(Re)_{\text{пред}} \approx 20/(K_{\Sigma}/d)$ . Подходя к этому вопросу с другой стороны, можно говорить, что гидравлически гладкими трубами являются трубы, имеющие эквивалентную относительную шероховатость меньше некоторого предельного значения, зависящего от  $Re$ :  $K_{\Sigma}/d < (K_{\Sigma}/d)_{\text{пред}}$ . Для труб с неравномерной шероховатостью  $(K_{\Sigma}/d)_{\text{пред}} \approx 20/Re$ . Для труб с равномерно-зернистой шероховатостью в пределах до  $Re = 10^5$  имеют место следующие соотношения  $(K_{\Sigma}/d)_{\text{пред}} = 17,85 \cdot Re^{-0,875}$ ,  $(Re)_{\text{пред}} = 26,9/(K_{\Sigma}/d)^{1,143}$ .

При больших значениях числа Рейнольдса ( $Re \geq 10^6$ ) коэффициент гидравлического трения перестает зависеть от него и определяется только относительной шероховатостью труб. Имеет место так называемая зона квадратичного сопротивления или зона вполне шероховатых стенок, или зона турбулентной автомодельности. Между зоной гидравлически гладких труб и зоной квадратичного сопротивления лежит переходная зона, в которой  $\lambda = f(Re, K_{\Sigma}/d)$ . Значения коэффициента гидравлического трения  $\lambda$  рассчитываются по формулам табл. 6 для заданных  $Re$  и шероховатости  $K_{\Sigma}/d$ .

#### 4.4. Местные сопротивления

Некоторые виды местных сопротивлений и их коэффициенты сопротивлений представлены в Приложении.

Компенсаторы устанавливаются на магистральных трубопроводах через определенные промежутки друг от друга и, деформируясь, принимают на себя те температурные напряжения, которые могут

возникнуть в трубопроводе при колебаниях его температуры. Например, стальной трубопровод длиной 60 м при изменении температуры на 200 К изменяет свою длину на 150 мм.

Более подробные сведения по различным типам местных сопротивлений находятся в справочниках [3-4].

## 5. Основные принципы расчета сложных трубопроводов

### 5.1. Общая характеристика трубопроводов

Трубопроводы применяются для транспортировки жидкостей, газов и других текучих сред. Трубопроводы подразделяются на простые и сложные. К простым относятся трубопроводы, не имеющие ответвлений. Сложные трубопроводы имеют разветвления и состоят из соединенных последовательно или параллельно простых трубопроводов. В зависимости от роли местных сопротивлений трубопроводы могут быть короткими и длинными. К коротким относятся трубопроводы, в которых потери давления на местных сопротивлениях составляют более 5-10 % от потерь на трение в трубах. Остальные трубопроводы относятся к длинным, и при их расчетах местные потери практически не учитываются.

При гидравлическом расчете сложных трубопроводов определяются потери давления  $\Delta p$  и распределение расходов жидкости  $Q$  по всем его участкам. Зная, например, потери давления, можно определить мощность  $N$ , необходимую для обеспечения заданного расхода жидкости  $N = Q\Delta p$ .

Для выполнения расчетов принимается принцип наложения потерь, в соответствии с которым полные потери давления  $\Delta p_{\Pi}$  в простом трубопроводе представляют собой сумму потерь на трение по длине  $\Delta p_{\text{тр}}$  и потерь на всех местных сопротивлениях  $\Delta p_{\text{м}}$ :  $\Delta p_{\Pi} = \Delta p_{\text{тр}} + \Sigma \Delta p_{\text{м}}$ , каждая из которых рассчитывается по формулам (5) и (6). Используя связь между средней скоростью  $u$  и расходом  $Q$ , удобнее в эти формулы ввести расход. Для круглой трубы

$u = Q/S = \left(\frac{Q}{\pi d^2/4}\right)$ ; и формулы для расчета потерь давления принимают вид

$$\Delta p_{\text{тр}} = \lambda \frac{8l\rho Q^2}{\pi^2 d^5}; \quad \Delta p_{\text{м}} = \zeta \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 d^4}. \quad (7)$$

## 5.2. Простой трубопровод постоянного сечения

Такой трубопровод представляет собой ряд местных сопротивлений, последовательно соединенных между собой одинаковыми трубами постоянного диаметра  $d$  с общей длиной  $l$  (рис. 1).

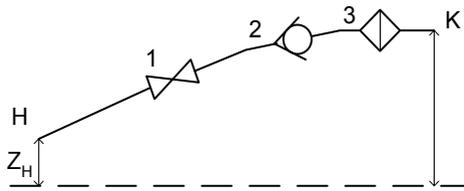


Рис. 1. Схема простого трубопровода  
1 - вентиль; 2 - обратный клапан; 3 - фильтр

Расход жидкости  $Q$  и ее скорость на всем протяжении трубопровода есть величина постоянная, и уравнение Бернулли для начального и конечного его сечений будет иметь вид

$$\rho g z_{\text{н}} + p_{\text{н}} = \rho g z_{\text{к}} + p_{\text{к}} + \Delta p_{\text{п}}, \quad (8)$$

Полные потери давления  $\Delta p_{\text{п}}$  в нем складываются из потерь на трение в трубах и потерь на местные сопротивления

$$\Delta p_{\text{п}} = \Delta p_{\text{тр}} + \sum_{i=1}^n \Delta p_{\text{Mi}} = \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 d^4} \quad (9)$$

Пьезометрическое давление в начальном сечении трубопровода  $p_H$  называют потребным давлением. Из (8) следует  $p_H = p_{CT} + \Delta p_{\Pi}$ , где  $p_{CT} = p_K + \rho g(z_K - z_H)$ .

При расчете простого трубопровода на основе формул (8), (9) можно решить следующие задачи: а) определить потребное давление для обеспечения заданного расхода жидкости (все параметры жидкости и трубопровода известны); б) при заданном давлении  $p_H$  определить расход жидкости; в) при заданных давлении  $p_H$ , расходе  $Q$  и местных сопротивлениях определить необходимый диаметр труб.

Разветвленные трубопроводы представляют собой то или иное соединение простых трубопроводов.

### 5.3. Последовательное соединение простых трубопроводов

При последовательном соединении конечная точка одного простого трубопровода соединяется с начальной точкой другого (рис.2).

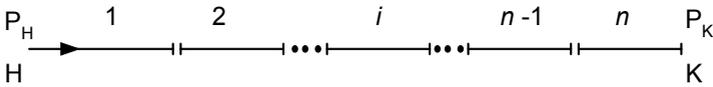


Рис. 2. Последовательное соединение простых трубопроводов 1,2,...,i,..., n-1, n.

При последовательном соединении расход жидкости во всех трубопроводах одинаков

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_i = \dots = Q_{n-1} = Q_n.$$

Полные потери давления между начальным и конечным сечениями равны сумме потерь на каждом из участков

$$\Delta p_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \Delta p_i.$$

В соответствии с уравнением Бернулли (4) давление в начальном сечении  $p_H$  будет равно

$$p_H = p_K + \rho g(z_K - z_H) + \frac{\rho(u_K^2 - u_H^2)}{2} + \Delta p_{\Pi}. \quad (10)$$

#### 5.4. Параллельное соединение трубопроводов

При параллельном соединении трубопроводов все они имеют общие начальную (Н) и конечную (К) точки (рис. 3).

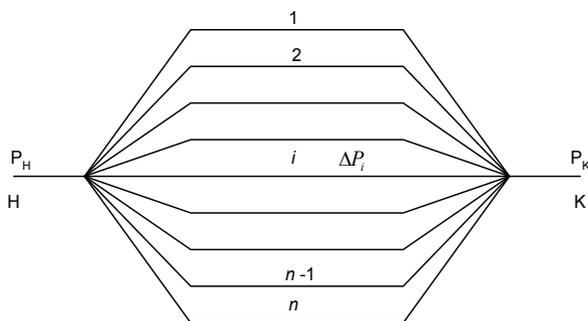


Рис. 3. Параллельное соединение трубопроводов

В силу указанного соединения уравнение Бернулли для начального (Н) и конечного (К) сечения каждого трубопровода будет иметь один и тот же вид

$$\frac{\rho u_H^2}{2} + \rho g z_H + p_H = \frac{\rho u_K^2}{2} + \rho g z_K + p_K + \Delta p_i$$

Следовательно, потери давления во всех ветвях параллельного соединения будут одинаковы

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 = \dots = \Delta p_i = \dots \Delta p_{n-1} = \Delta p_n. \quad (11)$$

Из уравнения неразрывности сумма расходов в ветвях равна полному подводимому расходу

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_i + \dots + Q_{n-1} + Q_n = Q. \quad (12)$$

Потери давления  $\Delta p_i$  выражаются через соответствующие расходы по формулам (7) вида  $\Delta p_i = cQ_i^2$ . Поэтому система (11), (12) содержит  $n$  уравнений для  $n$  неизвестных  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  и дает возможность решить задачу о распределении расходов по ветвям при заданных общем расходе  $Q$  и гидравлических параметрах ветвей.

**Пример.** Пусть имеется два параллельно соединенных простых трубопровода с известными гидравлическими характеристиками ( $l, d, \lambda, \xi$ ), к которым подводится расход  $Q$  (рис. 4). Найти расходы в ветвях  $Q_1, Q_2$ .

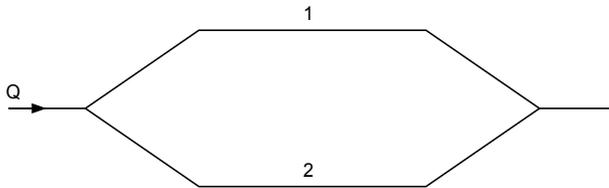


Рис. 4

Потери давления в каждом простом трубопроводе определяются выражением (9).

$$\begin{aligned} \Delta p_1 = c_1 Q_1^2, \quad \Delta p_2 = c_2 Q_2^2. \\ \begin{cases} c_1 Q_1^2 = c_2 Q_2^2 \\ Q_1 + Q_2 = Q \end{cases}, \end{aligned}$$

где

$$c_1 = \left( \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum_{i=1}^{n_1} \xi_{1i} \right) \frac{8\rho}{\pi^2 d_1^4}; \quad c_2 = \left( \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \sum_{i=1}^{n_1} \xi_{2i} \right) \frac{8\rho}{\pi^2 d_2^4}.$$

Решениями системы являются выражения

$$Q_1 = \frac{Q}{1 + \sqrt{c_1/c_2}}, \quad Q_2 = \frac{Q}{1 + \sqrt{c_2/c_1}}.$$

### 5.5. Разветвленный трубопровод

Разветвленный трубопровод в общем случае состоит из  $n$  ветвей, выходящих из одной точки. В конечных сечениях каждой из ветвей задано значение давления  $p_{ki}$  (рис. 5).

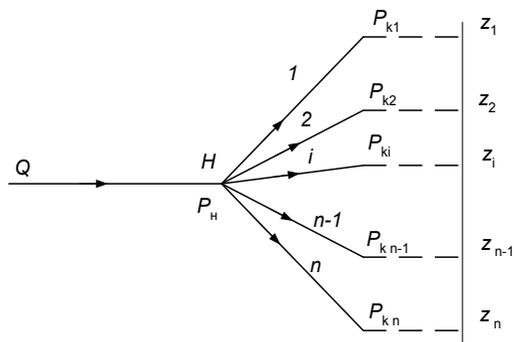


Рис. 5. Схема разветвленного трубопровода

Пренебрегая динамическими давлениями, для каждой ветви такого трубопровода можно записать выражение для давления в начальной точке  $p_n$ :

$$\left. \begin{aligned} p_n &= p_{k1} + \rho g z_1 + \Delta p_1 \\ p_n &= p_{k2} + \rho g z_2 + \Delta p_2 \\ p_n &= p_{ki} + \rho g z_i + \Delta p_i \\ p_n &= p_{kn} + \rho g z_n + \Delta p_n \end{aligned} \right\} n \quad (13)$$

и уравнение сохранения полного расхода

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_i + \dots + Q_{n-1} + Q_n = Q.$$

Потери давления в каждой ветви вновь выражаются через соответствующие расходы, и система (13), (14) дает  $(n+1)$  уравнение для  $(n+1)$  неизвестной  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, p_n$ .

Если трубопровод расположен горизонтально ( $z_1 = z_2 = \dots = z_i = \dots = z_n$ ) и конечные давления во всех ветвях одинаковы  $p_{k1} = p_{k2} = \dots = p_{kn}$ , то (13) дает  $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \dots = \Delta p_n$ , как и для параллельного соединения.

**Пример.** Пусть магистральный трубопровод с расходом  $Q$  разветвляется на два простых (рис. 6), гидравлические характеристики которых и давление на выходе из них  $p_k$  известны. Необходимо найти расходы жидкости  $Q_1, Q_2$  в ветвях и необходимое давление в точке разветвления  $p_n$ .

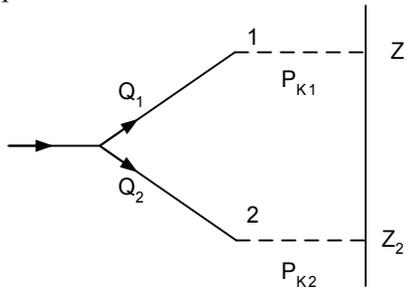


Рис. 6. К расчету разветвленного трубопровода

Так же как и в примере к предыдущему пункту 5.4, для потерь давления в ветвях имеем  $\Delta p_1 = c_1 Q_1^2$ ,  $\Delta p_2 = c_2 Q_2^2$ , и для нахождения

ния искомых величин получаем систему алгебраических уравнений с известными правыми частями:

$$\begin{aligned} p_n &= p_{к1} + \rho g z_1 + c_1 Q_1^2 \\ c_1 Q_1^2 - c_2 Q_2^2 &= p_{к2} - p_{к1} + \rho g (z_2 - z_1). \\ Q_1 + Q_2 &= Q \end{aligned} \quad (15)$$

Второе уравнение в (15) получается взаимным вычитанием первых двух уравнений системы (13).

### 5.6. Сложный трубопровод с раздачей жидкости ответвлениями

Рассматриваемый трубопровод разветвляется в нескольких точках:  $A, B, D$  (рис. 7).

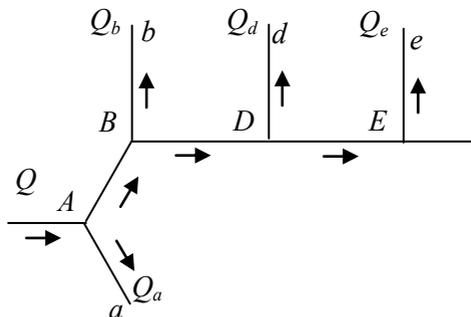


Рис. 7. Пример схемы сложного трубопровода

Ответвлениями жидкость подается к точкам  $a, b, d, e$  с расходами  $Q_a, Q_b, Q_d, Q_e$ . Известны гидравлические параметры всех участков трубопровода. Для простоты будем считать трубопровод расположенным в горизонтальной плоскости и давление на выходе каждого ответвления одинаковым  $p_a = p_b = p_d = p_e$ . Задача состоит в опреде-

лении расходов в ответвлениях  $Q_a, Q_b, Q_d, Q_e$  и потребного давления в точке  $A(p_A)$  при известном полном расходе  $Q$ , подводимом к этой точке. Динамическим давлением будем пренебрегать.

Для расчета необходимо составить систему уравнений, пользуясь следующим правилом. Для всех точек разветвления ( $A, B, D$ ) идя от последней ( $D$ ) к начальной ( $A$ ), то есть против движения жидкости, записываем значения давления в них  $p_A, p_B, p_D$  через давление в тех точках, где оно известно, и потери давления на всех участках от этих известных точек до рассматриваемой точки разветвления. Например, для точки  $D$ , рассматривая разветвленный трубопровод с ветвями  $Dd$  и  $De$ , записываем

$$\left. \begin{aligned} p_D &= p_e + \Delta p_{De} = p_e + c_{De} Q_e^2 \\ p_D &= p_d + \Delta p_{Dd} = p_d + c_{Dd} Q_d^2 \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

По условию  $p_e = p_d$  и из (16) получаем первое уравнение

$$c_{De} Q_e^2 = c_{Dd} Q_d^2. \quad (17)$$

Для точки разветвления  $B$  считаем известным давление  $p_b$  и давление в точке  $D$ , так как последнее выписано выше (16).

Поэтому можно записать

$$\left. \begin{aligned} p_B &= p_b + \Delta p_{Bb} \\ p_B &= p_D + \Delta p_{BD} = p_d + \Delta p_{Dd} + \Delta p_{BD} \end{aligned} \right\},$$

откуда

$$p_{Bb} = \Delta p_{Dd} + \Delta p_{BD}. \quad (18)$$

Кроме того,  $Q_{BD} = Q_d + Q_e$ , и из (18) вытекает следующее уравнение

$$\left. \begin{aligned} c_{Bb} Q_b^2 &= c_{Dd} Q_d^2 + c_{BD} Q_{BD}^2 \\ c_{Bb} Q_b^2 &= c_{Dd} Q_d^2 + c_{BD} (Q_d + Q_e)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

Используя (17), окончательно получаем

$$c_{Bb}Q_b^2 = \left[ c_{Dd} + c_{BD} \left( 1 + \sqrt{c_{Dd}/c_{De}} \right)^2 \right] Q_d^2. \quad (20)$$

Аналогичным образом для точки  $A$  имеем

$$\left. \begin{aligned} p_A &= p_a + \Delta p_{Aa} = p_a + c_{Aa}Q_a^2 \\ p_A &= p_B + \Delta p_{AB} = p_b + \Delta p_{Bb} + \Delta p_{AB} \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

или

$$\Delta p_{Aa} = \Delta p_{Bb} + \Delta p_{AB}. \quad (22)$$

Так как  $Q_{AB} = Q_b + Q_d + Q_e$ , то (22) записывается следующим образом

$$c_{Aa}Q_a^2 = c_{Bb}Q_b^2 + c_{AB}(Q_b + Q_d + Q_e)^2. \quad (23)$$

Таким образом, уравнения (17), (19), (23) и уравнение сохранения полного расхода дают систему четырех алгебраических уравнений для четырех неизвестных  $Q_a, Q_b, Q_d, Q_e$

$$\begin{aligned} c_{Dd}Q_d^2 &= c_{De}Q_e^2 \\ c_{Bb}Q_b^2 &= c_{Dd}Q_d^2 + c_{BD}(Q_d + Q_e)^2 \\ c_{Aa}Q_a^2 &= c_{Bb}Q_b^2 + c_{AB}(Q_b + Q_d + Q_e)^2 \\ Q_a + Q_b + Q_d + Q_e &= Q \end{aligned} \quad (24)$$

Давление в начальной точке  $p_A$  определяется по формулам (21), в которые подставляются найденные расходы, например  $Q_a$ .

## 5.7. Указания к выполнению курсовой работы

В курсовой работе одним из заданий является расчет сложного трубопровода, имеющего схему, показанную на рис. 8.

Задание разбивается на два этапа. На первом этапе рассчитывается нормальный режим работы трубопровода. При этом предполагается, что вентили на всех участках, обозначенных римскими цифрами I-VIII, открыты, а вентили на перемычках  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ , – закрыты. Схема трубопровода в этой ситуации имеет вид, показанный на рис. 9. Заданы давление в начальной точке  $p_0$ , расходы через ответвления 1-8 и характеристики всех линейных участков.

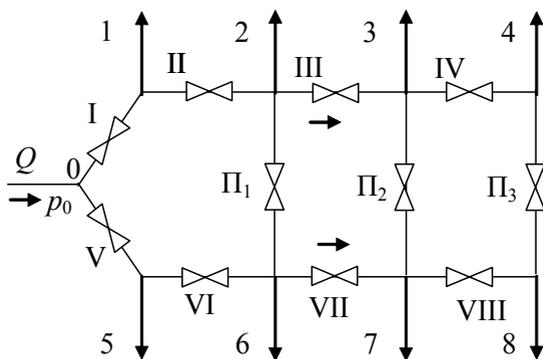


Рис. 8. Схема сложного трубопровода

На этом этапе составляется система уравнений, аналогичных уравнениям (24). Из этой системы находят значения суммарных коэффициентов местных сопротивлений ответвлений  $\zeta_1, \dots, \zeta_2$ , которые в последующем используются для расчета трубопровода в аварийном режиме.

На втором этапе – аварийный режим работы трубопровода. В этом режиме с помощью вентиляй из схемы выключается одно из ответвлений, а поступление жидкости в остальные осуществляется через одну из перемычек. Например, если закрыты вентили на участках I и II (выключено ответвление 1), а поступление жидкости в ответвления 2, 3, 4 осуществляется через перемычку  $\Pi_2$  (открыт вентиль  $\Pi_2$ ) (рис. 10).

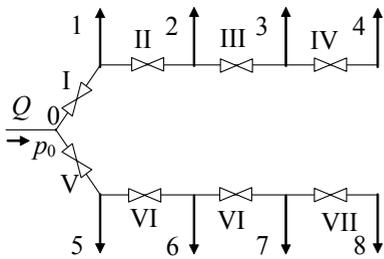


Рис. 9. Схема сложного трубопровода в нормальном режиме

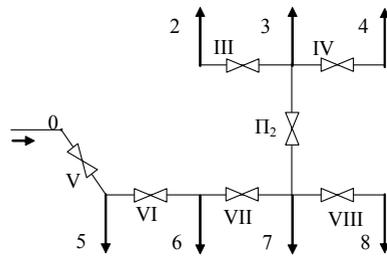


Рис. 10. Схема сложного трубопровода в аварийном режиме

Считая, что полный расход жидкости остался прежним, требуется определить, как перераспределятся расходы по ответвлениям и как изменится требуемое давление  $p_0$ . Для расчета составляется соответствующая схеме система уравнений (типа 24), которая решается относительно неизвестных расходов. При этом используются полученные выше значения суммарных коэффициентов местных сопротивлений ответвлений.

В обоих случаях (в нормальном и аварийном режимах) рассчитываются потери давления на всех линейных участках I-VIII и ответвлениях 1-8.

Данные расчетов сводятся в табл. 7 и табл. 8.

Таблица 7. Распределение расходов и потерь давления в ветвях 1 – 8

		1	2	3	4	5	6	7	8
Нормальный режим	$Q, \text{ м}^3/\text{ч}$								
	$\Delta P, \text{ Н/м}^2$								
Аварийный режим	$Q, \text{ м}^3/\text{ч}$								
	$\Delta P, \text{ Н/м}^2$								

Таблица 7. Распределение расходов и потерь давления в ветвях I – VIII

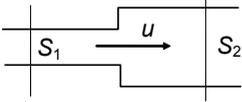
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Нормальный режим	$Q, \text{ м}^3/\text{ч}$								
	$\Delta P, \text{ Н/м}^2$								
Аварийный режим	$Q, \text{ м}^3/\text{ч}$								
	$\Delta P, \text{ Н/м}^2$								

### Литература

1. Повх И.Л. Техническая гидромеханика / Повх И.Л. – Изд.2-е перераб. и доп. - Ленинград: Машиностроение, 1976. – 502 с.
2. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика / Емцев Б.Т. - Изд.2-е перераб. и доп. - Москва: Машиностроение, 1987. – 440 с.
3. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / Идельчик И.Е., под ред. Штейнберг М.О. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва : Машиностроение, 1992. - 672 с.
4. Справочное пособие по гидравлике, гидромашинам и гидроприводам / Вильнер Я.М., Ковалев Я.Т., Некрасов Б.Б., Беленков Ю.А., Кирилловский Ю.Л., под общ.ред. Некрасов Б.Б. - 2-е изд., перераб. и доп.. - Минск : Вышэйшая школа, 1985. - 382 с.

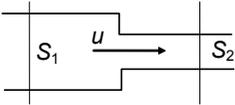
## Приложение

### 1. Резкое расширение



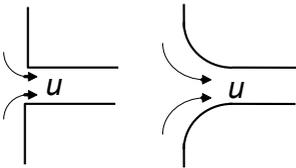
$S_1/S_2$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\xi$	0,64	0,36	0,16	0,04	0

### 2. Резкое сужение



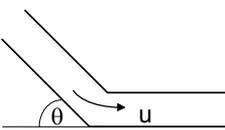
$S_1/S_2$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\xi$	0,64	0,36	0,16	0,04	0

### 3. Вход в трубу



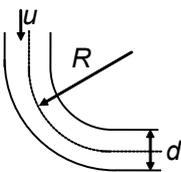
$\xi = 0,5$  при острых кромках;  
 $\xi = 0,2$  при закругленных кромках;  
 $\xi = 0,05$  при плавном входе

### 4. Резкий поворот трубы



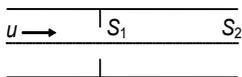
$\theta$ , град	30	40	50	60	70	80	90
$\xi$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	0,9	1,1

### 5. Плавный поворот трубы



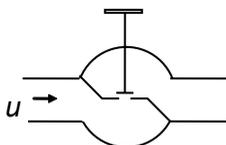
$d/2R$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\xi$	0,13	0,16	0,29	0,66	1,41	1,98

6. Диафрагма внутри трубы



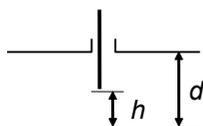
$S_1/S_2$	0,3	0,4	0,5	0,7	0,9
$\xi$	10,4	8,2	4,0	0,97	0,13

7. Вентиль



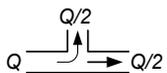
При полном открытии  $\xi = 3-5,5$

8. Задвижка (простая)

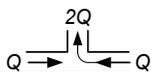


$h/d$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\xi$	$\infty$	35	4,6	0,98	0,17	0

9. Тройники с соединением с разделением потоков



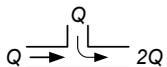
$$\xi = 0,9 \div 1,2$$



$$\xi = 1,0 \div 2,5$$

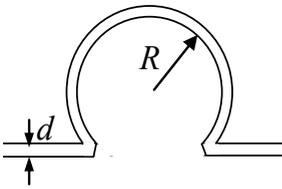


$$\xi = 1,0 \div 1,5$$



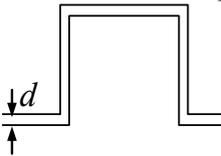
$$\xi = 0,5 \div 0,6$$

10. Компенсатор лирообразный



$d$ , мм	50	100	200	300	400	500
$\xi$	1,7	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6

11. Компенсатор П-образный



$d$ , мм	50	100	200	300	400	500
$\xi$	2,0	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9

## КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

### Экзаменационные вопросы по дисциплине «Механика жидкости и газа»

1. Гидромеханическое представление о жидкостях как сплошной и текучей среде. Фундаментальные свойства жидкостей и газов - сплошность и текучесть.
2. Плотность жидкостей и газов и ее зависимость от температуры и давления (уравнения состояния) для идеальных газов и капельных жидкостей. Коэффициенты теплового расширения и сжимаемости. Связь коэффициента сжимаемости жидкостей со скоростью звука.
3. Вязкость жидкостей. Физическая природа сил вязкого трения. Вязкие напряжения. Закон вязкого трения Ньютона. Динамический и кинематический коэффициенты вязкости и их зависимость от температуры.
4. Свободная поверхность жидкости и ее особенности. Поверхностная энергия. Коэффициент поверхностного натяжения в жидкостях. Капиллярный скачок давления. Кривизна поверхности. Главные радиусы кривизны. Формула Лапласа.
5. Смачивание жидкостью твердых поверхностей. Определение уровня жидкости в круглом капилляре.
6. Равновесная форма объема жидкости со свободной поверхностью. Капиллярный распад жидких струй.
7. Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкости. Число Рейнольдса и его критические значения. Зависимость критических значений числа Рейнольдса от внешних факторов (вибраций, неплавных входов в трубу).
8. Основные принципы описания потоков жидкостей и газов. Поля давления, температуры и плотности. Физический смысл их градиентов. Изотермы, изобары, изохоры.
9. Поле скоростей. Линии и трубки тока. Объемный и массовый расходы жидкости. Связь между расходом и средней скоростью течения жидкости.

10. Классификация сил, действующих в жидкости. Силы массовые (объемные) и поверхностные. Напряжения массовых и поверхностных сил.
11. Силы давления и их физическая природа. Напряжение сил давления (давление).
12. Равновесие жидкости в отсутствии массовых сил. Закон Паскаля.
13. Гидравлический пресс.
14. Равновесие жидкости в присутствии массовых сил. Основное дифференциальное уравнение гидростатики.
15. Условия возможности равновесия неизотермической жидкости в поле силы тяжести. Естественная (свободная) конвекция.
16. Распределение давления в тяжелой несжимаемой жидкости. Поверхности уровня. Форма свободной поверхности.
17. Сообщающиеся сосуды. Жидкостные манометры и микроманометры.
18. Определение уровней жидкостей в сообщающихся сосудах, заполненных жидкостями с разной плотностью.
19. Распределение давления в тяжелом сжимаемом газе. Барометрическая формула.
20. Распределение давления и форма поверхности жидкости в сосудах, движущихся равноускоренно.
21. Распределение давления и форма поверхности жидкости во вращающемся сосуде.
22. Определение сил давления, действующих на криволинейную поверхность и на тела, погруженные в тяжелую несжимаемую жидкость. Закон Архимеда.
23. Определение вертикальных и горизонтальных составляющих сил, действующих на тела, погруженные в тяжелую несжимаемую жидкость.
24. Плавание тел и его устойчивость. Особенности плавания тел, не полностью погруженных в жидкость.
25. Одномерные течения жидкостей и газов (гидравлическое приближение).
26. Законы сохранения в гидрогазодинамике. Закон сохранения массы и уравнение неразрывности (сплошности) в гидравлическом приближении.

27. Закон сохранения импульса и уравнение движения в гидравлическом приближении.
28. Закон сохранения момента импульса и его применение к движению жидкостей в турбинах. Турбинное уравнение.
29. Закон сохранения энергии в гидравлическом приближении. Уравнение Бернулли.
30. Уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости.
31. Уравнение Бернулли для адиабатного течения идеального газа.
32. Силовая интерпретация уравнения Бернулли. Напор.
33. Уравнение Бернулли для вязкой несжимаемой жидкости. Потери энергии и потери давления.
34. Определение потерь давления в трубах и на местных сопротивлениях. Формулы Дарси и Дарси-Вейсбаха.
35. Закон сопротивления при ламинарном течении в трубах.
36. Закон сопротивления при турбулентном течении жидкостей в гладких трубах (Закон сопротивления Блазиуса).
37. Законы сопротивления в шероховатых трубах.
38. Потери давления при внезапном расширении и сужении потока. Формула Борда.
39. Потери давления на местных сопротивлениях (задвижка, клапан, кран). Поворотные устройства.
40. Дроссельные расходомеры.
41. Трубка Вентури для измерения расхода жидкости.
42. Трубка Пито для измерения скорости жидкости.
43. Диффузоры и конфузоры. Изменение параметров потока несжимаемой жидкости (скорости и давления) при течении в диффузорах и конфузорах.
44. Истечение несжимаемой жидкости через отверстие в баке. Формула Торичелли. Коэффициенты скорости и расхода. Насадки.
45. Основные задачи расчета трубопроводных систем. Методика расчета потерь давления в простом трубопроводе.
46. Расчет потерь давления при последовательном соединении простых трубопроводов.
47. Расчет потерь давления при параллельном соединении простых трубопроводов.
48. Расчет потерь давления в разветвленном трубопроводе.
49. Кавитация.

50. Распространение малых возмущений (звука) в жидкостях и газах. Скорость звука. Число Маха. Гидравлический удар.
51. Одномерные адиабатные течения идеального газа. Основные уравнения.
52. Связь между параметрами газа в потоке с параметрами заторможенного газа.
53. Истечение газа через отверстие в баке. Формула Сен-Венана-Вентцеля.
54. Критические значения параметров газа и их связь с параметрами заторможенного газа.
55. Явление запираания потока при истечении газа через отверстие в баке. Критический расход газа.
56. Движение газа в трубе переменного сечения. Уравнение Гюгонио.
57. Изменение скорости газа при движении в диффузорах и конфузорах.
58. Условия перехода значений скорости газа через скорость звука.
59. Сопло Лавала и режимы его работы.
60. Распространение конечных возмущений в газах. Механизм формирования скачка уплотнения (ударной волны).
61. Основные уравнения (неразрывности, движения, Бернулли) для ударной волны.
62. Соотношения между скоростями газа перед и за фронтом ударной волны.
63. Скоростной коэффициент и его связь с числом Маха.
64. Соотношения для скачков давления, плотности и температуры в ударной волне.
65. Скорость распространения ударной волны.
66. Уравнение ударной адиабаты (адиабата Гюгонио).
67. Обтекание тел потоком жидкости и газа. Пограничный слой. Зависимость толщины пограничного слоя от числа Рейнольдса.
68. Отрыв пограничного слоя. Вихревая зона.
69. Силы, действующие на тела, обтекаемые потоком жидкости и газа. Коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы.
70. Зависимость коэффициента лобового сопротивления при обтекании шара от числа Рейнольдса. Формула Стокса. Кризис сопротивления.

71. Механизм формирования подъемной силы. Качество крыла.
72. Эффект Магнуса.
73. Характер течения жидкостей на начальном участке и при стабилизированном течении жидкостей в круглых трубах (течение Пуазейля). Профиль скорости. Расход. Потери давления.

## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

### Содержание учебного материала

#### Раздел I. Основные свойства жидкостей и газов

##### Тема 1.1. Введение

Предмет науки. Роль жидкостей и газов в природных явлениях, технике и обеспечении жизнедеятельности человека. История развития механики жидкостей и газов. Гидрогазодинамика как составная часть механики сплошной среды. Связь гидрогазодинамики с другими отраслями знаний.

Гидромеханическое представление о жидкостях как сплошной и текучей среде. Фундаментальные свойства жидкостей и газов – сплошность и текучесть.

##### Тема 1.2. Плотность жидкостей и газов и их уравнения состояния

Плотность жидкостей и газов и ее зависимость от температуры и давления. Уравнения состояния для идеальных газов (уравнение Клапейрона-Менделеева) и капельных жидкостей. Коэффициенты теплового расширения и сжимаемости. Особенности теплового расширения воды. Связь коэффициента сжимаемости жидкостей со скоростью звука. Адиабатическая и изотермическая скорости звука в идеальном газе. Понятие о несжимаемой жидкости.

##### Тема 1.3. Вязкость

Физическая природа сил вязкого трения. Вязкое трение как результат процессов переноса импульса молекулами. Вязкие напряжения. Закон вязкого трения Ньютона. Динамический и кинематический коэффициенты вязкости и их зависимость от температуры. Диссипация энергии как результат вязкого трения.

##### Тема 1.4. Поверхностное натяжение

Свободная поверхность жидкости и ее особенности. Поверхностная энергия. Коэффициент поверхностного натяжения. Капиллярный скачок давления. Кривизна поверхности. Главные радиусы кривиз-

ны. Формула Лапласа. Смачивание и несмачивание жидкостью твердых поверхностей. Определение уровня жидкости в капиллярах.

Равновесная форма объема жидкости со свободной поверхностью. Капиллярный распад жидких струй.

Роль капиллярных явлений в природе и их использование в технике (капиллярные волны, распыленные потоки, тепловые трубы и т.п.). Течения жидкостей со свободной поверхностью - пленочные и струйные.

#### Тема 1.5. Режимы течения

Ламинарный и турбулентный режимы течения. Их принципиальные различия. Критические значения скорости. Число Рейнольдса и его критические значения. Зависимость критических значений числа Рейнольдса от внешних факторов (вибраций, неплавных входов в трубу). Критическое значение числа Рейнольдса при течении жидкостей в трубах.

### Раздел II. Статика жидкостей и газов

#### Тема 2.1. Основные положения статики

Основные задачи статики. Классификация сил, действующих в жидкости. Силы массовые (объемные) и поверхностные. Напряжения массовых и поверхностных сил. Тензор напряжений. Силы давления и их физическая природа. Напряжение сил давления (давление).

Равновесие жидкости в отсутствии массовых сил. Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Гидравлические усилители в технических устройствах.

#### Тема 2.2. Равновесие жидкости в поле массовых сил

Равновесие жидкой частицы в присутствии массовых сил. Основное дифференциальное уравнение гидростатики (уравнение Эйлера). Потенциальность массовых сил как условие возможности равновесия жидкости в поле массовых сил. Условия возможности равновесия неизотермической жидкости в поле силы тяжести. Естественная (свободная) конвекция.

Тема 2.3. Распределение давления в жидкостях и газах в поле силы тяжести

Распределение давления в тяжелой несжимаемой жидкости. Поверхности уровня. Форма свободной поверхности. Сообщающиеся сосуды. Определение уровней жидкостей в сообщающихся сосудах, заполненных жидкостями с разной плотностью. Жидкостные манометры и микроманометры.

Распределение давления в тяжелом сжимаемом газе. Барометрическая формула. Альтиметры.

Тема 2.4. Силы давления, действующие на тела, погруженные в жидкость

Определение сил давления, действующих на криволинейную поверхность и на тела, погруженные в тяжелую несжимаемую жидкость. Определение вертикальных и горизонтальных составляющих этих сил. Закон Архимеда. Центр давления.

Плавание тел и его устойчивость. Особенности плавания тел, не полностью погруженных в жидкость.

Тема 2.5. Распределение давления в поле сил инерции

Распределение давления и форма поверхности жидкости в сосудах, движущихся равноускоренно.

Распределение давления и форма поверхности жидкости во вращающемся сосуде.

Циклонные аппараты и сепараторы.

Раздел III. Одномерные течения жидкостей и газов

Тема 3.1. Основные принципы описания потоков жидкостей и газов

Основные принципы описания потоков жидкостей и газов. Поля давления, температуры и плотности. Физический смысл их градиентов. Изотермы, изобары, изохоры.

Поле скоростей. Линии и трубки тока. Поток жидкости через произвольную поверхность. Дивергенция и ротор скорости – их физический смысл.

Объемный и массовый расходы жидкости. Связь между расходом и средней скоростью течения жидкости.

Понятие об одномерных течениях жидкостей и газов.

Тема 3.2. Законы сохранения. Уравнения неразрывности и Бернулли

Законы сохранения в гидрогазодинамике.

Закон сохранения массы и уравнение неразрывности (сплошности) для одномерных течений.

Закон сохранения энергии для одномерных течений. Общий вид уравнения Бернулли. Функция давления.

Тема 3.3. Уравнение движения и турбинное уравнение

Закон сохранения импульса и уравнение движения для одномерных течений.

Закон сохранения момента импульса и его применение к движению жидкостей в турбинах. Турбинное уравнение.

Раздел IV. Одномерные течения несжимаемой жидкости

Тема 4.1. Уравнения неразрывности и Бернулли для несжимаемой жидкости

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости. Изменение скорости потока при изменении площади его сечения.

Уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости. Силовая интерпретация уравнения Бернулли. Напор. Изменение пьезометрического давления в жидкости при изменении скорости ее течения. Трубка Пито для измерения скорости жидкости. Эжекция. Кавитация.

Уравнение Бернулли для вязкой несжимаемой жидкости. Потери энергии и потери давления. Общие формулы для определение потерь давления в трубах и на местных сопротивлениях. Формулы Дарси и Дарси-Вейсбаха. Коэффициенты трения в трубах и местных сопротивлениях.

Тема 4.2. Определение потерь давления в трубах и на местных сопротивлениях

Определение потерь давления при течении жидкости в трубах. Закон сопротивления при ламинарном течении в трубах. Закон сопротивления при турбулентном течении жидкостей в гладких трубах (Закон сопротивления Блазиуса). Законы сопротивления в шероховатых трубах.

Определение потерь давления на местных сопротивлениях. Потери давления при внезапном расширении и сужении потока. Формула Борда. Другие примеры местных сопротивлений (задвижка, клапан, кран, и т.п.). Поворотные устройства. Дроссельные расходомеры. Трубка Вентури для измерения расхода жидкости.

Тема 4.3. Течение жидкости через конфузоры, диффузоры и отверстия

Диффузоры и конфузоры. Изменение параметров потока несжимаемой жидкости (скорости и давления) при течении в диффузорах и конфузорах. Степень совершенства диффузора.

Истечение несжимаемой жидкости через отверстие в баке. Формула Торичелли. Коэффициенты скорости и расхода. Насадки.

Тема 4.4. Основные задачи и методы расчета трубопроводных систем

Мощность, затрачиваемая на движение жидкости в трубопроводе. Методика расчета потерь давления в простом трубопроводе.

Расчет потерь давления при последовательном соединении простых трубопроводов.

Расчет потерь давления при параллельном соединении простых трубопроводов.

Расчет потерь давления в разветвленном трубопроводе.

Раздел V. Одномерные течения сжимаемого газа

Тема 5.1. Основные уравнения течений сжимаемого газа

Распространение малых возмущений (звука) в жидкостях и газах. Изотермическая и адиабатическая скорости звука. Число Маха. Соотношения между амплитудами параметров в звуковой волне. Гидравлический удар.

Особенности проявления законов сохранения в сжимаемом газе. Уравнение Бернулли для изотермического течения идеального газа. Уравнение Бернулли для адиабатного течения идеального газа.

Основные уравнения адиабатных течений идеального газа. Связь между параметрами газа в потоке с параметрами заторможенного газа.

Критические значения параметров газа и их связь с параметрами заторможенного газа.

### Тема 5.2. Движение газа в трубе переменного сечения

Истечение газа через отверстие в баке. Формула Сен-Венана-Вентцеля. Явление запираания потока при истечении газа через отверстие в баке. Критический расход газа. Скоростной коэффициент и его связь с числом Маха.

Уравнение Гюгионо. Условия перехода значений скорости газа через скорость звука. Изменение скорости газа при движении в диффузорах и конфузорах. Сопло Лавала и режимы его работы.

### Тема 5.3. Ударные волны

Распространение конечных возмущений в газах. Механизм формирования скачка уплотнения (ударной волны).

Основные уравнения (неразрывности, движения, Бернулли) для ударной волны. Соотношения между скоростями газа перед и за фронтом ударной волны. Соотношения для скачков давления, плотности и температуры в ударной волне. Скорость распространения ударной волны. Уравнение ударной адиабаты (адиабата Гюгионо).

## Раздел VI. Специальные течения жидкостей и газов

### Тема 6.1. Обтекание тел потоком жидкости и газа

Течение жидкостей у твердых поверхностей. Пограничный слой. Зависимость толщины пограничного слоя от числа Рейнольдса. Отрыв пограничного слоя. Вихревая зона.

Силы, действующие на тела, обтекаемые потоком жидкости и газа. Коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы. Зависимость коэффициента лобового сопротивления при обтекании шара от числа Рейнольдса. Формула Стокса. Кризис сопротивления.

Механизм формирования подъемной силы. Качество крыла. Эффект Магнуса.

#### Тема 6.2. Характерные типы течений жидкостей

Характер течения жидкостей на начальном участке и при стабилизированном течении жидкостей в круглых трубах (течение Пуазейля). Профиль скорости. Расход. Потери давления.

Плоскопараллельные течения Пуазейля и Куэтта.

Пленочные течения жидкостей по плоской и цилиндрической насадкам.

Тема 6.3. Особенности течения электропроводных жидкостей в магнитных полях

Элементы магнитной гидродинамики. Сила Ампера и явление электромагнитной индукции в электропроводных жидкостях. МГД-насосы и МГД-генераторы.

Высокотемпературная плазма как газ электрически заряженных частиц. Газодинамические проблемы удержания плазмы в термоядерных источниках энергии. Пинч-эффект.

#### Тема 6.4. Неньютоновские жидкости

Понятие о неньютоновских жидкостях, их реологических законах и особенностях течения. Бингамовские, псевдопластичные, дилатантные и вязкоупругие жидкости.

Особенности течений эмульсий, суспензий и газожидкостных систем.

### Раздел VII. Трехмерные течения жидкости и газа

Тема 7.1. Дифференциальные уравнения механики жидкости и газа

Дифференциальное уравнение неразрывности как следствие закона сохранения массы.

Дифференциальное уравнение движения в напряжениях как следствие закона сохранения импульса.

#### Тема 7.2. Уравнение Эйлера

Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера).  
Уравнения Эйлера в форме Громека-Ламба. Интеграл Бернулли.  
Звуковые волны.

Тема 7.3. Уравнения Навье-Стокса

Дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (Уравнения Навье-Стокса). Начальные и граничные условия.

## Список рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Андрижиевский, А.А. Механика жидкости и газа: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по техническим и технологическим специальностям / А.А. Андрижиевский. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – 206 с.

2. Гиргидов, А.Д. Механика жидкости и газа (гидравлика): учебник: для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям подготовки (бакалавриат и магистратура) и программам подготовки дипломированных технических специалистов / А. Д. Гиргидов. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: ИНФРА-М, 2018. – 703 с.

3. Механика жидкости и газа: электронный учебно-методический комплекс для студентов специальностей 1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент» и 1-36 20 01 «Низкотемпературная техника» [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые дан. (6,16 Мб). – Минск: В.Г.Баштовой, А.Г.Рекс, 2013. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM), Регистрационный № БНТУ/ЭУМК-ФТУГ –93-14.

4. Баштовой, В. Г. Специальные течения жидкостей и газов: учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-43 01 06 "Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент" / В. Г. Баштовой, А. Г. Рекс; Белорусский национальный технический университет, Кафедра ЮНЕСКО "Энергосбережение и возобновляемые источники энергии". – Минск: БНТУ, 2020. – 44 с.

5. Баштовой, В. Г. Одномерные течения жидкостей и газов: учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-43 01 06 "Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент" / В. Г. Баштовой, А. Г. Рекс; Белорусский национальный технический университет, Кафедра ЮНЕСКО "Энергосбережение и возобновляемые источники энергии". – Минск: БНТУ, 2021. – 74 с. – Режим доступа: <https://rep.bntu.by/handle/data/108145>.

6. Баштовой, В. Г. Физические свойства и статика жидкостей и газов: учебно-методическое пособие по дисциплине "Механика жидкости и газа" для студентов специальности 1-43 01 06 "Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент" / В. Г. Баштовой, А. Г. Рекс; Белорусский национальный технический университет, Кафедра ЮНЕСКО "Энергосбережение и возобновляемые источники энергии". – Минск: БНТУ, 2022. – 54 с. – Режим доступа: <https://rep.bntu.by/handle/data/122118>.

7. Механика жидкости и газа: лабораторный практикум для студентов специальности 1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент» / сост.: В.Г.Баштовой, А.Г.Рекс. – Минск: БНТУ, 2015. – 76 с.

### **Дополнительная литература**

1. Гальперин Л.Г. Основы гидрогазодинамики: Курс лекций. / Л.Г.Гальперин. – Екат.: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2007. – 238 с.

2. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике / С.В.Валандер. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. Ун-та, 2005. – 304 с.

3. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика / Б.Т.Емцев. - М.: Машиностроение, 1987. – 440 с.

4. Повх И.Л.. Техническая гидромеханика / И.Л.Повх. - Л.: Машиностроение, 1976. – 504 с.

5. Дейч М.Е. Гидрогазодинамика / М.Е.Дейч, А.Е.Зарянкин. - М.: Энергоатомиздат, 1984. – 384 с.

6. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / Идельчик И.Е., под ред. Штейнберг М.О. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Машиностроение, 1992. – 672 с.

Авторы:

Виктор Григорьевич Баштовой, доктор физико-математических наук, профессор.

Тел. моб. +375-29-326-17-23.

Александр Георгиевич Рекс, профессор кафедры ЮНЕСКО «Энергосбережение и возобновляемые источники энергии» Белорусского национального технического университета, доктор физико-математических наук, доцент.

Тел. моб. +375-29-656-06-08