

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»

С. В. Гончарова  
В. М. Хвасько

**МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ.  
РАСЧЕТЫ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ.  
ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ  
И ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РАБОТ**

Пособие  
для студентов специальностей  
1-38 01 04 «Микро- и наносистемная техника»,  
1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»,  
1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области приборостроения*

Минск  
БНТУ  
2023

УДК 620.1 (075.8)  
ББК 30.3я7  
Г65

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра «Теоретическая и прикладная механика» Белорусского государственного университета (д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой *М. А. Журавков*);  
канд. техн. наук, доцент кафедры «Механика материалов и детали машин» Белорусского государственного аграрного технического университета *В. Н. Основин*

**Гончарова, С. В.**

Г65 Механика материалов. Расчеты на растяжение-сжатие. Задания для расчетно-графических и индивидуальных работ : пособие для студентов специальностей 1-38 01 04 «Микро- и наносистемная техника», 1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника», 1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности» / С. В. Гончарова, В. М. Хвасько. – Минск : БНТУ, 2023. – 48 с.  
ISBN 978-985-583-858-7.

В пособии рассмотрены примеры решения типовых задач, предложены варианты расчетно-графических (индивидуальных) работ и образцы их выполнения. Предлагаемое пособие облегчает студентам выполнение индивидуальных заданий, прививает навыки использования справочной литературы и оформления расчетно-графических и индивидуальных работ по стандартам.

УДК 620.1 (075.8)  
ББК 30.3я7

ISBN 978-985-583-858-7

© Гончарова С. В., Хвасько В. М., 2023  
© Белорусский национальный  
технический университет, 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
<b>Задача 1.</b> Проектирование бруса равного сопротивления. Определение продольных сил, напряжений, деформаций и перемещений. Построение эпюр .....	5
Пример решения задачи 1 .....	12
<b>Задача 2.</b> Расчет статически неопределимого двухступенчатого стержня.....	17
<b>Задача 3.</b> Расчет на температурные напряжения статически неопределимого двухступенчатого стержня .....	17
Пример решения задачи 2 .....	25
Пример решения задачи 3 .....	32
<b>Задача 4.</b> Расчет статически неопределимой шарнирно-стержневой системы .....	36
Пример решения задачи 4 .....	42
<b>Используемая литература</b> .....	48
<b>Рекомендуемая литература</b> .....	48

## **ВВЕДЕНИЕ**

Механика материалов – одна из основных инженерных дисциплин, изучаемых в высших учебных заведениях. Она представляет собой раздел механики твердого деформируемого тела и по своему содержанию составляет область знаний, включающих науку о сопротивлении материалов с применением основ теории упругости и пластичности, с расширением класса инженерных задач и с привлечением современных методов расчета.

В данном пособии рассмотрены статически определимые и статически неопределимые задачи по теме растяжение-сжатие [1]. По каждой задаче предложены варианты для индивидуальных и расчетно-графических работ, приведены примеры, где пошагово расписаны действия, необходимые для правильного решения.

**Задача 1**  
**ПРОЕКТИРОВАНИЕ БРУСА РАВНОГО**  
**СОПРОТИВЛЕНИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ**  
**ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ, НАПРЯЖЕНИЙ,**  
**ДЕФОРМАЦИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.**  
**ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР**

На брус квадратного или круглого поперечного сечения действуют осевые растягивающие и сжимающие силы  $F$ . Требуется спроектировать брус равного сопротивления [2].

В задаче необходимо:

1. Определить продольные усилия на каждом участке бруса и построить эпюру продольных сил.

2. Из расчета на прочность, используя для заданных материалов данные табл. 2, определить для каждого участка размеры поперечного сечения бруса (диаметр для круглого и сторону квадрата для квадратного сечения) и привести размеры в соответствии с таблицей нормальных размеров (табл. 3).

3. Вычертить в выбранном масштабе схему бруса по заданной длине и найденным размерам сечений.















4. Построить эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  и перемещений  $\Delta$ .

Расчетные схемы приведены на рис. 1, а числовые данные – в табл. 1.

*Примечание.* Данную задачу можно решить, не проектировав брус равного сопротивления. Для этого можно взять в табл. 1 площадь сечения  $A$  и построить эпюры  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\Delta$ .

Таблица 1

Числовые данные и формы сечения стержней к задаче 1

Номер варианта	Нагрузка $F$ , кН	Длина участка $a$ , м	Форма сечения	Площадь сечения $A$ , см <sup>2</sup>
1	30	0,20		20
2	45	0,25		22
3	50	0,30		18
4	25	0,22		26
5	40	0,30		15
6	35	0,20		16
7	48	0,25		23
8	46	0,35		13
9	55	0,18		20
10	28	0,23		15
11	60	0,24		16
12	75	0,40		23
13	28	0,27		15
14	56	0,24		17

Окончание табл. 1















Номер варианта	Нагрузка $F$ , кН	Длина участка $a$ , м	Форма сечения	Площадь сечения $A$ , см <sup>2</sup>
15	20	0,20		16
16	60	0,30		13
17	68	0,15		15
18	32	0,18		14
19	65	0,35		19
20	56	0,30		26
21	42	0,22		12
22	46	0,24		17
23	32	0,23		15
24	34	0,26		23
25	85	0,15		24
26	70	0,27		26
27	64	0,32		13
28	42	0,23		15

Таблица 2

Механические характеристики и допускаемые напряжения  
для материалов применительно к задаче 1

№	Материал	Модуль Юнга $E$ , МПа	Предел прочности $\sigma_B$ , МПа	Предел текучести $\sigma_T$ МПа	Допускаемые напряжения [ $\sigma$ ] МПа	
					Растяжение [ $\sigma_p$ ]	Сжатие [ $\sigma_c$ ]
1	Сталь Ст3	$2 \cdot 10^5$	380–470	240	160	160
2	Чугун серый	$1,15 \cdot 10^5$	120–380	–	40	135
3	Сплав титана	$1,1 \cdot 10^5$	800–900	700–800	350	350
4	Алюминий	$0,7 \cdot 10^5$	220	110	55	55
5	Дюралюминий	$0,7 \cdot 10^5$	450–500	330	115	115
6	Латунь	$1,0 \cdot 10^5$	400	210	105	105
7	Бронза	$1,1 \cdot 10^5$	380	160	90	90
8	Текстолит	$0,1 \cdot 10^5$	100	–	35	35
9	Древесина	$0,1 \cdot 10^5$	100	–	8	12
10	Стеклопластик	$0,6 \cdot 10^5$	260–480	–	130	130
11	Углепластик	$1,9 \cdot 10^5$	900–1000	–	400	400

Таблица 3

Таблица нормальных размеров, в мм

3,0	11	21	35	52	78	105	155	210	310	410	510	610
3,5	12	22	36	55	80	110	160	220	320	420	520	620
4,0	13	23	38	58	82	115	165	230	330	430	530	630
4,5	14	24	40	60	85	120	170	240	340	440	540	640
5,0	15	25	42	62	88	125	175	250	350	450	550	650
6,0	16	26	44	65	90	130	180	260	360	460	560	660
7,0	17	28	45	68	92	135	185	270	370	470	570	670
8,0	18	30	46	70	95	140	190	280	380	480	580	680
9,0	19	32	48	72	98	145	195	290	390	490	590	690
10,0	20	34	50	75	100	150	200	300	400	500	600	700



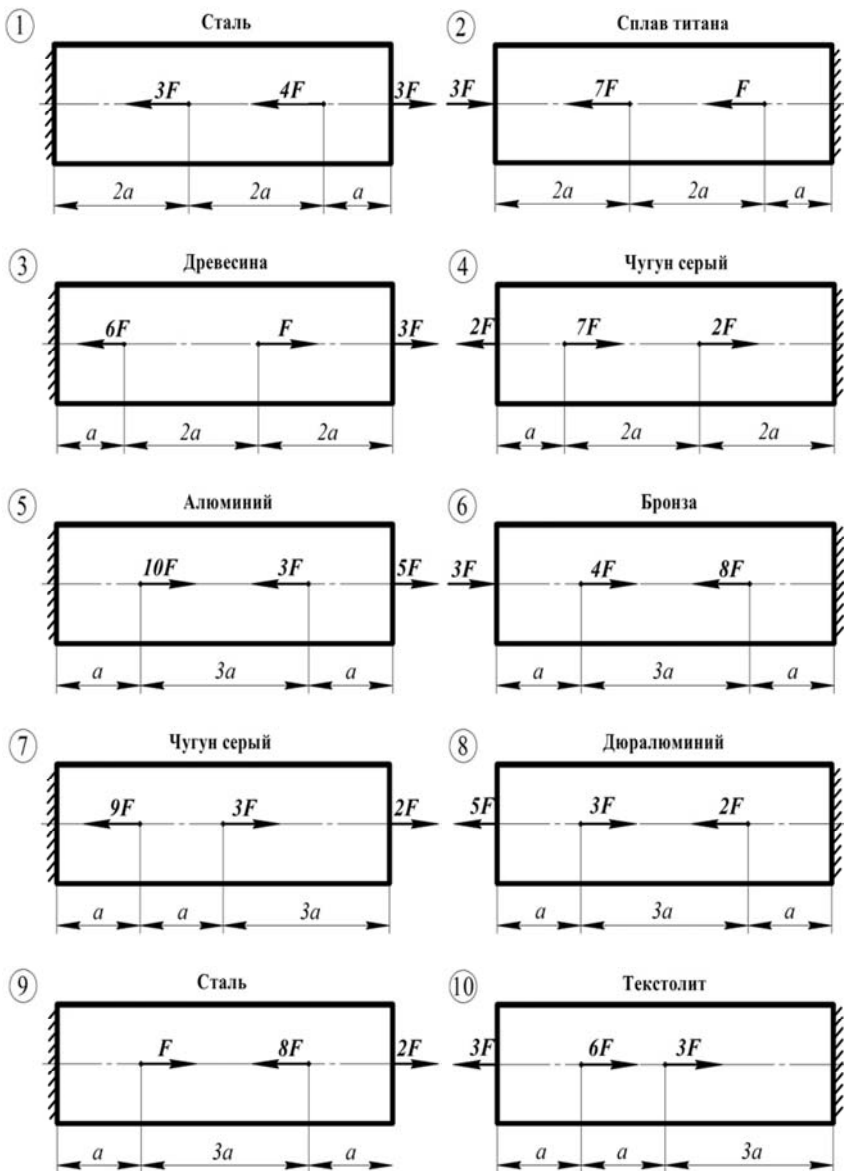
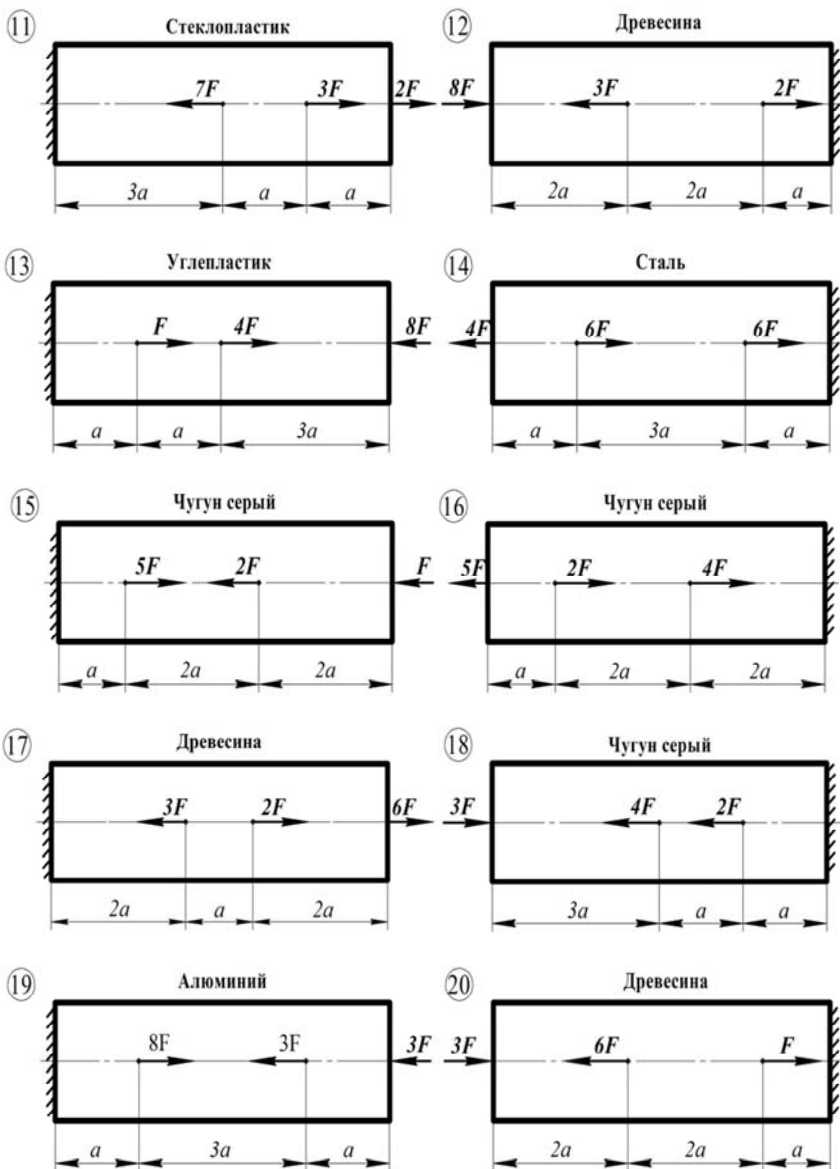
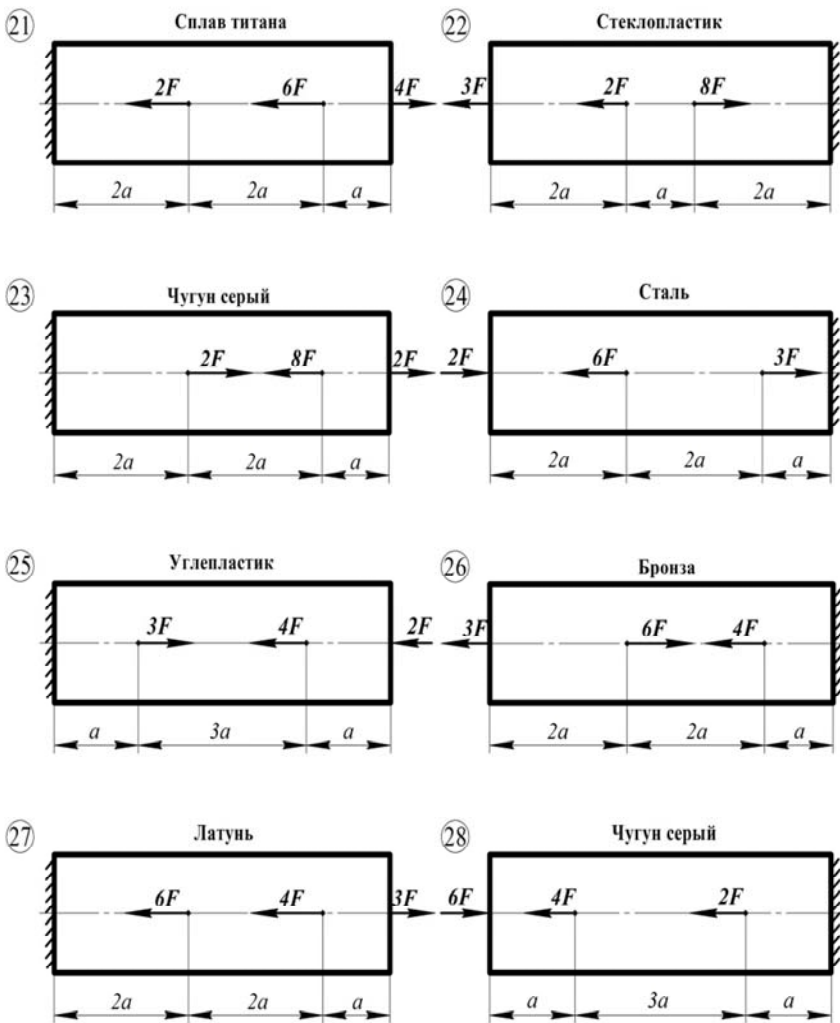


Рис. 1



Продолжение рис. 1



Окончание рис. 1

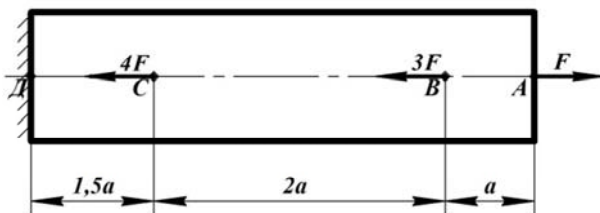
Пример решения задачи 1

**Задача 1**

**Расчет бруса равного сопротивления**

Вариант \_\_\_\_

Чугун серый



**Исходные данные:**

$F$ , кН	$a$ , м	Механические характеристики материала		
		$E$ , МПа	$[\sigma]_p$ , МПа	$[\sigma]_c$ , МПа
60	0,2	$1,4 \cdot 10^5$	45	160

Выполнил \_\_\_\_\_

Проверил \_\_\_\_\_

## РЕШЕНИЕ:

1. Методом сечений определяем продольные силы на участках стержня:

*Сечение I-I*

Строим полученное сечение (рис. 2, а):

$$\sum z = 0; F - N_1 = 0; N_1 = F = 60 \text{ кН (растяжение).}$$

*Сечение II-II*

Строим полученное сечение (рис. 2, б):

$$\sum z = 0; F - 3F - N_2 = 0; N_2 = -2 \cdot F = -2 \cdot 60 = -120 \text{ кН}$$

(сжатие).

*Сечение III-III*

Строим полученное сечение (рис. 2, в):

$$\sum z = 0; F - 3F - 4F - N_3 = 0; N_3 = -6 \cdot F = -6 \cdot 60 = -360 \text{ кН}$$

(сжатие).

Строим эпюру продольных сил  $N$  (рис. 2, г).

2. Подбираем сечения бруса равного сопротивления:

*Условие прочности для участка AB:*

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]_p, \text{ где } A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}.$$

$$\text{Тогда } \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{4N_1}{\pi d_1^2} \leq [\sigma]_p.$$

$$\text{Отсюда } d_1 = \sqrt{\frac{4N_1}{\pi[\sigma]_p}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 45}} = 41,23 \text{ мм.}$$

По таблице нормальных размеров (табл. 3) принимаем ближайшие значения диаметра:  $d = 40$  мм и  $d = 42$  мм, окончательно принимаем большой диаметр  $d_1 = 42$  мм.

*Условие прочности для участка BC:*

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma]_c, \text{ где } A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}.$$

$$\text{Тогда } \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{4N_2}{\pi d_2^2} \leq [\sigma]_C.$$

$$\text{Отсюда } d_2 = \sqrt{\frac{4N_2}{\pi[\sigma]_C}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160}} = 30,9 \text{ мм.}$$

По таблице нормальных размеров (табл. 3) принимаем ближайшее значение диаметра  $d_2 = 32$  мм.

*Условие прочности для участка CD:*

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} \leq [\sigma]_C, \text{ где } A_3 = \frac{\pi d_3^2}{4}.$$

$$\text{Тогда } \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{4N_3}{\pi d_3^2} \leq [\sigma]_C.$$

$$\text{Отсюда } d_3 = \sqrt{\frac{4N_3}{\pi[\sigma]_C}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 360 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160}} = 53,63 \text{ мм.}$$

По таблице нормальных размеров (табл. 3) принимаем ближайшее значение диаметра  $d_3 = 55$  мм.

Вычерчиваем схему бруса равного сопротивления (рис. 2, д).

3. Определяем напряжения на участках стержня:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{F \cdot 4}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 42^2} = 43,33 \text{ МПа (растяжение).}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{2F \cdot 4}{\pi d_2^2} = -\frac{4 \cdot 2 \cdot 60 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 32^2} = -149,3 \text{ МПа (сжатие).}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{6F \cdot 4}{\pi d_3^2} = -\frac{4 \cdot 6 \cdot 60 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 55^2} = -151,6 \text{ МПа (сжатие).}$$

Строим эпюру  $\sigma$  (рис. 2, е).

4. Определяем деформации  $\Delta l$ :

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 42^2} = 0,062 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{120 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 32^2} = -0,426 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_3 = -\frac{N_3 l_3}{EA_3} = -\frac{360 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 0,2 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 55^2} = -0,324 \text{ мм.}$$

Определяем общую деформацию бруса.

$$\Delta l_{\text{полн}} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,062 - 0,426 - 0,324 = -0,688 \text{ мм.}$$

5. Определение перемещений  $\Delta$ :

$$\Delta_D = 0;$$

$$\Delta_C = \Delta l_3 = -0,324 \text{ мм;}$$

$$\Delta_B = \Delta l_3 + \Delta l_2 = -0,75 \text{ мм;}$$

$$\Delta_A = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = -0,688 \text{ мм.}$$

Построение эпюры  $\Delta$  (рис. 2, ж).

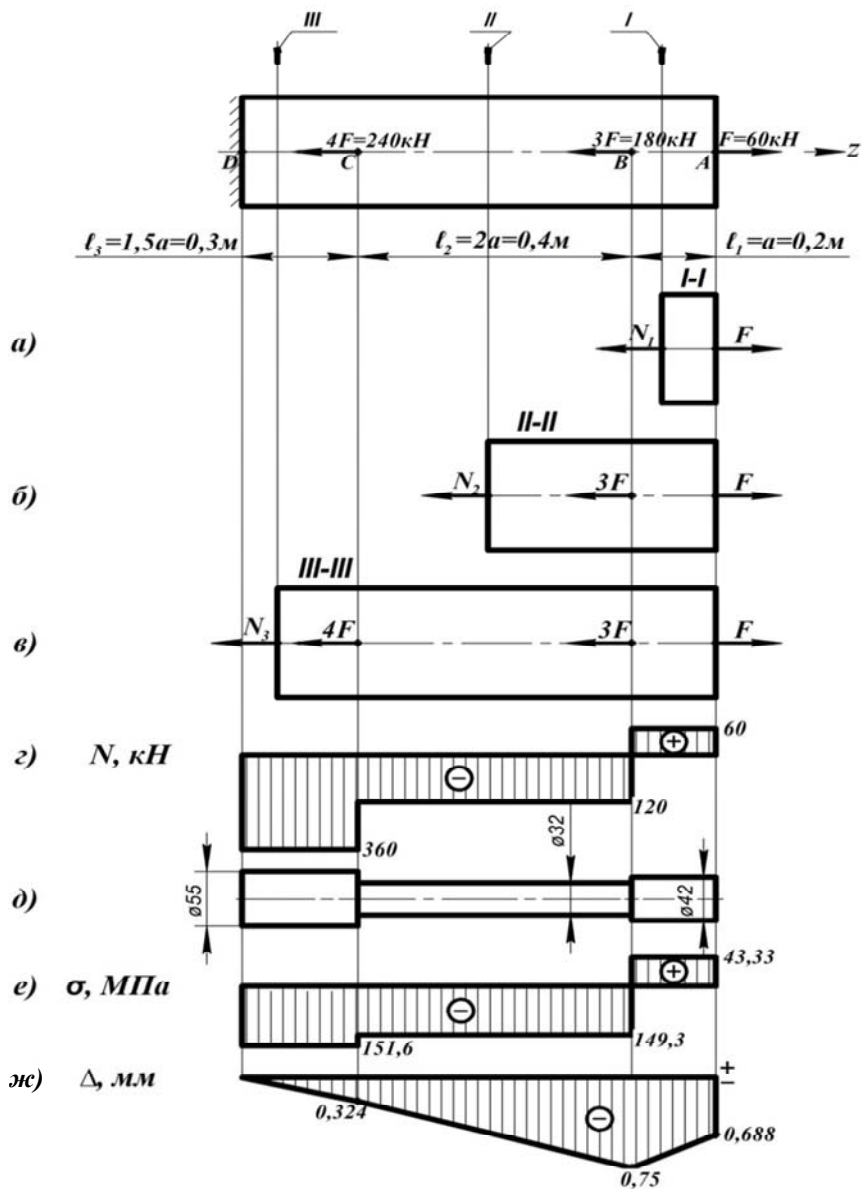


Рис. 2



## Задача 2

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО ДВУХСТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ

Двухступенчатый стальной стержень подвергается растяжению-сжатию двумя осевыми силами [1, 2].

В задаче необходимо:

1. Раскрыть статическую неопределимость. Определить опорные реакции стержня.
2. Найти усилия и напряжения на участках стержня.
3. Определить абсолютные изменения длины участков стержня и найти перемещения сечений, указанных на схеме.
4. По длине стержня построить эпюры продольных усилий  $N$ , напряжений  $\sigma$  и перемещений  $\Delta$ .

Расчетные схемы приведены на рис. 3, а числовые данные – в табл. 4.

## Задача 3

### РАСЧЕТ НА ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО ДВУХСТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ

Двухступенчатый стальной стержень при отсутствии внешних сил нагревается на  $\Delta t$  ( $^{\circ}\text{C}$ ).

В задаче необходимо:

1. Раскрыть статическую неопределимость. Без учета внешних сил определить опорные реакции стержня от действия температуры.
2. Определить температурные напряжения на участка стержня.
3. По длине стержня построить эпюры продольных усилий, напряжений и перемещений, вызванных действием температуры.

Расчетные схемы приведены на рис. 3, а числовые данные – в табл. 4.

Таблица 4

## Числовые данные к задачам 2 и 3

Номер варианта	$a$ , м	$\Delta$ , мм	Нагрузка $F$ , кН	Площади сечений		Изменение температуры $\Delta t$ , °С
				$A_1$ , см <sup>2</sup>	$A_2$ , см <sup>2</sup>	
1	0,3	0,1	60	6	8	30
2	0,25	0,11	50	8	9	40
3	0,3	0,12	60	9	10	50
4	0,25	0,13	55	6	8	60
5	0,35	0,14	65	6	9	45
6	0,4	0,15	52	10	12	35
7	0,35	0,1	90	12	16	45
8	0,25	0,11	75	8	10	55
9	0,40	0,12	70	9	11	65
10	0,35	0,13	80	10	14	60
11	0,25	0,14	65	11	13	30
12	0,25	0,15	75	8	9	35
13	0,3	0,11	85	10	13	45
14	0,4	0,12	80	8	12	60
15	0,5	0,14	85	12	16	50
16	0,25	0,13	75	7	9	40
17	0,4	0,14	60	10	11	30
18	0,3	0,15	65	8	10	35
19	0,5	0,1	55	7	8	40
20	0,30	0,11	60	9	12	45
21	0,35	0,12	70	11	14	50
22	0,4	0,13	80	11	13	60
23	0,25	0,14	75	12	15	50
24	0,3	0,15	55	8	11	40
25	0,25	0,1	65	10	16	30
26	0,3	0,11	75	13	16	50
27	0,25	0,12	60	9	14	60
28	0,35	0,13	75	13	15	55

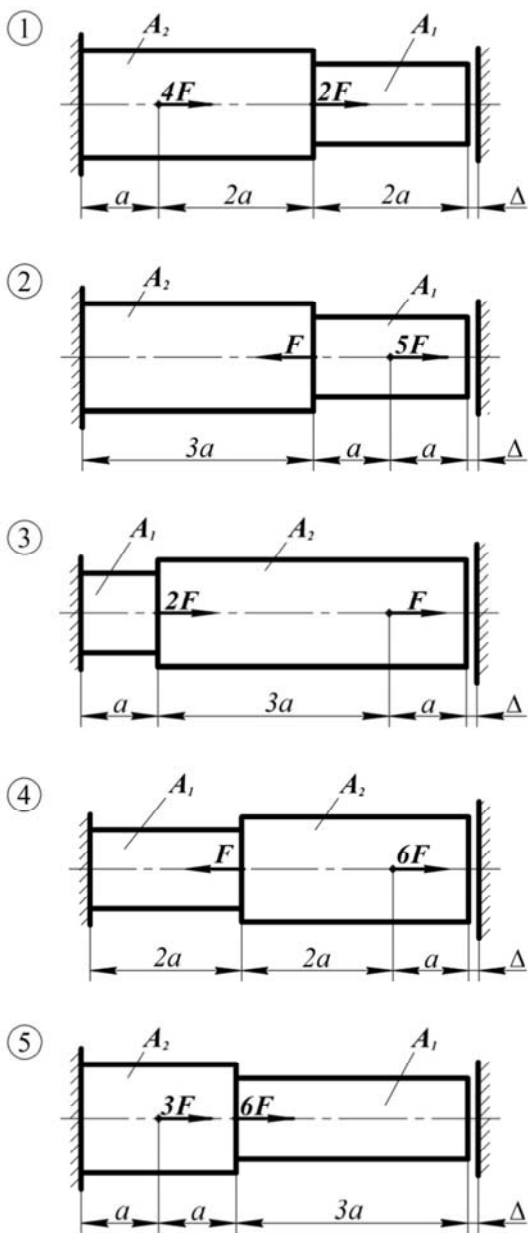
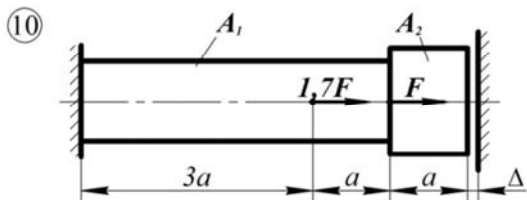
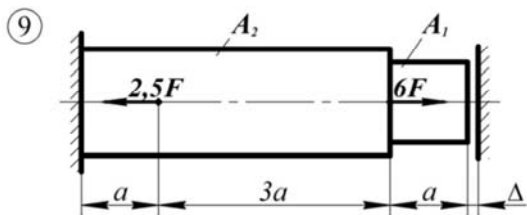
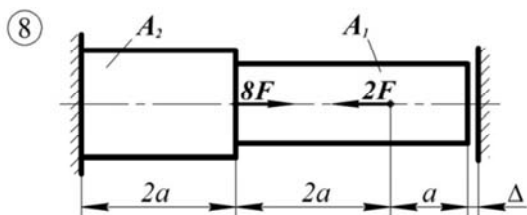
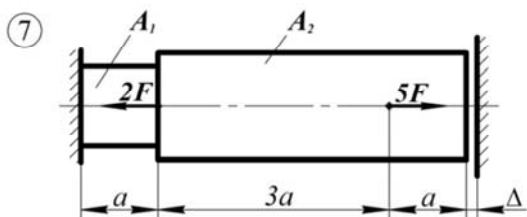
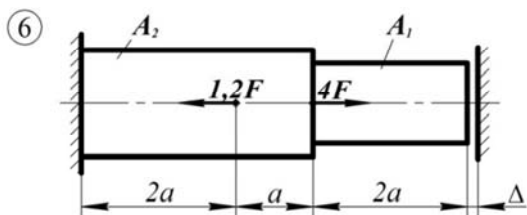
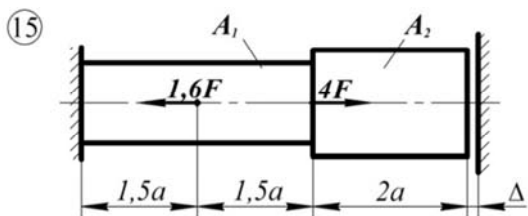
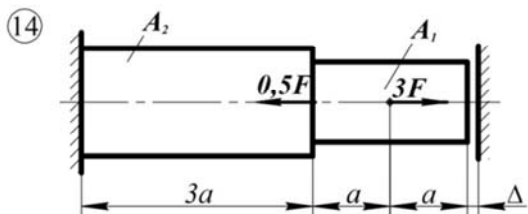
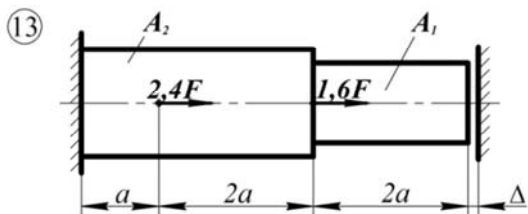
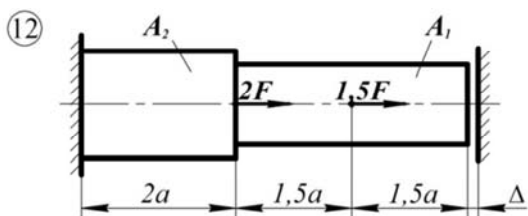
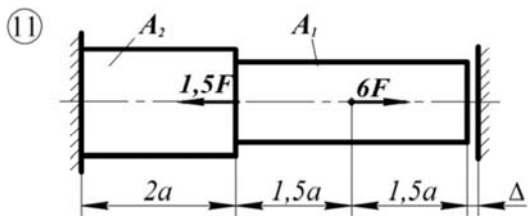


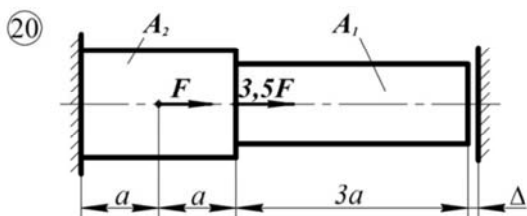
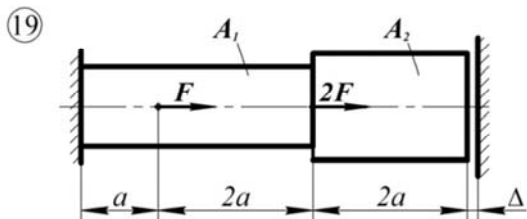
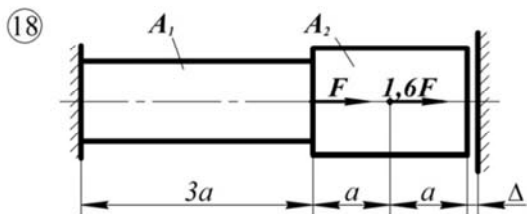
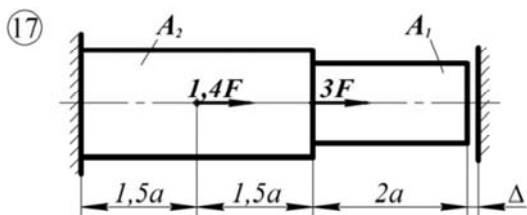
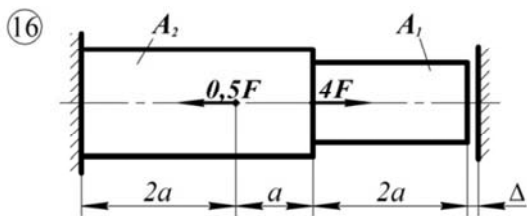
Рис. 3



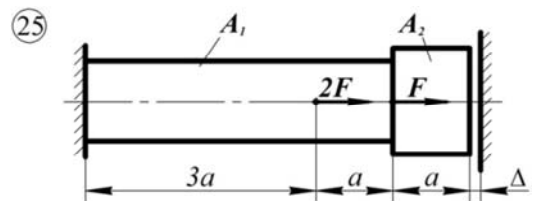
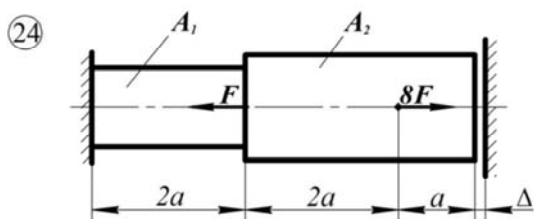
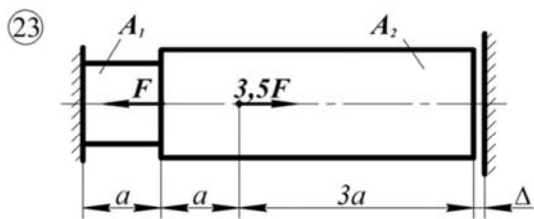
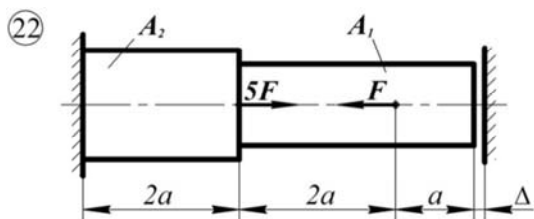
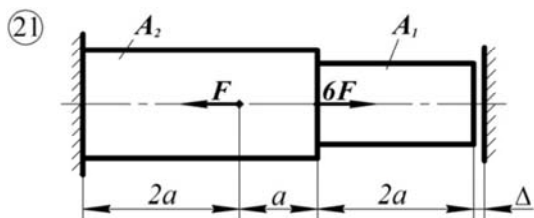
Продолжение рис. 3



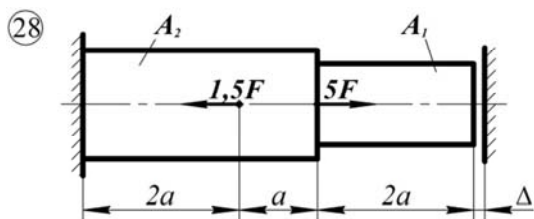
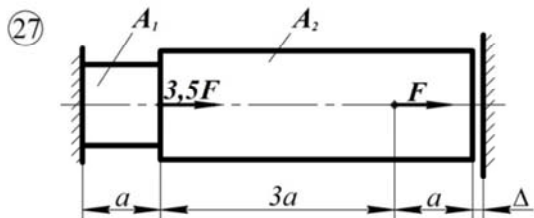
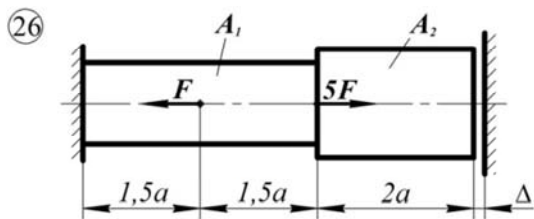
Продолжение рис. 3



Продолжение рис. 3



Продолжение рис. 3



Окончание рис. 3

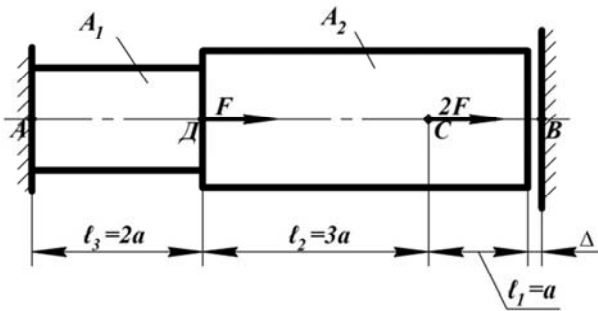


Пример решения задачи 2

**Задача 2**

**Расчет статически неопределимого  
двухступенчатого стержня**

Вариант \_\_\_\_



**Исходные данные:**

$F$ , кН	$A_1$ , см <sup>2</sup>	$A_2$ , см <sup>2</sup>	$a$ , м	$E$ , МПа	$\Delta$ , мм
10	4	8	0,2	$2 \cdot 10^5$	0,1

Выполнил \_\_\_\_\_

Проверил \_\_\_\_\_

## РЕШЕНИЕ:

1. Раскрываем статическую неопределимость:

*Статическая сторона задачи:*

От действия приложенных сил стержень удлинится и перекроет величину зазора  $\Delta$ . Вследствие этого возникнут опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$  (рис. 4, а). Для их определения составим уравнение равновесия:

$$\sum z = 0; F + 2F - R_A - R_B = 0. \quad (1)$$

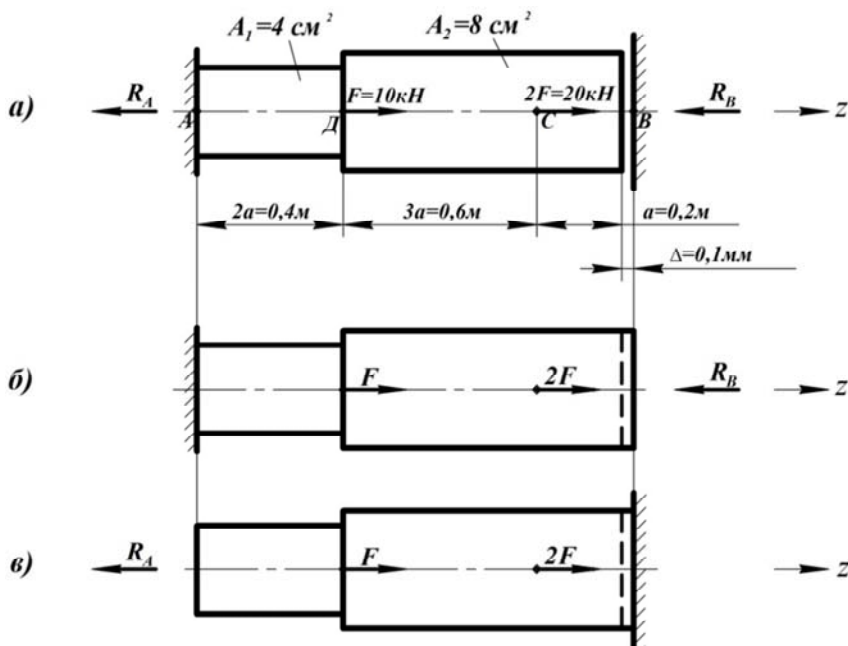


Рис. 4

Одно уравнение, два неизвестных ( $R_A$ ,  $R_B$ ), следовательно, система один раз статически неопределима.

Составляем дополнительное уравнение совместности деформаций.

*Геометрическая сторона задачи:*

Условно отбрасываем опору  $B$  и заменяем ее действие силой  $R_B$  (рис. 4, б).

$$\Delta l_{\text{полн}} = \Delta; \Delta l_{\text{полн}} = \Delta l_F + \Delta l_{2F} + \Delta l_{R_B} = \Delta. \quad (2)$$

*Физическая сторона задачи (3):*

Составляем уравнение перемещения стержня от действия приложенных сил, считая  $R_B$  сжимающей, а  $F$  и  $2F$  – растягивающими силами.

$$\Delta l_F = \frac{F \cdot 2a}{EA_1} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2} = 0,05 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_{2F} = \frac{2F \cdot 2a}{EA_1} + \frac{2F \cdot 3a}{EA_2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2} +$$

$$+ \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^2} = 0,175 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_{R_B} = -\frac{R_B \cdot 4a}{EA_2} - \frac{R_B \cdot 2a}{EA_1} = -\frac{R_B \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^2} -$$

$$-\frac{R_B \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2} = -R_B \cdot 0,01 = -0,01R_B \text{ (мм).}$$

Подставляем (3) в (2):

$$-0,01R_B + 0,175 + 0,05 = 0,1. \quad (3)$$

$$\boxed{R_B = 12,5 \text{ кН.}}$$

*Геометрическая сторона задачи:*

Условно отбрасываем опору  $A$  и заменяем ее действие силой  $R_A$  (рис. 4, в).

$$\Delta \ell_{\text{полн}} = \Delta; \quad \Delta \ell_{\text{полн}} = \Delta \ell_F + \Delta \ell_{2F} + \Delta \ell_{R_A} = \Delta. \quad (4)$$

*Физическая сторона задачи (5):*

Составляем уравнение перемещения стержня от действия приложенных сил, считая  $R_A$  растягивающей, а  $F$  и  $2F$  – сжимающими силами.

$$\Delta \ell_F = \frac{-F \cdot 4a}{EA_2} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^2} = -0,05 \text{ мм.}$$

$$\Delta \ell_{2F} = \frac{-2F \cdot a}{EA_2} = \frac{-2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^2} = -0,025 \text{ мм.}$$

$$\Delta \ell_{R_A} = \frac{R_A \cdot 2a}{EA_1} + \frac{R_A \cdot 4a}{EA_2} = \frac{R_A \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2} + \frac{R_A \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^2} = R_A \cdot 0,01 = 0,01R_A \text{ (мм).}$$

Подставляем (5) в (4):

$$-0,05 - 0,025 + 0,01R_A = 0,1. \quad (5)$$

$$\boxed{R_A = 17,5 \text{ кН.}}$$

Проверка:

$$\sum z = 0;$$

$$-R_A + F + 2F - R_B = 0;$$

$$-17,5 + 10 + 2 \cdot 10 - 12,5 = 0.$$

Опорные реакции определены верно, статическая неопределимость задачи раскрыта.

2. Определяем продольные силы  $N$  на участках стержня:

*Сечение I-I* (рис. 5, а):

$$\sum z = 0; -R_B - N_1 = 0;$$

$$N_1 = -R_B = -12,5 \text{ кН (сжатие)}.$$

*Сечение II-II* (рис. 5, б):

$$\sum z = 0; -R_B + 2F - N_2 = 0;$$

$$N_2 = 2F - R_B = 20 - 12,5 = 7,5 \text{ кН (растяжение)}.$$

*Сечение III-III* (рис. 5, в):

$$\sum z = 0; -R_B + 2F + F - N_3 = 0;$$

$$N_3 = -12,5 + 30 = 17,5 \text{ кН (растяжение)}.$$

По полученным данным строим эпюру  $N$  (рис. 5, г).

3. Определяем напряжения  $\sigma$ :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_2} = -\frac{12,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = -15,63 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{7,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = 9,37 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_1} = \frac{17,5 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^2} = 43,75 \text{ МПа.}$$

По полученным данным строим эпюру  $\sigma$  (рис. 5, д).

4. Определяем деформации  $\Delta \ell$ :

$$\Delta \ell = \frac{N \ell}{EA}$$

$$\Delta \ell_1 = -\frac{N_1 \ell_1}{EA_2} = -\frac{12,5 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^2} = -0,017 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \ell_2}{EA_2} = \frac{7,5 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^2} = 0,028 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \ell_3}{EA_1} = \frac{17,5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2} = 0,089 \text{ мм.}$$

Проверка:

Общее удлинение стержня должно быть равно  $\Delta$ .

$$\Delta l_{\text{полн}} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,089 + 0,028 - 0,017 = 0,1 = \Delta.$$

5. Определяем перемещения  $\Delta$ :

$$\Delta_A = 0;$$

$$\Delta_D = \Delta l_3 = 0,089 \text{ мм};$$

$$\Delta_C = \Delta l_3 + \Delta l_2 = 0,117 \text{ мм};$$

$$\Delta_B = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,1 \text{ мм.}$$

По полученным данным строим эпюру  $\Delta$  (рис. 5, e).

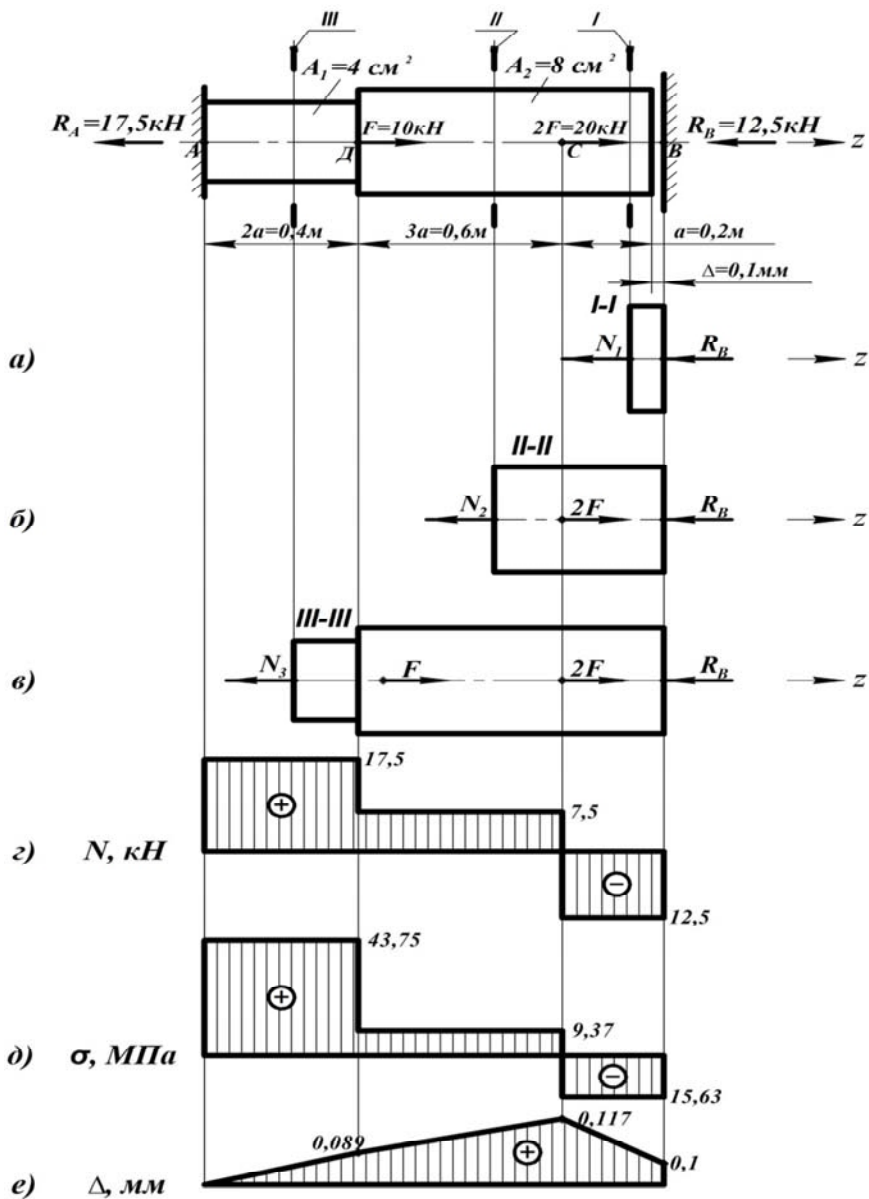


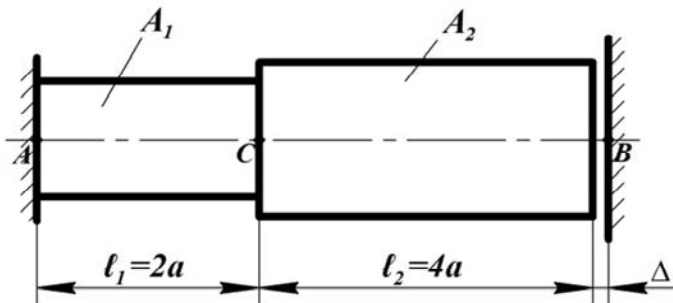
Рис. 5

Пример решения задачи 3

**Задача 3**

**Расчет статически неопределимого двухступенчатого стержня на действие температуры**

Вариант \_\_\_\_



**Исходные данные:**

$A_{1,2}$ см <sup>2</sup>	$A_{2,2}$ см <sup>2</sup>	$a$ , м	$E$ , МПа	$\Delta$ , мм	$\Delta t$ , °C	$\alpha$ , град <sup>-1</sup>
4	8	0,2	$2 \cdot 10^5$	0,1	40	$125 \cdot 10^{-7}$

Выполнил \_\_\_\_\_

Проверил \_\_\_\_\_



## РЕШЕНИЕ:

1. Раскрываем статическую неопределимость:

*Статическая сторона задачи:*

От действия температуры стержень удлинится и перекроет величину зазора  $\Delta$ . Вследствие этого возникнут опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$  (рис. 6, а). Для их определения составляем уравнение равновесия:

$$\sum z = 0; \quad R_A - R_B = 0;$$

$$R_A = R_B = R_t. \quad (1)$$

Одно уравнение, два неизвестных ( $R_A$ ,  $R_B$ ), следовательно, система один раз статически неопределима.

Составляем дополнительное уравнение совместности деформаций.

*Геометрическая сторона задачи:*

Условно отбрасываем опору  $B$  и заменяем ее реакцией от температуры (рис. 6, б).

$$\Delta l_{\text{полн}} = \Delta; \quad \Delta l_{\text{полн}} = \Delta l_t + \Delta l_{R_t} = \Delta. \quad (2)$$

*Физическая сторона задачи (3):*

$$\begin{aligned} \Delta l_t &= \alpha (\ell_1 + \ell_2) \Delta t = \\ &= 125 \cdot 10^{-7} (0,4 \cdot 10^3 + 0,8 \cdot 10^3) 40 = 0,6 \text{ мм.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta l_{R_t} &= -\frac{R_t \ell_1}{EA_1} - \frac{R_t \ell_2}{EA_2} = -\frac{R_t \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2} - \\ &\quad - \frac{R_t \cdot 10^3 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^2} = -0,01 R_t. \end{aligned}$$

Подставляем (3) в (2):

$$0,6 - 0,01R_t = 0,1. \quad (3)$$

$$\boxed{R_t = R_A = R_B = 50 \text{ кН.}}$$

Опорные реакции определены верно, статическая неопределимость задачи раскрыта.

2. Определяем продольные силы  $N$  и температурные напряжения  $\sigma$  на участках стержня:

$$N_1 = N_2 = R_t = -50 \text{ кН (сжатие).}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{50 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^2} = -125 \text{ МПа (сжатие).}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{50 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = -62,5 \text{ МПа (сжатие).}$$

По полученным данным строим эпюры  $N$  и  $\sigma$  (рис. 6, в, з)

3. Определяем деформации  $\Delta l$ :

$$\boxed{\Delta l = \pm \alpha \ell \Delta t \pm N \ell / EA} \text{ — деформации от температуры.}$$

$$\Delta l_1 = \alpha \ell_1 \Delta t - \frac{N_1 \ell_1}{EA_1} = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 0,4 \cdot 10^3 \cdot 40 - \\ - \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2} = -0,05 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_2 = \alpha \ell_2 \Delta t - \frac{N_2 \ell_2}{EA_2} = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 0,8 \cdot 10^3 \cdot 40 - \\ - \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^2} = 0,15 \text{ мм.}$$

Проверка:

Общее удлинение стержня должно быть равно  $\Delta$ .

$$\Delta l_{\text{полн}} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,05 + 0,15 = 0,1 = \Delta.$$

4. Определяем перемещения  $\Delta$ :

$$\Delta_A = 0;$$

$$\Delta_C = \Delta l_1 = -0,05 \text{ мм};$$

$$\Delta_B = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,05 + 0,15 = 0,1 \text{ мм}.$$

По полученным данным строим эпюру  $\Delta$  (рис. 6, д).

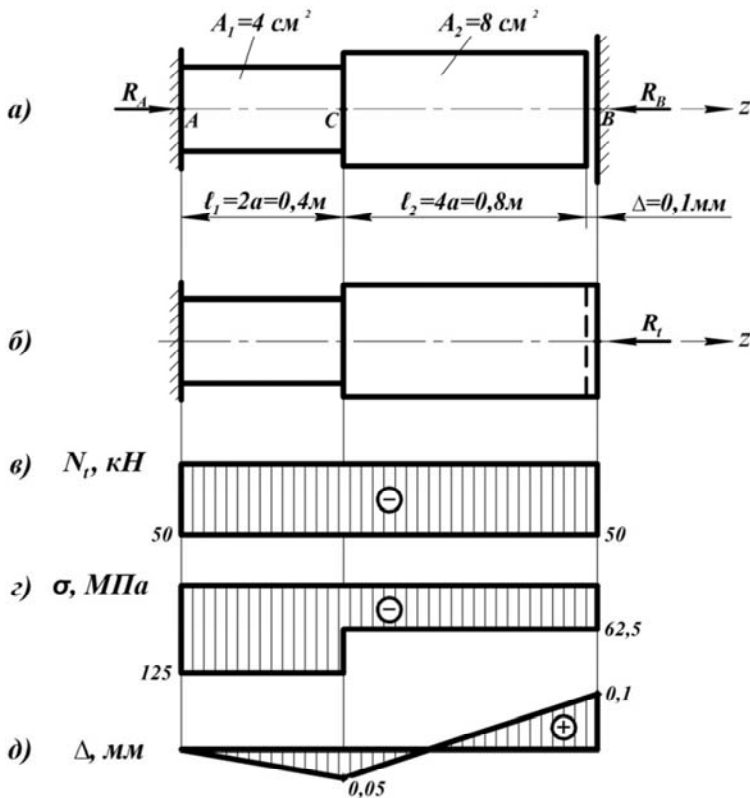


Рис. 6

#### Задача 4

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен к двум стержням с помощью шарниров [2].

В задаче необходимо:

1. Раскрыть статическую неопределимость.
2. Для стержневой системы, определить напряжения в стержнях от заданной нагрузки.
3. Из анализа условий прочности стержней найти наибольшую допускаемую нагрузку  $[F]$ .
4. Определить действительный коэффициент запаса прочности стержней  $n$  при найденной величине  $[F]$ .

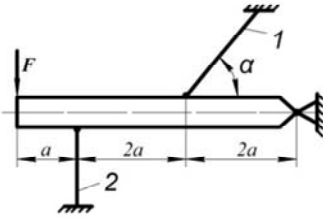
*Примечание:* материал – сталь,  $[\sigma_T] = 240$  МПа,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 2 \times 10^5$  МПа.

Расчетные схемы приведены на рис. 1.7, а числовые данные – в табл. 5.

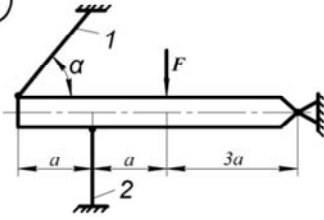
## Числовые данные к задаче 4

№	Нагрузка	Длины, м			Площади сечения		Угол, град.
	$F$ , кН	$a$	$\ell_1$	$\ell_2$	$A_1$ , см <sup>2</sup>	$A_2$ , см <sup>2</sup>	$\alpha$
1	50	1,4	2,0	2,4	7	10	45
2	36	2,0	1,6	2,0	5	8	60
3	60	1,8	1,7	2,4	6	9	40
4	63	2,1	1,8	2,3	8	6	30
5	55	1,9	1,4	1,6	10	7	60
6	48	2,2	1,4	1,8	12	16	50
7	62	1,4	2,0	2,5	10	15	55
8	50	2,5	1,7	2,0	15	19	60
9	65	1,6	1,0	1,5	14	10	30
10	58	1,8	1,3	1,4	12	16	45
11	54	2,4	1,5	1,6	14	16	70
12	56	2,6	1,5	2,0	11	14	50
13	45	1,7	1,2	1,8	9	10	40
14	42	2,0	2,0	2,5	8	11	50
15	54	2,4	1,2	1,4	8	6	60
16	35	3,0	1,7	1,8	9	8	70
17	70	2,6	1,5	1,6	9	10	60
18	38	2,4	1,8	2,0	15	17	70
19	75	2,1	1,2	1,6	10	8	60
20	72	2,8	1,2	1,7	6	8	45
21	42	2,0	1,5	1,8	7	9	60
22	46	3,0	1,6	2,0	14	12	30
23	70	1,4	1,7	2,4	10	11	50
24	45	1,8	1,4	1,6	9	12	40
25	50	2,2	2,0	2,5	10	7	30
26	64	2,5	1,3	1,4	14	19	60
27	76	1,7	1,2	1,8	12	15	70
28	34	2,1	1,5	2,0	6	8	30

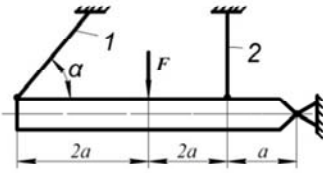
①



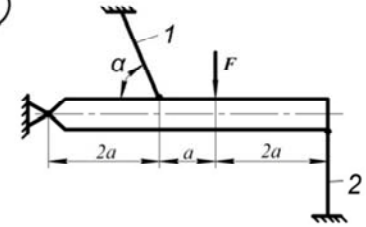
②



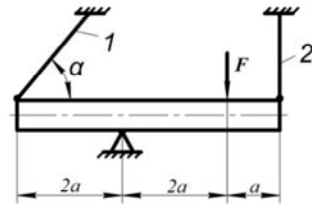
③



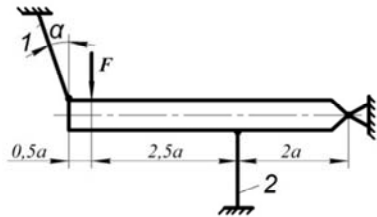
④



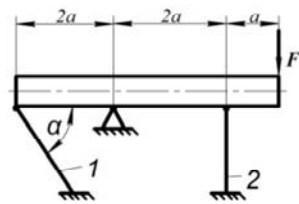
⑤



⑥



⑦



⑧

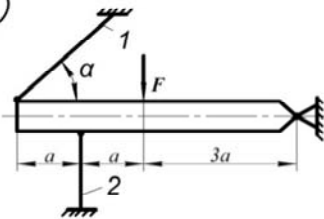
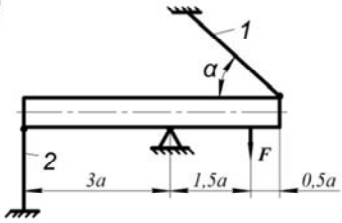
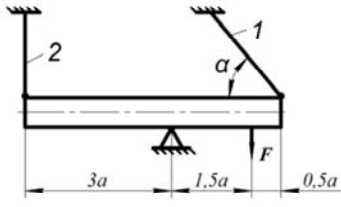


Рис. 7

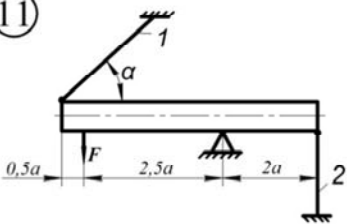
9



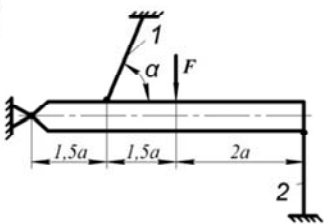
10



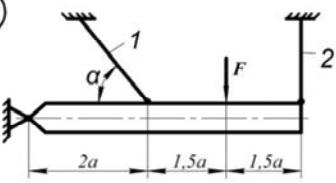
11



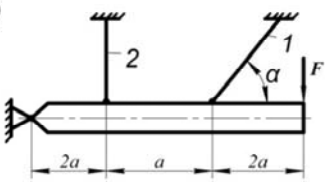
12



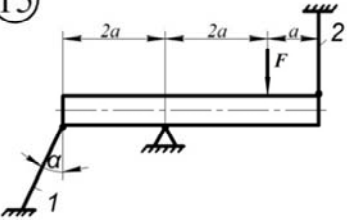
13



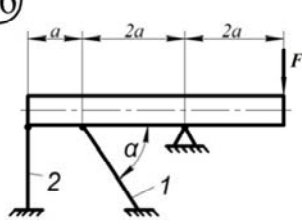
14



15

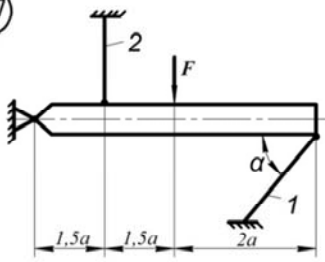


16

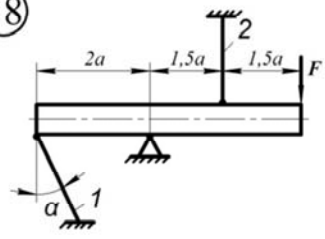


Продолжение рис. 7

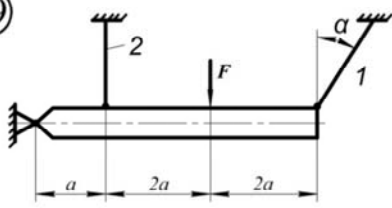
17



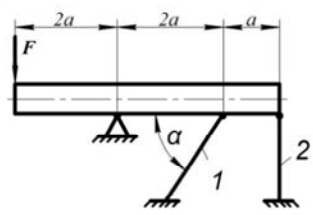
18



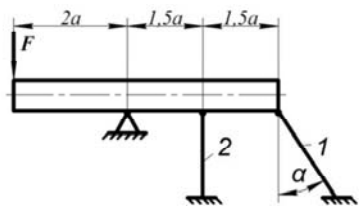
19



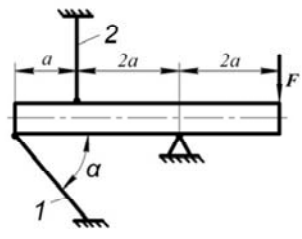
20



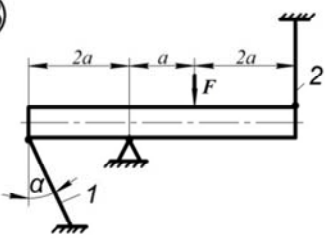
21



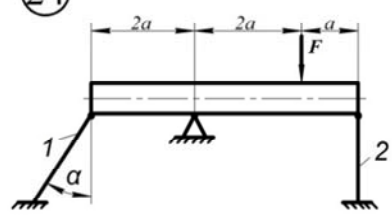
22



23



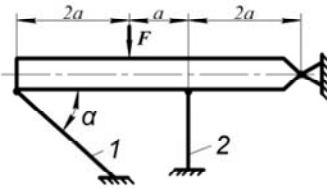
24



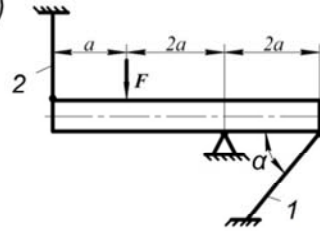
Продолжение рис. 7



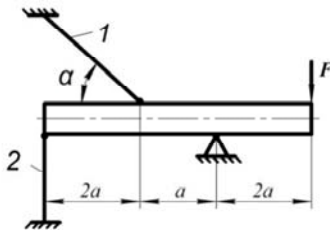
25



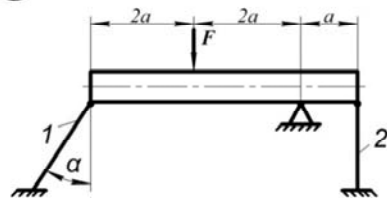
26



27



28



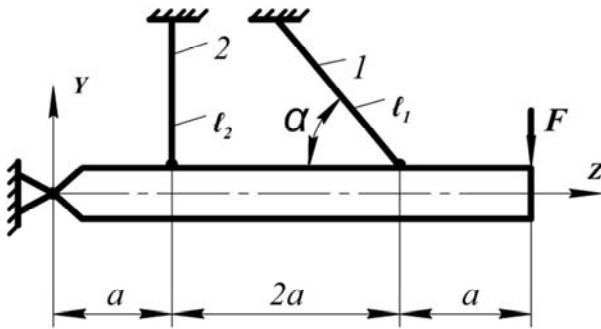
Окончание рис. 7

Пример решения задачи 4

**Задача 4**

**Расчет статически неопределимой шарнирно-стержневой системы**

Вариант \_\_\_\_



**Исходные данные:**

Нагрузка $F$ , кН	Длины, м			Площади сечения, $\text{см}^2$		Угол, град. $\alpha$	$[\sigma_T]$ , МПа	$[\sigma]$ , МПа	$E$ , МПа
	$a$	$l_1$	$l_2$	$A_1$	$A_2$				
80	1,5	2,0	1,8	8	16	60	240	160	$2 \cdot 10^5$

Выполнил \_\_\_\_\_

Проверил \_\_\_\_\_

## РЕШЕНИЕ:

1. Раскрываем статическую неопределимость:

*Статическая сторона задачи:*

Для определения неизвестных опорных реакций и продольных сил  $N_1$  и  $N_2$  (рис. 8) составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum z = 0; H_A - N_1 \cos \alpha = 0; & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum y = 0; R_A + N_2 + N_1 \sin \alpha - F = 0; & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; N_2 a + 3N_1 a \sin \alpha - 4Fa = 0; & (3) \\ N_2 + 2,598N_1 = 4F. \end{cases}$$

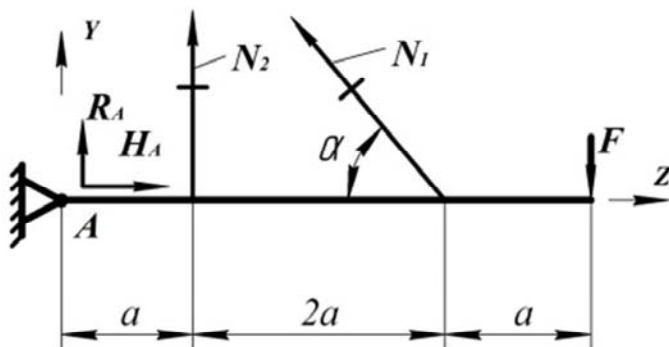


Рис. 8

В этих трех уравнениях четыре неизвестных  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $N_1$  и  $N_2$ . Значит система один раз статически неопределима. Для определения неизвестных усилий необходимо составить еще одно уравнение.

*Геометрическая сторона задачи:*

Рассмотрим деформационную схему, приведенную на рис. 9.

Из треугольника  $CEC'$  находим:

$$CC' = \Delta_C = \frac{EC'}{\sin \alpha} = \frac{\Delta \ell_1}{\sin \alpha}; \quad BB' = \Delta_B = \Delta \ell_2.$$

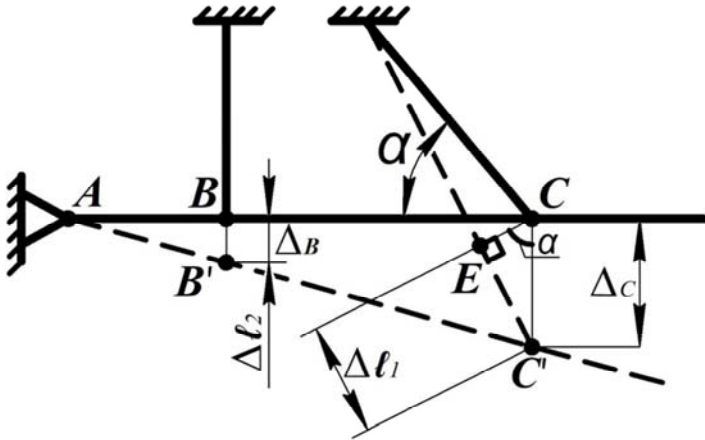


Рис. 9. Деформационная схема

Из подобия треугольников  $ABB'$  и  $ACC'$  следует зависимость:

$$\frac{\Delta_B}{a} = \frac{\Delta_C}{3a}; \quad \frac{\Delta l_2}{a} = \frac{\Delta l_1}{3a \sin \alpha} \quad (4)$$

Окончательно получаем дополнительное уравнение (уравнение неразрывности деформаций):

$$\Delta l_2 = \frac{\Delta l_1 a}{3a \sin 60^\circ} = \frac{\Delta l_1}{3 \sin 60^\circ} = 0,3849 \Delta l_1.$$

$$\boxed{\Delta l_2 = 0,3849 \Delta l_1} \quad (5)$$

*Физическая сторона задачи:*

По закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}. \quad (6)$$

Объединяем три стороны задачи, поставляя (6) в (5):

$$\frac{N_2 \ell_2}{EA_2} = 0,3849 \frac{N_1 \ell_1}{EA_1};$$

$$N_2 = 0,3849 N_1 \frac{\ell_1}{\ell_2} \frac{A_2}{A_1} = 0,3849 N_1 \frac{2}{1,8} \frac{16}{8} = 0,8553 N_1.$$

$$\boxed{N_2 = 0,8553 N_1} \quad (7)$$

Решаем полученную систему уравнений относительно  $N_1$  и  $N_2$ :

$$\begin{cases} N_2 + 2,598 N_1 = 4F; & \boxed{N_1 = 1,158F} \\ N_2 = 0,8553 N_1. & \boxed{N_2 = 0,99F} \end{cases}$$

Статическая неопределимость задачи раскрыта.

2. Определяем продольные силы в стержнях для заданной силы  $F = 80$  кН:

$$N_1 = 1,158F = 1,158 \cdot 80 = 92,64 \text{ кН.}$$

$$N_2 = 0,99F = 0,99 \cdot 80 = 79,2 \text{ кН.}$$

3. Определяем напряжения в стержнях от заданной силы  $F = 80$  кН:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{92,64 \cdot 10^3}{800} = 115,8 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{79,2 \cdot 10^3}{1600} = 49,5 \text{ МПа.}$$

4. Определяем значение допускаемой нагрузки  $[F]$ :

*Условие прочности для первого стержня:*

$$\sigma_{\max}^1 = \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma] \Rightarrow \sigma_{\max}^1 = \frac{1,158[F]_1}{A_1} \leq [\sigma];$$

$$[F]_1 = \frac{A_1 [\sigma]}{1,158} = \frac{8 \cdot 10^2 \cdot 160}{1,158} = 110,535 \text{ кН.}$$

Условие прочности для второго стержня:

$$\sigma_{\max}^2 = \frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma] \Rightarrow \sigma_{\max}^2 = \frac{0,99[F]_2}{A_2} \leq [\sigma];$$

$$[F]_2 = \frac{A_2 [\sigma]}{0,99} = \frac{16 \cdot 10^2 \cdot 160}{0,99} = 258,585 \text{ кН.}$$

Окончательно принимаем меньшее усилие  $[F]_1$ , чтобы выполнялось условие прочности для данной конструкции:

$$[F] = 110,535 \text{ кН.}$$

5. Определяем коэффициенты запаса прочности для допускаемой нагрузки:

$$n = \frac{\sigma_T}{[\sigma]}.$$

Продольные усилия для  $[F]$ :

$$[N]_1 = 1,158[F] = 1,158 \cdot 110,535 = 128 \text{ кН.}$$

$$[N]_2 = 0,99[F] = 0,99 \cdot 110,535 = 109,43 \text{ кН.}$$

Напряжения для  $[F]$ :

$$\sigma_1 = \frac{[N]_1}{A_1} = \frac{128 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = 160 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = \frac{[N]_2}{A_2} = \frac{109,43 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2} = 68,4 \text{ МПа.}$$

Коэффициент запаса прочности в первом стержне:

$$n_1 = \frac{\sigma_T}{\sigma_1} = \frac{240}{160} = 1,5.$$

Коэффициент запаса прочности во втором стержне:

$$n_2 = \frac{\sigma_T}{\sigma_2} = \frac{240}{68,4} = 3,51.$$

Реакции опор для найденной силы  $[F]$  в данной стержневой системе можно определить по формулам (1) и (2).

## **Используемая литература**

1. Механика материалов / под ред. Ю. В. Василевича. – Минск : Технопринт, 2002. – 194 с.
2. Хмелев, А. А. Расчеты на растяжение-сжатие / А. А. Хмелев, Н. С. Траймак. – Минск: БГПА, 1994. – 32 с.

## **Рекомендуемая литература**

1. Реут, Л. Е. Курс лекций и практических занятий по дисциплине «Механика материалов». Растяжение-сжатие : учебное методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей / Л. Е. Реут. – Минск : БНТУ, 2011. – 147 с.
2. Федосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Федосьев. – М. : издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.
3. Степин, П. А. Сопротивление материалов / П. А. Степин. – М. : Высшая школа, 1997. – 367 с.
4. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
5. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. А. С. Вольмира. – М. : Наука, 1984. – 407 с.
6. Иванов, Н. И. Сборник задач по сопротивлению материалов / Н. И. Иванов. – М. : Государственное технико-теоретическое издательство, 1956. – 276 с.



Учебное издание

**ГОНЧАРОВА** Светлана Валерьевна  
**ХВАСЬКО** Виктория Михайловна

**МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ.  
РАСЧЕТЫ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ.  
ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ  
И ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РАБОТ**

Пособие

для студентов специальностей

1-38 01 04 «Микро- и наносистемная техника»,  
1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»,  
1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»

Редактор *Н. Ю. Казакова*  
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 24.03.2023. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 2,85. Уч.-изд. л. 1,93. Тираж 100. Заказ 687.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.