ФЕВРАЛЬ 1993 г., ТОМ 29, № 2

УДК 517.977

А. В. МЕТЕЛЬСКИЙ

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ И ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему с соизмеримыми запаздываниями, которую будем называть системой Σ:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}A_ix(t-h_i)+Bu(t),\ t\in T=[0,t_1], \tag{1}$$

$$x(t)=\eta(t),\ t\in H^-=[-h,0],$$

$$y(t)=Gx(t),\ t\in T.$$

Здесь x — n-вектор (столбец) решения уравнения (1) $(n\geqslant 2)$; y — l-вектор выходных величин (выход) $(l\geqslant 1)$; u — r-вектор входных величин (управление) $(r\geqslant 1)$; $h_i=i\omega$, $\omega>0$ $(i=\overline{1,m},\ m\geqslant 1)$, $h=m\omega$ — постоянные запаздывания; $t_1>h$ — фиксированный момент времени; A, A_i, B, G — матрицы подходящих размеров, причем $A_m\neq 0$. Пусть $\eta\in C$, $C=C(H^-,R^n)$ — банахово пространство непрерывных функций; $u\in\bar{C}$, $\bar{C}=\bar{C}(T,R^r)$ — множество кусочно-непрерывных функций.

Функцию $x_t=(x_t(\theta)=x(t+\theta),\ \theta\in H^-)$ будем называть [1, 2] состоянием системы Σ в момент времени $t\geqslant 0$.

Задачу достижимости для системы Σ будем понимать [2—5] как задачу попадания из нулевого начального состояния $x_0=0$ в некоторое конечное посредством подходящего управления $u=(u(t),t\in T)$.

Полная достижимость системой Σ произвольного абсолютно непрерывного состояния $\varphi(t)$, $t\in H^-: \exists u\in L_2^u=L_2(T,R^r)$, для которого $x(t)=\varphi(t-t_1)$, $t\in[t_1-h,t_1]$, требует [3], чтобы $\operatorname{rank}B=n$. Поэтому рассмотрим задачу функциональной достижимости [5]

$$(x_0=0\ \ \forall\varepsilon>0)\quad \exists u\in L_2^u \text{ такое, что } \|\varphi-x_{t_1}\|_{L_2}<\varepsilon, \tag{2}$$

где φ — заданная функция, $\varphi\in L_2=L_2(H^-,R^n)$, x_{t_1} — конечное состояние системы Σ.

Определение 1. Систему Σ назовем функционально достижимой (f-достижимой), если задача (2) разрешима для произвольной функции $\varphi\in L_2$.

Неравенство (2) означает, что множество всех конечных состояний системы Σ $X=\{x_{t_1}\,|\,u\in L_2^u\}$ всюду плотно в L_2. Поскольку L_2 — гильбертово пространство, то это возможно тогда и только тогда, когда в L_2 не найдется элемента, ортогонального всему множеству X. Значит, справедлива следующая

Лемма 1. *Система Σ f-достижима в том и только в том случае, когда для $x_0=0$ и любой функции $f\in L_2^f=L_2([t_1-h,t_1],R^n)$ существует управление $u\in L_2^u$ такое, что*

$$\langle f,x_{t_1}\rangle=\int_{t_1-h}^{t_1}f'(t)x(t)\,dt\neq 0$$

(штрих везде обозначает операцию транспонирования матрицы).

Другие постановки задачи достижимости для системы Σ и обзор имеющихся результатов изложены в работе [3]. В настоящем исследовании задача f-достижимости решается через вывод параметрического критерия f-наблюдаемости двойственной системы Σ_1.

2. Предварительные сведения. Пусть Λ — множество корней характеристического уравнения системы Σ

$$\det W(\lambda)=0,\quad W(\lambda)=\lambda E-A-\sum_{i=1}^{m} A_i e^{-\lambda h_i},\quad \lambda\in K,$$

где E — единичная $(n\times n)$-матрица; K — множество комплексных чисел.

Для произвольного характеристического числа $\lambda\in\Lambda$ алгебраической кратности k рассмотрим множество функций

$$\varphi_\lambda(\theta)=\sum_{j=0}^{k-1}\gamma_{j+1}\frac{\theta^j}{j!}e^{\lambda\theta},\quad \theta\in H^-,\ k\geqslant 1. \tag{3}$$

Здесь $\gamma_\lambda=\mathrm{col}[\gamma_1,\ldots,\gamma_k]$ — nk-вектор-столбец, удовлетворяющий системе линейных алгебраических уравнений $M_k(\lambda)\gamma_\lambda=0$. Постоянная $(nk\times nk)$-матрица $M_k(\lambda)$ имеет вид

$$M_k(\lambda)=\begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \ldots & W_k\\ 0 & W_1 & \ldots & W_{k-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & W_1\end{bmatrix},\quad W_{j+1}=\frac{d^jW(\lambda)}{d\lambda^j},\quad j=\overline{0,k-1}. \tag{4}$$

Линейную оболочку функций (3) $P_\lambda\subset C$ называют [6] обобщенным собственным пространством системы Σ.

Система Σ^*, сопряженная к системе Σ, имеет вид

$$\dot z'(\tau)=-z'(\tau)A-\sum_{i=1}^{m}z'(\tau+h_i)A_i,\quad \tau<t_1,$$

$$z^{t_1}(\tau)=z(t_1+\tau)=\xi(\tau),\quad \tau\in H^+=[0,h],\quad \xi\in C^*=C(H^+,R^n),$$

$$v'(\tau)=z'(\tau)B,\quad \tau<t_1.$$

Обобщенное собственное пространство $P^*_\lambda\subset C^*$ системы Σ^*, отвечающее характеристическому значению λ кратности k,— линейная оболочка функций

$$\psi'(s)=\sum_{j=1}^{k}\beta'_j\frac{(-s)^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\lambda s},\quad s\in H^+,$$

где $[\beta'_1,\ldots,\beta'_k]M_k(\lambda)=0$.

Состояния x_t и z^t систем Σ и Σ^* связаны соотношением

$$(z^{t_1},x_{t_1})-(z^0,x_0)=\int_0^{t_1}v'(\tau)u(\tau)d\tau,\quad t_1\geqslant 0,$$

где билинейная форма $(\cdot,\cdot)$ задается [6] выражением

$$(\psi,\varphi)=\psi'(0)\varphi(0)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^{h_i}\psi'(\tau)A_i\varphi(\tau-h_i)d\tau,\quad \varphi\in C,\ \psi\in C^*.$$

Пусть Λ_N — множество из N характеристических значений $\lambda\in\Lambda$; P, P^* — линейные оболочки пространств P_λ, P^*_λ, $\lambda\in\Lambda_N$; Φ, Ψ — базисы конечномерных пространств P, P^* такие, что $(\Psi,\Phi)=E$. Тогда верно разложение пространства C по Λ_N:

$$C=P\oplus Q, \tag{5}$$

где $P=\{\varphi\in C\mid\varphi=\Phi b,\ b$ — вектор-столбец$\}$, $Q=\{\varphi\in C\mid(\Psi,\varphi)=0\}$. Для произвольной функции $\varphi\in C$:

$$\varphi^P=\Phi(\Psi,\varphi),\quad \varphi^Q=\varphi-\varphi^P.$$

3. Задача f-наблюдаемости. Соотношение двойственности. Для произвольной абсолютно непрерывной n-вектор-функции $z(t)$, $t\in T$, $t_1\geqslant h$, рассмотрим формулу интегрирования по частям:

$$z'(t_1)x(t_1)-z'(0)x(0)=\int_0^{t_1} d(z'(\tau)x(\tau)),$$

где $x(t)$, $t\in T$,— решение системы Σ. В правой части в силу (1) получим

$$\int_0^{t_1} d(z'(\tau)x(\tau))=\int_0^{t_1}\dot z'(\tau)x(\tau)\,d\tau+\int_0^{t_1} z'(\tau)\,(Ax(\tau)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}A_ix(\tau-h_i)+Bu(\tau))\,d\tau.$$

Отсюда

$$(z^{t_1},x_{t_1})-(z^0,x_0)=\int_0^{t_1-h}\Big(\dot z'(\tau)+z'(\tau)A+\sum_{i=1}^{m}z'(\tau+h_i)A_i\Big)x(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_{t_1-h}^{t_1}\Big(\dot z'(\tau)+z'(\tau)A+\sum_{i=1}^{m}z'(\tau+h_i)A_i\Big)x(\tau)\,d\tau+\int_0^{t_1}v'(\tau)u(\tau)\,d\tau. \qquad (6)$$

Введем систему наблюдения Σ_1^* следующими соотношениями:

$$\dot z'(\tau)+z'(\tau)A+\sum_{i=1}^{m}z'(\tau+h_i)A_i=0,\quad \tau\in[0,\,t_1-h],$$

$$\begin{gathered}\dot z'(\tau)+z'(\tau)A+\sum_{i=1}^{m}z'(\tau+h_i)A_i+f'(\tau)=0,\\ \tau\in[t_1-h,\,t_1],\quad f\in L_2^f,\\ z'(\tau)=0,\quad \tau\geqslant t_1>h,\\ v'(\tau)=z'(\tau)B,\quad \tau\in T.\end{gathered} \qquad (7)$$

Тогда из (6) для нулевого начального состояния системы Σ получим

$$\langle f,x_{t_1}\rangle=\int_0^{t_1}v'(\tau)u(\tau)\,d\tau. \qquad (8)$$

Очевидно, что для всякой функции $f\in L_2^f$ найдется единственная абсолютно непрерывная функция $z(\tau)$, $\tau\in[t_1-h,\,t_1]$, обеспечивающая (7). Однозначной будет и операция вычисления функции $f\in L_2^f$ по заданной абсолютно непрерывной функции $z(\tau)$, $\tau\in[t_1-h,\,t_1]$.

Введем

Определение 2. Система Σ_1^* называется f-наблюдаемой в момент времени $t_1>h$, если равенство $v=0$ влечет за собой $f=0$ ($v=(v(\tau),\ \tau\in T)$, $f\in L^f{}_2$).

Ввиду (8) очевидно следующее утверждение.

Лемма 2. *Система Σ f-достижима тогда и только тогда, когда система Σ_1^* f-наблюдаема.*

4. Вспомогательные утверждения. Для удобства рассмотрим задачу f-наблюдаемости не для сопряженной системы Σ_1^*, а для «прямой» системы Σ_1:

$$\dot x(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}A_ix(t-h_i),\quad t\in[h,\,t_1],$$

$$\dot x(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}A_ix(t-h_i)+\psi(t),\quad t\in H^+,\quad \psi\in L_2(H^+,R^n),$$

$$\begin{gathered}x(t)=0,\quad t\leqslant 0,\\ y(t)=Gx(t),\quad t\in T.\end{gathered} \qquad (9)$$

Выясним, при каких ограничениях на параметры система Σ_1 f-наблюдаема: $y=(y(t),\,t\in T)=0$ влечет за собой $\psi=0$. Для этого докажем два вспомогательных утверждения.

Обозначим: $\theta(t)=x(t)$, $t\in H^+$; $\Theta(t)=\mathrm{col}[\theta_1(t), \dots, \theta_m(t)]$, $\theta_i(t)=$ $=\theta(t-i\omega)$, $t\in\Omega_h=[h, h+\omega]$, $i=\overline{1, m}$.

Лемма 3. *Пусть функция ψ в (9) N раз непрерывно дифференцируема: $\psi\in C^N=C^N(H^+, R^n)$, $N=n\alpha-2$, $\alpha=(n-1)m$. Тогда справедливы дифференциальные соотношения*

$$\Delta^{k+1}(p)y(t+k\omega)=L_{k+1}(p)\Theta(t), t\in\Omega_h, \ k=\overline{0, \alpha-1}, \quad (10)$$

где $\Delta(p)=\det(pE-A)$, $L_{k+1}(p)$ *— дифференциальный оператор порядка не выше* $nk+n-1$, $p=d/dt$.

Доказательство. Используя матричное исчисление, можно [7, 8] показать, что

$$\Delta(p)x(t+k\omega)=D(p)\sum_{i=1}^{k}A_ix(t+(k-i)\omega)+$$
$$+D(p)\sum_{i=k+1}^{m}A_i\theta(t+(k-i)\omega), \ t\in\Omega_h, \ k=0, 1, \dots \quad (11)$$

Здесь $D(p)=D_0p^{n-1}+\dots+D_1p^{n-2}+D_{n-1}$, $D_k=A^k-r_1A^{k-1}-\dots-r_kE$, $r_k=\dfrac{1}{k}\mathrm{Sp}(AD_{k-1})$, $k=\overline{1, n-1}$, $D_0=E$ (предполагаем, что если $k=0$, то первое слагаемое равно 0; если же $k>m-1$, то второе слагаемое равно 0, $A_i=0$ при $i>m$).

Пусть $\mu=e^{p\omega}$ — оператор сдвига:

$$\mu^kx(t)=\begin{cases}x(t+k\omega), & k\geqslant 0,\\ \theta(t+k\omega), & -m\leqslant k<0, \ t\in\Omega_h.\end{cases}$$

Из (11) следует, что

$$\Delta^j(p)\mu^kx(t)=\begin{cases}D(p)\sum\limits_{i=1}^{m}A_i\Delta^{j-1}(p)\mu^{k-i}x(t), & k\geqslant 0, \ j\geqslant 1,\\ \Delta^j(p)\mu^kx(t), & -m\leqslant k<0\vee j=0, \ t\in\Omega_h.\end{cases}$$

Применяя к (11) $\Delta(p)$ k раз и умножая обе части этого выражения на матрицу G, получаем формулу (10). Лемма доказана.

Обозначим через $X_k(t)$ (k — целое число, $t\in R$) $(n\times n)$-матрицы-решения определяющего уравнения [1]

$$X_k(t)=AX_{k-1}(t)+\sum_{i=1}^{m}A_iX_{k-1}(t-i\omega)$$

с начальными условиями

$$X_k(t)=0, \ k<0\vee t<0, \ X_0(0)=E.$$

Пусть функция ψ в (9) $k-1$ раз непрерывно дифференцируема и $\delta x^{(k)}(t)=x^{(k)}(t+0)-x^{(k)}(t-0)$ — величина скачка k-й производной решения системы Σ_1 в точке $t\geqslant h$, $k=1, 2, \dots$ Следуя [8], можно доказать лемму.

Лемма 4. *Пусть* $t^*=h+q\omega$ *(q-натуральное число),* $s_l=$ $=(q-m+l)\omega$, $l=\overline{0, m}$, *тогда справедлива формула*

$$\delta x^{(k)}(t^*)=X_k(q\omega)\theta(h)+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}X_{k-j}(q\omega)A_i\theta^{(j-1)}(h-i\omega+0)-$$
$$-\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}X_{k-j}(s_{m-i})A_i\theta^{(j-1)}(h-0), \ k\geqslant 1.$$

Если $t^* = h$, *то*

$$\delta x^{(k)}(h) = X_k(0)\theta(h) + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} X_{k-j}(0)A_i\theta^{(j-1)}(h-i\omega+0) - $$
$$-\theta^{(k)}(h-0),\ k\geqslant 1.$$

5. Условия f-наблюдаемости. Пусть $L(p) = \mathrm{col}\,[L_0(p), L_1(p), \dots, L_\alpha(p)]$, где $L_0(p) = \mathrm{diag}\,[G, \dots, G]$ — $(lm\times nm)$-матрица, $L_i(p)$ $(i=\overline{1,\alpha},\ \alpha = (n-1)m)$ — дифференциальные операторы, о которых говорится в лемме 3: $Y_\theta(t) = \mathrm{col}\,[y_\theta(t-h), \Delta(p)y_\theta(t), \dots, \Delta^\alpha(p)y_\theta(t+(\alpha-1)\omega)]$, $t\in\Omega_h$, где y_θ — выход, отвечающий состоянию $x_h = \theta$.

Пример 1. Для системы Σ_1 с одним запаздыванием оператор $L(p)$ имеет вид $\mathrm{col}\,[G, GD(p)A_1, \dots, G(D(p)A_1)^{n-1}]$.

Теорема 1. *Для f-наблюдаемости системы Σ_1 необходимо, чтобы*

$$\mathrm{rank}\, L(\lambda) = nm \text{ хотя бы для одного } \lambda\in K. \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим подмножество функций $\psi\in C^N$, $N = n\alpha - 2$ таких, что $\delta x^{(k)}(h) = 0$, $k=\overline{0, N+1}$. Ввиду лемм 3, 4 класс функций $\{\theta\}$, порождающих заданный выход $y_\theta = (y_\theta(t), t\in[0, nh])$, совпадает с множеством решений граничной задачи

$$\begin{aligned} &L(p)\Theta(t) = Y_\theta(t),\ t\in\Omega_h,\\ &\delta x^{(k)}(h) = 0,\ k=\overline{0, N+1}. \end{aligned} \tag{13}$$

Если условие (12) нарушено, то можно выбрать функцию $\theta\in \in C^{N+1}: \theta(t)\not\equiv 0$, $t\in H^+$, такую, что (13) будет выполняться при $y_\theta = 0$. По формуле $\psi(t) = \dot x(t) - Ax(t) - \sum_{i=1}^{m} A_i x(t-h_i)$, $t\in H^+$, найдем функцию $\psi\neq 0$, при которой система Σ_1 не является f-наблюдаемой. Теорема доказана.

Определение 3. Система Σ_1 называется обратимой, если из условий $y=0$, $x_{t_1+h}=0$ следует, что $\psi = 0$.

Теорема 2. *Для обратимости системы Σ_1 необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} G \\ A_m \end{bmatrix} = n. \tag{14}$$

Доказательство. Необходимость. Если условие (14) нарушено, то выберем абсолютно непрерывную функцию θ из условий

$$G\theta(t) = 0,\ A_m\theta(t) = 0,\ t\in\Omega = [0, \omega],$$
$$\theta(t) = 0,\ t\in[\omega, h].$$

Получим $y=0$, хотя соответствующая функция $\psi\neq 0$.

Достаточность. В силу (9) $Gx(t) = 0$, $A_m x(t) = 0$, $t\in[t_1 - -\omega, t_1]$. Отсюда $x(t) = 0$, $t\in[t_1-\omega, t_1]$. По той же причине $x(t) = 0$, $t\in[t_1 - 2\omega, t_1-\omega]$ и т. д.: $x(t) = 0$, $t\in H^+$, отсюда $\psi = 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для f-наблюдаемости системы Σ_1 необходимо, чтобы она была обратима.*

Обозначим через $\bar\Lambda = \{\lambda_i\in\Lambda \mid \mathrm{rank}\, L(\lambda_i) < nm,\ i=\overline{1, N}\}$ множество различных корней наибольшего общего делителя всех миноров nm-го порядка матрицы $L(\lambda)$, которые входят в Λ с алгебраическими кратностями k_i. Если $\bar\Lambda = \varnothing$, то система Σ_1 заведомо f-наблюдаема.

Пусть $\bar\Lambda\neq\varnothing$. Рассмотрим разложение (5), где $\Lambda_N = \bar\Lambda$. Построим матрицу

$$M_q(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \begin{bmatrix} \bar M_{k_1}(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \dots & \bar M_{k_N}(\lambda_N) \\ E_1 & \dots & E_N \end{bmatrix}$$

где $\bar{M}_{k_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} & M_{k_i}(\lambda_i) & & \\ G & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & G \end{bmatrix}$ — $((n+l)k_i \times nk_i)$-матрицы (матрицы $M_{k_i}(\lambda_i)$ описаны в (4)), $E_i = [E, 0, \ldots, 0]$ — $(n \times nk_i)$-матрицы, $q = k_1 + \ldots + k_N$.

Теорема 3. *Система Σ_1 f-наблюдаема тогда и только тогда, когда одновременно выполнены два условия:*

1) $\operatorname{rank} L(\lambda) = nm$, $\exists \lambda \in K$;

2) $\operatorname{rank} M_q(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = nq$, $\lambda_i \in \bar{\Lambda}$.

Если $\bar{\Lambda} = \varnothing$, то условие 2) считается выполненным.

Доказательство. Необходимость условия 1) установлена в теореме 1. Если условие 2) нарушено, то в качестве $x(h+t)$, $t \in H^-$, можно взять ненулевой квазиполином $\theta(t) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{\lambda_i}(t)$, $t \in H^-$, где φ_{λ_i} определены посредством (3), причем

$$\bar{M}_{k_i}(\lambda_i)\gamma_{\lambda_i} = 0, \ i = \overline{1, N}, \quad \sum_{i=1}^{N} E_i \gamma_{\lambda_i} = 0. \tag{15}$$

В силу (15) $\theta(0) = 0$ и $y_\theta = 0$, хотя $\psi \neq 0$, так как $\theta(t) \not\equiv 0$, $t \in H^-$.

Достаточность. Ввиду условия 1) и соотношений (13) всякое решение x^0 системы Σ_1, порождающее $y = 0$, принадлежит обобщенному собственному пространству P, начиная с $t_1 \geqslant nh$. Как видно из доказательства теоремы 2, если выполнено условие 1), то система Σ_1 обратима (доказывается от противного). Значит, $x_h^0 \in P$. Поскольку $x^0(0) = 0$, то в силу (15) и условия 2) $x_h^0 = 0$ и $\psi = 0$, т. е. система Σ_1 f-наблюдаема. Теорема доказана.

Замечание 1. В [1] показано, что если $y = 0$, $t_1 = nh$, то $y = 0$ $\forall t_1 \geqslant 0$. Значит, если система Σ_1 не является f-наблюдаемой при $t_1 = nh$, то она остается таковой при любом $t_1 > h$.

6. Критерий f-достижимости. Опираясь на лемму 2, получаем параметрический критерий f-достижимости системы Σ_1.

Теорема 4. *Для f-достижимости системы Σ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия теоремы 3 при подстановке в них транспонированных матриц системы Σ.*

Отметим, что свойство f-достижимости системы Σ не зависит от наличия у нее свойства полной управляемости [1—3].

Пример 2. Пусть система Σ имеет одно запаздывание ($m = 1$) и следующие параметры:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система Σ с данными матрицами не является полностью управляемой, так как $\operatorname{rank}[W(\lambda), B] < 3$. В то же время условия теоремы 4 выполнены, т. е. система Σ f-достижима.

Пример 3. Рассмотрим систему Σ с теми же матрицами A, A_1 и $B = \operatorname{col}[1, 0, 0]$.

Находим, что $\operatorname{rank}[W(\lambda), B] = 3$ при любом λ. Значит, система Σ полностью управляема. Условие 1) теоремы 4 не выполнено, поэтому система Σ не является f-достижимой.

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.

2. Метельский А. В. // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 81—90.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Марченко В. М., Асмыкович И. К. Задачи управления и наблюдения для бесконечномерных систем. Минск, 1984. (Препринт / Ин-т математики АН БССР: 1(186)).
4. Минюк С. А. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 7. С. 1192—1198.
5. Метельский А. В. // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 5. С. 389—392.
6. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
7. Метельский А. В., Минюк С. А. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1976. № 2. С. 9—13.
8. Метельский А. В. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1703—1712.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию
25 ноября 1991 г.