

## К ВОПРОСУ О МЕТОДИКЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, СФОРМИРОВАННЫХ РЕЖУЩИМ ИНСТРУМЕНТОМ ПО РАЗЛИЧНЫМ СХЕМАМ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

*Гомельский Государственный технический университет им. П.О.Сухого  
Гомель, Беларусь*

Современные конструкции станков с ЧПУ позволяют реализовать как отдельные способы обработки, так и комбинированные с различными схемами формообразования. Такие возможности открываются при использовании многоцелевых станков, обеспечивающих скорости рабочих подач до 50 м/мин., а частоты вращения шпинделя – до 12000 об/мин. Реализация комбинированных способов расширяет возможности технологического проектирования поверхностей деталей с заданными физико-механическими и топографическими показателями. Знание топографии обработанных поверхностей расширяет возможности моделирования контактных статических, кинематических и динамических задач. Вследствие сложности описания обработанных поверхностей моделировать их можно последовательно, в несколько методических этапов. Для реализации этого подхода были введены методические виды обработанных поверхностей: кинематическая, статическая и динамическая [1].

Для облегчения моделирования кинематических поверхностей их можно разбить на отдельные локальные отсеки в дифференциальной окрестности рассматриваемой точки. Классифицировать кинематические поверхности сложно, так как любая поверхность имеет участки гладкие регулярные и участки с особыми точками и линиями. Поэтому возникает необходимость систематизировать эти участки по типу точек, в дифференциальной окрестности которых они расположены [1-4 и др.].

Можно выделить следующие типы локальных отсеков кинематической поверхности:

а) гладкие регулярные локальные отсеки. К этому типу относятся локальные микроучастки кинематических поверхностей, полученные по всем схемам формообразования и расположенные в дифференциальной окрестности точек на поверхности (рис. 1, а);

б) гладкие нерегулярные локальные отсеки. К этому типу относятся локальные отсеки выхода и входа формообразующих кромок при формировании закрытых поверхностей. Такие микроучастки располагаются в дифференциальной окрестно-

сти точек линий сопряжений (стыка) двух гладких регулярных отсеков, причем в окрестности только таких точек, в которых при переходе через линию касания указанных отсеков поверхности детали направление касательной не изменяется на противоположное (рис.1, б);

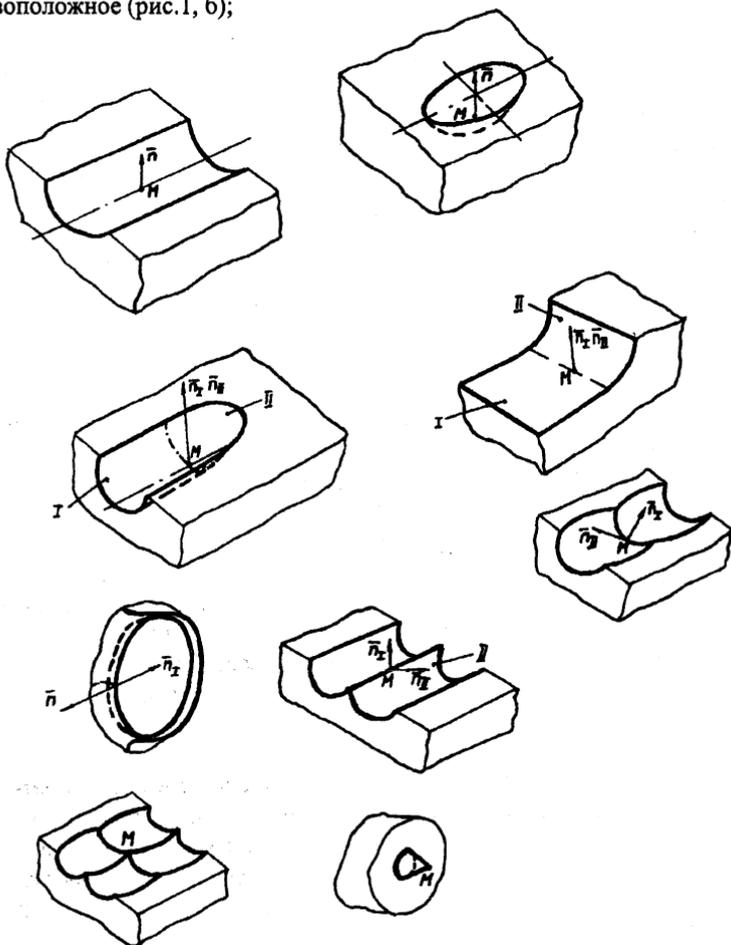


Рис. 1. Эскизы локальных отсеков кинематических поверхностей.

в) локальные отсеки возврата. К этому типу относятся нерегулярные локальные микроучастки, образующиеся при обработке полых осесимметричных деталей. Такие микроучастки располагаются в дифференциальной окрестности точек линии возврата двух касающихся друг друга локальных отсеков поверхности, причем

в окрестности только таких точек, в которых при переходе через линию касания указанных отсеков направление касательной изменяется на противоположное, когда имеет место обратное касание двух отсеков (рис. 1, в);

г) локальные отсеки излома. К этому типу относятся нерегулярные локальные микроучастки, образующиеся при формировании характеристических линий номинальных поверхностей по схеме огибания. Они располагаются в дифференциальной окрестности точек линии пересечения двух гладких регулярных локальных отсеков кинематической поверхности (рис. 1, г);

д) особые локальные отсеки. К этому типу относятся нерегулярные изолированные локальные микроучастки, образующиеся при обработке поверхностей осесимметричных деталей на токарных операциях формообразующими кромками с углами в плане не равными нулю или при получении поверхностей по схеме огибания. Эти участки располагаются в дифференциальной окрестности изолированных, особых точек поверхности (конических точек, особых точек первого, второго и более высоких порядков), гладких нерегулярных особых точек; точек касания, пересечения или касания одновременно трех и более гладких регулярных отсеков кинематических поверхностей и т.п. (рис. 1, д).

Рассмотрим методику моделирования кинематических поверхностей, сформированных по различным схемам формообразования.

Наибольшее распространение получил метод, описывающий поверхность или ее локальные отсеки уравнениями, связывающими декартовы координаты точек

$$F(x, y, z) = 0; z = z(x, y). \quad (1)$$

В практике проектирования инструмента [5–7 и др.] широко используется более общее аналитическое представление, введенное К.Ф. Гауссом. Оно основано на том, что все координаты точек поверхности выражаются через два независимых параметра  $u$  и  $v$ :

$$x = x(u, v); y = y(u, v); z = z(u, v). \quad (2)$$

Тогда поверхность можно задать в виде

$$r = r(u, v) = x(u, v) i + y(u, v) j + z(u, v) k, \quad (3)$$

где  $r$  – радиус-вектор точки поверхности.

Например, запишем уравнение кинематической поверхности в параметрической форме если:

$x = Cu$ ; уравнения формообразующей кромки инструмента, а  $y = Cv$ ;  
 $z = -D/C - Au - Bv$  – уравнение траектории ее движения. Тогда

$$r = \{Cu, Cv, -D/C - Au - Bv\} = \{0, 0, -D/C\} + u\{C, 0, -A\} + v\{0, C, -B\}.$$

Таким образом,  $u$  и  $v$  – общие координаты точки  $M$  плоскости с началом координат в точке  $(0, 0, -D/C)$  и масштабными векторами  $e_x = \{C, 0, -A\}$  и  $e_y = \{0, C, -B\}$ .

Уравнения (2) и (3) задают поверхность только в том случае, когда  $u$  и  $v$  независимые параметры. Необходимым и достаточным условием зависимости  $u$  и  $v$  явля-

ется коллинеарность векторов  $\partial r/\partial u$  и  $\partial r/\partial v$  в каждой точке поверхности, т.е. равенство нулю в каждой точке поверхности векторного произведения

$$\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v = 0.$$

Требование независимости параметров  $u$  и  $v$  предполагает, что векторное произведение ортов касательных к координатным линиям однозначно определяет орт нормали  $n$  к поверхности в точке  $M$ .

Для облегчения моделирования кинематической поверхности, сформированной по схеме следа, можно воспользоваться простым выражением:

$$z = f_1(x) + f_2(y), \quad (4)$$

где  $f_1(x)$  – уравнение формообразующей кромки инструмента;

$f_2(y)$  – уравнение траектории движения формообразования.

Поверхности вращения, образованные по схеме следа, можно получить, если в выражение, описывающее формообразующую кромку инструмента  $z = f(x)$ , подставить вместо  $x$  выражение

$$\sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (5)$$

Например, запишем уравнение кинематической поверхности при условии, что формообразующая кромка инструмента описывается уравнением  $z = -c/a x + c$ , а траектория движений формообразования –  $z = -c/b y + c$ .

Преобразовав эти уравнения к виду  $z - c = -(c/a)x$ ;  $z - c = -(c/b)y$ , получим согласно (4) уравнение кинематической поверхности  $x/a + y/b + z/c = 1$ , что соответствует плоскости общего положения.

Запишем уравнение поверхности вращения для случая, когда формообразующая кромка инструмента задана уравнением  $x^2/a^2 - z^2/b^2 = 1$ . Тогда уравнение поверхности будет иметь вид

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{b^2} = 1.$$

Как известно, это уравнение, описывающее поверхность однополостного гиперболоида.

Если формообразующую кромку не удастся описать простым аналитическим выражением, то необходимо попытаться описать ее многочленом второй степени. Коэффициенты многочлена можно определить из граничных условий. Кинематическая поверхность, образованная такой кромкой, также будет описываться аналогичного вида многочленом:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (6)$$

или

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})z + a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0, \quad (7)$$

где  $a_{ik} = a_{ki}$ ;  $i, k = 1, 2, 3, 4$ .

Уравнение (7) можно записать в векторной форме:

$$\bar{r}A\bar{r}^T + 2a\bar{r}^T + a_{44} = 0,$$

где  $A$  – аффинор с координатами  $A_k^i = a_{ik}$ .

Так как уравнением (6) затруднительно пользоваться, то его можно свести к частным уравнениям простейших поверхностей путём соответствующих поворотов и переносов осей координат хуз.

При формировании поверхности по комбинированной схеме моделирование ее зависит от способа реализации этой схемы. Если образующая поверхности формируется по схеме следа, а направляющая – по схеме огибания, то достаточно моделировать один локальный отсек и записать поверхность в параметрическом виде

$$F(x,y,z,t) = 0. \quad (8)$$

Локальные отсеки могут быть описаны уравнениями, ранее полученными для поверхностей, сформированных по схеме следа.

Если же образующая кинематической поверхности формируется по схеме огибания, а направляющая – по схеме следа, то вид уравнений кинематической поверхности зависит от количества формообразующих кромок и вида траектории их движений. В случае одной формообразующей кромки поверхность может быть сформирована за один или несколько проходов. Такая поверхность состоит из локальных отсеков, и описывающее ее уравнение можно получить в параметрическом виде. Для этого необходимо записать уравнение формообразующей кромки в виде (1) или (2), а уравнение траектории движения формообразования – в виде (1, 3) и в зависимости от формы направляющей получить уравнение кинематической поверхности в виде уравнений (4) или (5).

Свойства любой поверхности, описываемой уравнением (6), можно определить, используя теорию инвариантов.

Уравнение (6) можно также привести к каноническому виду (5,6,8). При параллельном переносе системы координат на вектор  $r_0$ , координаты которого удовлетворяют уравнению  $A r_0 = -a$ , в уравнении (6) исчезают линейные члены, и оно принимает вид

$$b_{11} x_1^2 + b_{22} y_1^2 + b_{33} z_1^2 + 2b_{12} x_1 y_1 + 2b_{13} x_1 z_1 + 2b_{23} y_1 z_1 + b_{44} = 0, \quad (9)$$

где  $x_1, y_1, z_1$  – координаты точки поверхности относительно новой систем  $\Sigma_1$ . В матричной форме уравнение (9) можно записать в виде

$$r_1 B r_1^T + b_{44} = 0; \quad r_1 = (x_1, y_1, z_1); \quad B = |b_{ij}|.$$

В результате такого переноса начало новой системы координат является центром симметрии поверхности, т.е. если  $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$  – точка поверхности, то  $-r_1 = (-x_1, -y_1, -z_1)$  – также точка поверхности. Матрицы  $A$  и  $B$  – симметрические ( $a_{ij} = a_{ji}$  и  $b_{ij} = b_{ji}$ ), поэтому их собственные значения действительны, а собственные векторы ортогональны. При последующем преобразовании к системе координат

$\Sigma_2$  с началом координат, совпадающим с системой  $\Sigma_1$ , и осями координат, совпадающими по направлению с собственными векторами, уравнение поверхности 2-го порядка приобретает вид

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \nabla z_2^2 + c_{44} = 0, \quad (10)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – собственные значения матрицы  $B$ .

В матричной форме уравнение (10) примет вид

$$\mathbf{r}_2 C \mathbf{r}_2^T + c_{44} = 0, \quad \mathbf{r}_2^T = (x_2, y_2, z_2),$$

$$C = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix},$$

где  $x_2, y_2, z_2$  – координаты точки на поверхности 2-го порядка относительно  $\Sigma_2$ .

При определении кинематической погрешности поверхности возникает потребность не только в ее аналитическом представлении, но и в определении касательной плоскости и расположения поверхности относительно декартовой системы координат.

Как известно [8 – 10], уравнение касательной плоскости в неособой точке  $(x_0, y_0, z_0)$  имеет вид

$$F_x'(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z'(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0, \quad (11)$$

где  $F_x'(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F_y'(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F_z'(x_0, y_0, z_0)$  – частные производные по  $x$ ,  $y$  и  $z$  уравнения (6).

Если не удастся записать аналитическое выражение, описывающее кинематическую поверхность, то ее можно задать каркасно. Из дискретных способов задания поверхностей наиболее разработанным является графический способ ботаксов и ватерлиний. Этот способ [11] заключается в построении системы параллельных сечений поверхности в трёх взаимно перпендикулярных плоскостях. По рассматриваемому способу поверхности задаются определенным способом расположенной системой линий на ней. Такой подход нашел развитие в работах Д.А. Вильямса, И.И. Котова, В.А. Осипова, Д.В. Павлова, Н.Н. Рыжова, С.А. Фролова и др. В практике машиностроения дискретно заданную поверхность полностью или по частям аппроксимируют аналитическими функциями, чаще всего сплайнами [12,13] Наибольшее распространение получили кубические сплайн-функции, которые обладают хорошими аппроксимативными свойствами, что обеспечивает высокую точность воспроизведения поверхности (при достаточной простоте реализации на ЭВМ), универсальностью, позволяющей использовать одни и те же аппроксимирующие конструкции для различных типов сложных поверхностей.

При аппроксимации следует стремиться минимизировать число аппроксимирующих отсеков путем увеличения площади каждого из них, рациональной их взаим-

ной ориентации и обязательном обеспечении заданной точности. Изменение параметризации формообразуемой поверхности детали с помощью уравнения  $u' = u'(u, v)$  и  $v' = v'(u, v)$  приводит к первым производным уравнения поверхности

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u'} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u'}; \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial v'} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v'} \quad (12)$$

С учетом того, что

$$\dot{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \dot{v} = u \det [A],$$

где  $[A] = [\partial \bar{r} / \partial u \quad \partial \bar{r} / \partial v]$ ,  
из (12) следует, что

$$[A'] = [\partial \bar{r} / \partial u' \quad \partial \bar{r} / \partial v'] = [A][P],$$

где  $[P] = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix}$  – матрица преобразования Якоби.

Поскольку для исходной  $(u, v)$  – параметризации формообразуемого отсека поверхности фундаментальная матрица основной квадратичной формы (Гаусса) равна

$$[G] = [A^T][A] = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} & \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

аналогичная матрица для новой  $(u', v')$ - параметризации того же отсека задаётся соотношением

$$[G'] = [A']^T [A'] = [P]^T [A]^T [A] [P] = [P]^T [G] [P] \quad (14)$$

Из уравнения (14) согласно известным свойствам детерминантов имеем  $\det [G'] = \det [P]^2 \det [G]$ .

Тогда из системы (12) следует, что вектор  $n$  единичной нормали к формообразуемой поверхности детали в результате преобразований не меняется.

Аналогично дифференцируя (12) и используя свойство инвариантности вектора  $n$  по отношению к виду параметризации, можно показать, что фундаментальную матрицу второй основной квадратичной формы можно преобразовать соотношением [2–4]

$$[D'] = [P]^T [D][P]. \quad (15)$$

По уравнениям (14) и (15) можно показать, что главные радиусы кривизны поверхности детали инварианты по отношению к способу параметризации формируемой поверхности детали.

**Выводы.** Предложенная классификация обработанных поверхностей обеспечивает системный подход к их моделированию, а введенная классификация кинематических поверхностей позволяет систематизировать их и облегчает применение известных аналитических моделей локальных отсеков для моделирования всей поверхности. Кроме того, предложенная методика последовательного моделирования значительно облегчает аналитическое описание широкого класса кинематических поверхностей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов М.И. Формообразование угловых поверхностей концевыми фрезами / Тез. докл. МНТК «Технические вузы – республике» – Мн.: БГПА, 1997 – С. 52.
2. Радзевич С.П. Новые достижения в области обработки деталей сложной формы на станках с ЧПУ. – М.: ВНИИТЭМР, 1987.– 48 с.
3. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия (первое знакомство). – М.: Из-во МГУ, 1990.– 384 с.
4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1969.– 176 с.
5. Дружинский А.И. Сложные поверхности: математическое описание и технологическое обеспечение: Справочник. – Л.: Машиностроение, 1985.– 263 с.
6. Лашнев С.И., Юликов М.И. Расчет и конструирование металлорежущих инструментов с применением ЭВМ. – М.: Машиностроение, 1975.– 392 с.
7. Лашнев С.И., Юликов М.И. Проектирование режущей части инструмента с применением ЭВМ. – М.: Машиностроение, 1980.– 208 с.
8. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. – М.: МГУ, 1969.– 698 с.
9. Дальский А.М. Технологическое обеспечение надежности высокоточных деталей машин. – М.: Машиностроение, 1975.– 224 с.
10. Ребане Ю.К., Портман В.Т., Тарамыкин Ю.П. Теория огибания и современные вычислительные методы при технологической подготовке зубообработки и проектировании зуборезных станков // Вестник машиностроения. 1995. №8. С. 42–45.
11. Armarego E.U.A., Rotenderg A. An investigation of drill point sharpening by the straight lip conical grinding method / Jnt. J.Mach. Tool Des. and Res., 1973, 13, №3, p.155–164.
12. Стрельченко О.А. Установление взаимно-однозначного соответствия между двумя семействами сетей на поверхности // Прикладная геометрия и инженерная графика. Вып. 35. – Киев: Будівельник, 1983. – с. 50–52.
13. Математика и САПР: В 2-х кн. Кн.1. Пер. с франц. / Шенен П., Гардан И. и др. – М.: Мир, 1988. – 204 с.