УДК 539.3

В. А. Акимов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРОВ БЕСКОНЕЧНО ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ПРИ ПОСТРОЕНИИ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь

Рассмотрим изотропное однородное тело. Уравнения эластокинетики в перемещениях, без учета массовых сил, имеют вид [1]

$$C_2^2 \nabla \vec{U} + \left(C_1^2 - C_2^2\right) grad\ div \vec{U} = \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \tag{1}$$

где $\vec{U}$ – вектор перемещений упругой среды,

∇ – оператор Лапласа,

grad и *div* – дифференциальные операторы векторного поля,

C_1 и C_2 – скорости продольных и поперечных волн.

Общее решение уравнения (1) можно записать посредством формулы Ламе

$$\vec{U} = \overline{grad}\Phi + rot\vec{\Psi}, \tag{2}$$

где скалярная Φ и векторная $\vec{\Psi}$ функции удовлетворяют соответствующим волновым уравнениям

$$\nabla_1 \Phi = \left(\nabla - \frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = 0, \quad \nabla_2 \vec{\Psi} = \left(\nabla - \frac{1}{C_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\Psi} = 0 \tag{3}$$

Если тело ограниченно, то продольные и поперечные волны распространяются от места возмущения до границы, а затем отражаются. В ограниченном теле функции Φ и $\vec{\Psi}$ связаны между собой граничными условиями.

В случае двумерной задачи перемещения и напряжения выражаются посредством формул [1]

$$U = \partial_1 \Phi - \partial_2 \Psi, \quad V = \partial_2 \Phi - \partial_1 \Psi, \tag{4}$$

$$\frac{\sigma_{11}}{G} = \left(\gamma_2 \partial_2^2 + \gamma \partial_1^2\right)\Phi - 2\partial_1 \partial_2 \Psi,$$

$$\frac{\sigma_{22}}{G}=\left(\gamma_2\partial_1^2+\gamma\partial_2^2\right)\Phi+2\partial_1\partial_2\Psi, \tag{5}$$

$$\frac{\sigma_{12}}{G}=2\partial_1\partial_2\Phi+\left(\partial_1^2-\partial_2^2\right)\Psi ,$$

где $\partial_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2=\frac{\partial}{\partial y}$, $\gamma=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\gamma_2=\gamma-2$,

ν – коэффициент Пуассона,

G – модуль Юнга второго рода.

Для иллюстрации нового подхода, заключающегося в представлении общего решения посредством операторов бесконечно высокого порядка, рассмотрим задачу о распространении плоской волны в неограниченном упругом слое толщиной $2h$. Волна движется вдоль слоя в положительном направлении оси x. Рассмот-рим два типа колебаний: симметричные и антисимметричные относительно сре-динной плоскости слоя. Первому случаю соответствует растяжение слоя, а второму – его изгиб.

Для симметричной формы колебаний (задача A) решение будем разыскивать в виде

$$\Phi=\left[A\frac{\cos\left(y\sqrt{\nabla_1}\right)}{\sin\left(h\sqrt{\nabla_1}\right)}\right]*f(x,t),\quad \Psi=\left[\mathrm{B}\frac{\sin\left(y\sqrt{\nabla_2}\right)}{\sin\left(h\sqrt{\nabla_2}\right)}\right]*f(x,t), \tag{6}$$

где ∇_1 и ∇_2 – волновые операторы, описываемые формулой (3),

$f(x,t)$ – произвольная аналитическая функция,

знак «*» обозначает действие оператора на функцию.

Входящие в решение операторные коэффициенты А и В найдем из условия равенства нулю напряжений на поверхности слоя:

$$\sigma_{22}=0,\ \sigma_{12}=0,\ \text{при } y=\pm h \tag{7}$$

Используя краевые условия (7), после подстановки соотношений (6) в (5) приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases}\left[A\left(\gamma_2\partial_1^2-\gamma\nabla_1\right)ctg\left(h\nabla_1\right)+2B\partial_1\sqrt{\nabla_1}ctgh\sqrt{\nabla_2}\right]*f(x,t)=0\\ \left[-2A\partial_1\sqrt{\nabla_1}+B\left(\partial_1^2+\nabla_2\right)\right]*f(x,t)=0\end{cases} \tag{8}$$

Легко видеть, что при $B = 2\partial_1$ и $A = \dfrac{\partial_1^2 + \nabla_2}{\sqrt{\nabla_1}}$ условие $\sigma_{12} = 0$ выполняется тождественно. Подставляя эти значения в выражение для σ_{22}, с учетом $\gamma_2\partial_1^2 - \gamma\nabla_1 = -\left(\partial_1^2 + \nabla_1\right)$ получим:

$$\frac{\sigma_{22}}{G} = \left[-\frac{\left(\partial_1^2 + \nabla_2\right)^2}{\sqrt{\nabla_1}} ctgh\sqrt{\nabla_1} + 4\partial_1^2\sqrt{\nabla_2}\,ctgh\sqrt{\nabla_2} \right] * f(x,t) = 0$$

Отметим, что полученное выражение с точностью до множителя совпадает с детерминантом системы (8).

Полагая $f(x,t) = e^{i(\omega t - kx)}$, предварительно устанавливаем

$$\left[\cos h\sqrt{\nabla_1}\right] * e^{i(\omega t - kx)} = ch(h\lambda_1)e^{i(\omega t - kx)},$$

где $\lambda_1 = \sqrt{k^2 - \tau^2}$, $\tau_1 = \dfrac{\omega}{C_1}$.

Используя понятие обратного оператора, находим $D = \dfrac{1}{\sqrt{\nabla_1}\sin\sqrt{\nabla_1}}$,

и тогда

$$\left[D^{-1}\right] * e^{i(\omega t - kx)} = -\lambda_1 sh(h\lambda_1)e^{i(\omega t - kx)}; \quad [D] * e^{i(\omega t - kx)} = -\frac{e^{i(\omega t - kx)}}{\lambda_1 sh(h\lambda_1)}.$$

Кроме того, $\left(\partial_1^2 + \nabla_2\right)^2 = \left(k^2 + \lambda_2^2\right)^2$, где $\lambda_2 = \sqrt{k^2 - \tau_2^2}$, $\tau_2 = \dfrac{\omega}{C_2}$.

Аналогичные соотношения имеют место и для тригонометрических функций, аргументом которых является оператор $\sqrt{\nabla_2}$. В результате условие $\sigma_{22} = 0$ при $y = \pm h$ принимает вид

$$\frac{th(h\beta)}{th(h\zeta)} = \frac{4k^2\zeta\beta}{\left(k^2 + \beta^2\right)^2}, \tag{9}$$

где $\beta = k\sqrt{1-\dfrac{C^2}{C_2^2}}$; $\zeta = k\sqrt{1-\dfrac{C^2}{C_1^2}}$, $C=\dfrac{\omega}{k}$ – фазовая скорость волны.

Для нулевых краевых условий при антисимметричной форме колебаний (задача В) получим

$$\frac{cth(h\beta)}{cth(h\zeta)} = \frac{4k^2\zeta\beta}{\left(k^2+\beta^2\right)^2} \tag{10}$$

Исследуем более подробно формулу (9). Если длина волны велика по сравнению с h, то $h\beta$ и $h\zeta$ становятся малыми, так что гиперболические тангенсы можно заменить их аргументами и тогда $4k^2\zeta^2 = \left(k^2+\beta^2\right)^2$. Подставляя сюда значения β и ξ, после преобразования получим $C^2 = 4C_2^2\dfrac{C_1^2-C_2^2}{C_1^2}$. Но $C_1^2 = \dfrac{\gamma G}{\rho}$ и $C_2^2 = \dfrac{G}{\rho}$, следовательно $C = 2\sqrt{\dfrac{\gamma-1}{\gamma}}C_2$ (11), что при $\gamma = \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}$ совпадает с результатом, полученным из элементарной теории [2].

Для очень коротких волн $h\beta$ и $h\zeta$ становятся очень большими и их гиперболические тангенсы стремятся к единице. При этом уравнение (9) упрощается:

$$\left(k^2+\beta^2\right) = 4k^2\beta\zeta\,.$$

Возводя в квадрат обе части и подставляя значения β и ξ, получаем

$$\left(2-\frac{C^2}{C_1^2}\right)^4 = 16\left(1-\frac{C^2}{C_1^2}\right)\left(1-\frac{C^2}{C_2^2}\right)$$

В этом уравнении мы узнаем [1, 2] характеристическое уравнение для поверхностных волн Релея.

Итак, плоские продольные волны в бесконечной пластинке могут распространяться со скоростью c, представленной формулой (11), когда длина волны очень велика по сравнению с толщиной пластинки h, и со скоростью поверхностных волн Релея, когда длина волны очень мала в сравнении с толщиной. Для длин волн, сравнимых с толщиной, имеет место дисперсия, а скорость зависит от отношения длины волны к толщине полосы.

ЛИТЕРАТУРА

1.Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, – 1975. – 872 с. 2. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд–во «ИЛ» – 1955. – 192 с.

УДК 539.532.526

Г. Я. Беляев , А. Ф.Головаченко

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАЧАЛА ПРОЦЕССА ТРЕНИЯ ДВУХ ТЕЛ

Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь

Как известно, все металлы характеризуются кристаллическим строением. В узлах кристаллической решетки располагаются атомы элементов, из которых состоит данный сплав. Внутренние атомы кристаллической решетки окружены всегда определенным количеством соседних атомов и взаимодействуют с ними. Поверхностный слой атомов всегда находится в неустойчивом состоянии, отличающемся от энергетического состояния внутренних атомов. У поверхностных атомов со стороны окружающей среды отсутствуют связи с себе подобными элементами, а имеются только связи, с соседними атомами поверхностного слоя направленные вдоль поверхности, и с внутренними атомами кристаллической решетки металла. Идеальных кристаллических решеток у реальных металлов и их сплавов не существует, т.е. все металлы имеют дефекты кристаллического строения. Дефектом является любое отклонение от периодической структуры кристаллической. Различают точечные, линейные и плоские дефекты. Механические свойства металлов и их сплавов в значительной степени зависят от наличия дефектов кристаллического строения, т.к. энергия взаимодействия атомов в месте дефекта резко отличается от межатомного взаимодействия в бездефектной зоне. К дефектам относятся вакансии, дислокации, двойники, пластинчатые выделения, а также границы кристаллитов. Любой дефект кристаллической решетки будет снижать механические характеристики металлов и сплавов, например, такие как прочность, износостойкость, хрупкость, коррозионная стойкость и др. Это подтверждается исследованиями прочности нитевидных кристаллов и обычных массивных образцов при разрыве и сравнением их с идеальной прочностью этих материалов [1]. Можно сказать, что значительное влияние на свойства металлов и сплавов оказывают границы кристаллитов, т.к. именно здесь резко меняются свойства кристаллической решетки и здесь чаще всего начинаются различные процессы разрушения металлов, например процесс межкристаллитной коррозии.