Из анализа результатов полученных исследований следует, что при $g_1>1$, $\theta \geq 1{,}5\theta_1$ (падение продольной волны) и при $q_1 \geq 2$, $\gamma \geq 1{,}5\gamma_1$ (падение поперечной волны) плита является эффективной виброизолирующей конструкцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 344 с.
2. Заборов В.И. Теория звукоизоляции ограждающих конструкций – М.: Стройиздат, 1969. – 185с.

УДК 539.3

А. Е. Крушевский, Т. А. Лудеманн

УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИКИ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь

Как известно, при выводе уравнений технической теории тонких пластин приняты априорные гипотезы Кирхгофа–Лява, а также допущены некоторые противоречия с законом Гука и с условиями выполнения краевых условий на торцах пластинки. Кроме того, пренебрегается инерцией поворота элементарного столбика, что не позволяет получить достоверные решения ряда динамических задач, таких как определение спектра частот собственных колебаний, определение вынужденных колебаний пластин и др. А это обстоятельство, в свою очередь, сказывается на применении модели упругой пластинки к изучению различных физических явлений, например, при моделировании голосообразования в случае представления голосовых связок в виде тонких упругих пластин, подверженных действию динамических нагрузок [5].

Указанные недостатки технической теории пластин заставили ученых построить различные уточненные теории [1, 2, 3]. По мнению авторов данной статьи, наиболее совершенную теорию пластин можно построить, если заранее выполнить все краевые условия на торцах: $z = \pm\frac{h}{2}$, $\sigma_z = \pm\frac{q}{2}$, $\tau_{xz} = \pm\frac{x_z}{2}$, $\tau_{yz} = \pm\frac{y_z}{2}$. Это можно осуществить на базе любых полных рядов с использованием вариационного уравнения равновесия элементарного столбика [4]. В частности, удобно применить ряды по полиномам Лежандра благодаря их ортогональности [2].

Ограничиваясь двумя полиномами, запишем ряды аппроксимирующих функций:

$$u=\frac{2z}{h}U_1+\left(\frac{20z^3}{h^3}-\frac{3z}{h}\right)U_3$$

$$v=\frac{2z}{h}V_1+\left(\frac{20z^3}{h^3}-\frac{3z}{h}\right)V_3$$

$$w=W_0+\frac{1}{2}\left(\frac{12z^2}{h_2}-1\right)W_2$$

В качестве возможных перемещений возьмем линейные функции, а именно $\delta u=z$, $\delta v=z$, $\delta w=1$.

Выполняя краевые условия на торцах пластинки, получим следующие выражения для перемещений:

$$u=\frac{5z}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)U_1+\left(\frac{20z^3}{h^3}-\frac{3z}{h}\right)\left[\frac{x_z}{2G}-\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\frac{\gamma_2 h^2\Delta_2}{12\gamma}\right)W_0-\frac{(\gamma-1)h\partial q}{12\gamma G\partial x}\right]\frac{h}{12},$$

$$v=\frac{5z}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)V_1+\left(\frac{20z^3}{h^3}-\frac{3z}{h}\right)\left[\frac{y_z}{2G}-\frac{\partial}{\partial y}\left(1+\frac{\gamma_2 h^2\Delta_2}{12\gamma}\right)W_0-\frac{(\gamma-1)h\partial q}{12\gamma G\partial y}\right]\frac{h}{12},$$

$$w=W_0+\frac{\gamma_2 h}{24\gamma}\left(\frac{12z^2}{h^2}-1\right)\left(h\Delta_2 W_0+\frac{\gamma-1}{\gamma_2 G}q\right),\ \Delta_2=\Delta-\frac{\rho\partial^2 t}{G},$$

h – толщина пластинки, ρ – плотность, G – модуль сдвига, $\gamma=\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\gamma_2=\gamma-2$,

ν – коэффициент Пуассона, $\Delta=\partial_x^2+\partial_y^2$, Δ – оператор Лапласа.

Неизвестные функции U_1, V_1 и W_0 находятся из уравнений равновесия элементарного столбика:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x z dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy}z dz-\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xz}dz-\rho\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}z dz+X_z=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy}zdz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_y zdz-\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{yz}dz-\rho\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}zdz+Y_z=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xz}dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{yz}dz-\rho\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dz+q=0.$$

В результате выполнения всех операций интегрирования и исключения обобщенных перемещений U_1 и V_1 получим разрешающее уравнение относительно W_0:

$$\frac{-\gamma_2 h^2\Delta\Delta_1\Delta_2 W_0}{720}+\frac{1}{6}\left[\frac{\gamma\Delta_1(6\Delta_2-\Delta)}{10}-\frac{\gamma_2^2\Delta\Delta_2}{2\gamma}\right]W_0+\frac{\rho\partial^2 W_0}{Gh^2\partial t^2}=$$

$$=\frac{q}{Gh^3}+\frac{(\gamma-1)\Delta\Delta_1 qh}{720G}-\gamma\left[\frac{\Delta_1}{10}-\frac{\gamma_2(\gamma-1)\Delta}{12\gamma^2}\right]\frac{q}{Gh}-\frac{\gamma}{6G}\left(\frac{\Delta_1}{20}-\frac{3}{\gamma h^2}\right). \qquad (27)$$

$\left(\partial_x x_z+\partial_y y_z\right)$, где $\Delta_1=\Delta-\dfrac{\rho}{\gamma G}\partial_t^2$.

Если пренебречь инерционными членами в операторах Δ_1 и Δ_2, т.е. $\Delta_1=\Delta_2=\Delta$, а также отбросить слагаемые с производными от нагрузки, слагаемое, содержащее оператор $\Delta\,\Delta_1\,\Delta_2$, то получим известное уравнение Софи-Жермен технической теории пластин, а именно:

$$\Delta\Delta W_0+\frac{\rho h\partial_t^2}{D}W_0=\frac{3\gamma q}{(\gamma-1)Gh^3}=\frac{q}{D},\quad D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}.$$

Таким образом, благодаря использованию в качестве возможных перемещений линейных функций на основе гипотез Кирхгофа–Лява, предлагаемая уточненная теория пластин обладает преемственностью по отношению к классической теории и в то же время свободна от противоречий.

В качестве примера определим собственные частоты изгибных колебаний прямоугольной шарнирно опертой пластинки. В этом случае на контуре пластинки должны быть равны нулю вертикальные перемещения и изгибающие моменты. Это означает, что решение можно построить с помощью рядов Фурье, выполняющих указанные условия, т.е.

$$W_0=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}\sin\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}\sin(\omega t+\alpha).$$

В результате получаем следующее частотное уравнение:

$$\frac{\omega^4\rho^2}{G^2}\left[\frac{3}{5}+\frac{\gamma_2 h^2\pi^2}{120\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]-$$

$$-\frac{\omega^2\rho}{G}\left[\frac{\gamma_2 h^2(\gamma+1)\pi^4}{120\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{(13\gamma-10)\pi^2}{5\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)+\frac{6}{h^2}\right]+$$

$$+\frac{\gamma_2 h^2\pi^6}{120}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^3+\frac{2(\gamma-1)\pi^4}{\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2=0.$$

Подсчитаем некоторые собственные частоты изгибных колебаний квадратной пластинки ($a=b$) по технической и уточненной теории ($\gamma=3$, $\gamma_2=1$, $\frac{h}{a}=0,1$, $\nu=0,25$). Формула для частоты по технической теории [6]:

$$\omega_{mn}^{\mathrm{T}}=\pi^2 h\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\sqrt{\frac{G}{6(1-\nu)\rho}}.$$

Таблица значений собственных частот ($\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$)

m	1	3	3	5
n	1	1	3	1
ω^{T}	0,9305	4,6525	8,374	12,097
ω^{Y}	0,903	4,0884	6,804	9,209
	32,586	36,0154	38,975	41,625

где ω^{T} – частота по технической, ω^{Y} – частота по уточненной теории.

Как и следовало ожидать, значения собственных частот уменьшились благодаря увеличению числа степеней свободы элементарного столбика. Кроме того, учет инерции поворота элементарного столбика показывает возникновение нового спектра частот изгибных колебаний высокого тона. Если различие между собственными низшими частотами по технической и уточненной теории незначительное, то для высших частот это различие существенное. Итак, даже для достаточно тонкой пластинки ($\frac{h}{a}=0,1$) при определении собственных частот изгибных колебаний по уточненной теории имеем существенно новые результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М: Физматгиз, 1967.–266 с. 2. Амбразевич В.Л., Крушевский А.Е. Построение уточненной теории трансверсально-изотропных пластин на основе методов аналитической механики // 25 я н/т конф. БПИ. – Мн., 1969.– С. 39–49. 3. Векуа И.Н. Об одном обобщении классической теории упругих оболочек. // Третий Всесоюзный съезд по теор. и прикл. механике. Аннотации докл. – М., 1968. – С. 65–66. 4. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Мн.: Наука и техника, 1967. – 238 с. 5. Крушевская Т.А. Построение математической модели голосообразования. // Тезисы н/т конференции, посвященной 70-летию БГУ. Мн.: Вышэйшая школа. 1991.– с. 238–239. 6. Пономарев С.Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 3. Машгиз. – 1959. – 118 с.

УДК 621.97

С. Лабер

ВЛИЯНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ СХВАТЫВАНИЮ СЕРОГО ЧУГУНА

Политехника Зеленогурска
Зелена Гура, Польша

Работа пары трения скольжения в условиях смешанного трения в случае разрыва смазочной пленки сопровождается катастрофическим изнашиванием поверхностей контакта, т.е. их разрушением. Это явление называется схватыванием. Сопротивление схватыванию – одна из эксплуатационных характеристик деталей машин, работающих в условиях трения скольжения. В процессе взаимодействия элементов трения оно проявляется виде сцепления и появления мостиков схватывания, разрушение которых практически мгновенно возрастает, приводя к глубинным разрушениям поверхностного слоя деталей. Схема работы пары трения «металл – металл» приведена на рис. 1.

Процесс фрикционного контакта можно разделить на три этапа: возникновение стыка, молекулярное взаимодействие трущихся поверхностей и прерывание кон-