

щий момент. С ростом удельного сопротивления и уменьшением диэлектрической проницаемости вращающий момент увеличивается.

Влияние же момента сопротивления на скорость вращения ротора представляет собой падающие кривые с двумя нелинейными участками (начальным и конечным), на которых влияние сопротивления на скорость вращения велико и незначительное увеличение  $M_{\text{СОПР}}$  существенно изменяет скорость вращения. За исключением этих двух относительно небольших нелинейных участков скорость вращения в основном уменьшается пропорционально приложенному моменту сопротивления при различных подаваемых электрических напряжениях. Коэффициент пропорциональности уменьшается в области средних подаваемых напряжений.

Результаты исследования могут быть использованы при создании реоэлектрических микродвигателей, а также для разработки надежных и простых генераторов механических незатухающих колебаний для приборостроения и измерительной техники. Их достоинством является с раздельное и независимое регулирование амплитуды и частоты колебаний, что обычно труднодостижимо.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шульман З.П., Носов В.М. Вращение непроводящих тел в электрореологических суспензиях.—Мн.: Наука и техника, 1985.—112 с. 2. Z.P.Shulman and V.M. Nosov. Rotation of the Axisymmetric Bodies in Electrorheological Suspensions, in Proceedings of the 5<sup>TH</sup> International Conference Electro-Rheological Fluids, Magneto-Rheological Suspensions and Associated Technology (Sheffield, 1995), pp. 72–84. 3. Z.P.Shulman and V.M.Nosov. Rotation of the Axisymmetric Bodies in Electrorheological Suspensions (ERS), in International Journal of Modern Physics B, Vol. 10, Nos. 23 & 24 (1996) 2903–2915. 4. Электротехнический справочник.Т.1.-М.:Энергия, 1980.—519 с.

УДК 681.3 (082):539.1

О. В. Громыко

### КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

*Белорусская государственная политехническая академия  
Минск, Беларусь*

Первым и наиболее сложным шагом в численном решении уравнений теории оболочек методом конечных разностей при исследовании напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов конструкций [1–3] является процесс дискретизации.

## 1. Автоматическая генерация конечно-разностных формул

Известно, что стандартная конечно-разностная аппроксимация, например, дифференциального выражения  $dy/dx$  имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} \cong \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (1)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  являются конечными точками интервала  $l$  длиной  $h$  (рис.1), а  $y_1$  и  $y_2$  являются соответствующими значениями функции  $y$ .

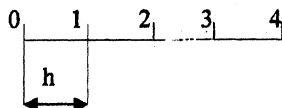


Рис. 1.

Уравнение (1) является эквивалентом аппроксимации функции  $y$  линейным полиномом в интервале  $l$ ; оно приближается к точному значению производной при стремлении длины интервала к нулю. В численном анализе, однако,  $h$  всегда является конечной величиной и использование соотношения (1) всегда приводит к ошибке. Таким образом, большое практическое значение имеет более точная аппроксимация производной  $dy/dx$  и производных более высокого порядка (см., например, п. 2).

В методе конечных элементов использование полиномов высокого порядка приводит к уточнению решений дифференциальных уравнений при заданном (фиксированном) числе узлов сетки. Подобные результаты справедливы и для формул интегрирования.

Рассмотрим аппроксимацию функции  $y$  с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа  $n$ -го порядка:

$$y = \sum_{j=1}^{n+1} y_j l_j^{(n)}(x), \quad (2)$$

$$\text{где } l_j^{(n)}(x) = \frac{\gamma_j^{(n)}(x)}{\gamma_j^{(n)}(x_j^{(n)})}, \text{ а } \gamma_j^{(n)}(x) = \prod_{m=1, m \neq j}^{n+1} (x - x_m^{(n)}). \quad (3)$$

С использованием этой аппроксимации получим:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{j=1}^{n+1} y_j \frac{dl_j^{(n)}(x)}{dx}. \quad (4)$$

Поскольку производная от полинома  $n$ -го порядка имеет порядок  $(n-1)$ , уравнение (4) может быть записано в форме

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{n+1} D_{ij}^{(n)} y_j \right) l_i^{(n-1)}(x), \text{ где } D_{ij}^{(n)} = \frac{dl_i^{(n)}(x_i^{(n-1)})}{dx}. \quad (5)$$

Подставляя (3) в (5), получим:

$$D_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{\sum_{k=1, k \neq j}^{n+1} \gamma_k^{(n)}(x_i^{(n-1)})}{(x_i^{(n-1)} - x_j^{(n)}) \gamma_j^{(n)}(x_j^{(n)})}, & \text{если } x_i^{(n-1)} \neq x_j^{(n)}, j = 1, \dots, n+1 \\ \frac{1}{x_k^{(n)} - x_j^{(n)}} \frac{\gamma_k^{(n)}(x_k^{(n)})}{\gamma_j^{(n)}(x_j^{(n)})}, & \text{если } x_i^{(n-1)} = x_k^{(n)} \neq x_j^{(n)}, \\ \sum_{k=1, k \neq j}^{n+1} \frac{1}{x_j^{(n)} - x_k^{(n)}}, & \text{если } x_i^{(n-1)} = x_j^{(n)}. \end{cases} \quad (6)$$

Если узлы интерполяции  $\{x_i^{(n)}\}$  и  $\{x_i^{(n-1)}\}$  взяты пространственно совпадающими, тогда при  $n \geq 2$  уравнение (6) преобразуется к виду:

$$D_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{L[ni - (n-1)j + 1]} \sum_{k=1, k \neq j}^{n+1} \frac{(-1)^{j-k} (n-k-1)!(k-1)!}{(n-j-1)!(j-1)!}, & \text{если } x_i^{(n-1)} \neq x_j^{(n)} \\ \frac{n(n-1)^{j-k} (n-k-1)!(k-1)!}{L(k-j)(n-j-1)!(j-1)!}, & \text{если } x_i^{(n-1)} = x_k^{(n)} \neq x_j^{(n)} \\ \frac{n}{L} \sum_{k=1, k \neq j}^{n+1} \frac{1}{j-k}, & \text{если } x_i^{(n-1)} = x_j^{(n)} \end{cases} \quad (7)$$

Величины  $D_{ij}^{(n)}$  в соотношениях (7) формируют множество матриц  $n$  на  $(n+1)$ , которые в дальнейшем будем называть матрицами дифференцирования. Числовые значения матриц дифференцирования были точно вычислены для полиномов порядка от первого до девятого, а в табл. 1 приведены для пяти.

Таблица 1

$n=1$	-1	1			
$n=2$	-3	4	-1		
$n=3$	-5,5	9	-4,5	1	
	0,125	-3,375	3,375	-0,125	

n=4	-8,33333333	16	-12	5,33333333	-1
	-0,08641975	-4,5432099	5,48148148	-0,987654321	0,13580247
n=5	-11,41666666	25	-25	16,66666666	-6,25
	-0,20654297	-6,1157227	8,45540364	-2,856445312	0,84228516
	-0,02343750	0,32552083	-5,8593750	5,8593750000	-0,32552083

В ней представлены только элементы верхней треугольной части матрицы (плюс центральная колонка); другая половина матрицы получается с использованием свойства антисимметричности:

$$D_{ij}^{(n)} = -D_{n-i+1, n-j+2}^{(n)} \quad (8)$$

Отметим, что для случая низшего порядка, при  $n=1$ , уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Это то же уравнение (1), но представленное в матричной форме.

## 2. Конечно-разностные соотношения для производных высоких порядков.

Опуская промежуточные выводы, приведем окончательные соотношения для пятиточечных схем аппроксимации конечными разностями производных различного порядка (см. рис.1).

$$y_0' = \frac{1}{12h} (-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4)$$

$$y_0'' = \frac{1}{12h^2} (35y_0 - 104y_1 + 114y_2 - 56y_3 + 11y_4)$$

$$y_0''' = \frac{1}{2h^3} (-5y_0 + 18y_1 - 24y_2 + 14y_3 - 3y_4)$$

$$(y_0^{(4)})' = \frac{1}{h^4} (y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4)$$

$$y_1' = \frac{1}{12h} (-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4)$$

$$y_1'' = \frac{1}{12h^2} (11y_0 - 20y_1 + 6y_2 + 4y_3 - y_4)$$

$$y_1''' = \frac{1}{2h^3}(-3y_0 + 10y_1 - 12y_2 + 6y_3 - y_4)$$

$$(y_1''')'' = \frac{1}{h^4}(y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4)$$

$$y_3' = \frac{1}{12h}(-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4)$$

$$y_3 = \frac{1}{12h^2}(-y_0 + 4y_1 + 6y_2 - 20y_3 + 11y_4)$$

$$y_3''' = \frac{1}{2h^3}(y_0 - 6y_1 + 12y_2 - 10y_3 + 3y_4)$$

$$(y_3''')'' = \frac{1}{h^4}(y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4)$$

$$y_4' = \frac{1}{12h}(3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4)$$

$$y_4'' = \frac{1}{12h^2}(11y_0 - 56y_1 + 114y_2 - 104y_3 + 35y_4)$$

$$y_4''' = \frac{1}{2h^3}(3y_0 - 14y_1 + 24y_2 - 18y_3 + 5y_4)$$

$$(y_4''')'' = \frac{1}{h^4}(y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4)$$

$$y_i' = \frac{1}{12h}(-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}) + 0(h^4)$$

$$y_i'' = \frac{1}{12h^2}(-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}) + 0(h^4)$$

$$y_i''' = \frac{1}{2h^3}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}) + 0(h^2)$$

$$(y_i''')'' = \frac{1}{h^4}(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}) + 0(h^2)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Громько О.В. Напряженно-деформированное состояние тонкостенных оболочек вращения. – Материалы межд. НТК «Наука и технологии на рубеже XXI века». – Минск: БГПА, 2000. 2. Скойбеда А.Т., Громько О.В. Матричная форма

уравнений для расчета оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. I. Исходные соотношения. – *Вестні нацыянальнай акадэміі навук Беларусі*. №2, 1999, с. 98–102.  
3. Скойбеда А.Т., Громыко О.В. Матричная форма уравнений для расчета оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. II. Система уравнений равновесия в перемещениях и их решение. – *Вестні нацыянальнай акадэміі навук Беларусі*. №2, 1999, с. 103–108.

УДК 539.22.002.3

О. В. Громыко

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ НЕСУЩЕЙ ФЕРМЫ РАДИОТЕЛЕСКОПА

*Белорусская государственная политехническая академия  
Минск, Беларусь*

Определение динамических характеристик машиностроительных конструкций с использованием методов вынужденных гармонических колебаний и свободных колебаний широко распространено в практике лабораторных испытаний. Это обусловлено ясными теоретическими основами методов, позволяющих определять достоверные значения искомых величин. Метод свободных колебаний предусматривает анализ колебаний системы, вызванных начальным возмущением определенного типа: в виде импульса, начального прогиба или возбуждения в резонансе с его последующим снятием. Для систем с незначительной жесткостью, к числу которых относятся ферменные конструкции [1, 2] радиотелескопов (РТ), наиболее предпочтительным является второй способ. Для реализации третьего способа требуется сложная виброаппаратура и частотные анализаторы переходных процессов. В резонансном методе конструкция возбуждается гармонической силой. Измеряются амплитуды колебаний различных точек конструкции в зависимости от частоты. Искомые динамические характеристики получаются путем анализа резонансных пиков амплитудно-частотных характеристик. Резонансный режим колебаний достигается плавным изменением частоты возбуждающего усилия. Формы колебаний на основании измерения амплитуд в различных точках конструкции при резонансной частоте.

Основная трудность при определении собственных частот реальных конструкций резонансным методом состоит в том, что резонансные пики не совпадают точно с собственными частотами, а несколько смещены. Этот эффект объясняется влиянием диссипативных сил и нерезонансных тонов колебаний, близостью собственных частот конструкции, нелинейностью её поведения при больших усилиях воз-