УДК 001.891.573

В.С. Мисевич

РЕЗОНАНСНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Витебский государственный технологический университет
Витебск, Беларусь

1. Одной из задач, которые решаются с помощью математических моделей, является отражение связи между физическими величинами, установленной в эксперименте. Такие модели называются регрессионными. Регрессионные математические модели являются основным теоретическим инструментом при исследовании многих технических задач, что составляет основу их непреходящей актуальности. Особенно важную роль играют математические модели при исследовании и проектировании технологических процессов, в которых механизм связи между величинами не раскрыт полностью. В таких случаях нельзя составить уравнения, отражающие закономерности рассматриваемого процесса, на основании законов физики, химии и др. фундаментальных наук, и регрессионные модели становятся единственным математическим инструментом для исследования таких процессов. Задача может усложняться тем, что на результат технологического процесса могут влиять одновременно несколько факторов. При этом, часто бывает необходимым установить наличие у некоторого показателя, параметра, технологического процесса экстремумов, зависящих от каждого из факторов. Модели традиционных видов, например, полиномиальные, позволяют это сделать, но требуют дифференцирования по каждому из аргументов, анализа производных и т.д., т. е. требуют выполнения довольно сложной процедуры. Даже если эта процедура автоматизирована с помощью ЭВМ, она требует определенного опыта и непростой интерпретации формальных результатов.

Поиск экстремумов некоторого показателя технологического процесса, особенно, экстремумов, зависящих от нескольких факторов, удобно производить с помощью резонансных математических моделей. Формы резонансных математических моделей берут свое начало от уравнения амплитуды резонансных колебаний. Из теории колебаний известна формула зависимости амплитуды колебаний A от круговой частоты w колебаний возмущающей силы, амплитуды этой силы F_a, коэффициента жесткости системы k, массы m и коэффициента демпфирования c:

$$A = \frac{F_a}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \left(c\omega\right)^2}} .$$

При $k = m\omega^2$ амплитуда A возрастает до максимального значения - наступает резонанс. Это явление лежит в основе идеи создания резонансных моделей для отражения результатов эксперимента, когда отклик (исследуемый показатель процесса) зависит от нескольких факторов и когда требуется, прежде всего установить наличие экстремумов отклика, зависящих от каждого из факторов.

2. Для изучения свойств резонансных математических моделей рассмотрим однофакторную резонансную модель. В общем случае эта модель может иметь вид:

$$v = \frac{1 - ax}{|b|\sqrt[m]{[|c-x| * |f-x|]^n} + |d|} \qquad (1)$$

Изучение свойств модели (1) удобно начинать с упрощенного ее варианта, получаемого из (1) при m = 1 и c = f,

$$v = \frac{1 + ax}{|b| * |c-x|^n + |d|} \qquad (2)$$

Модель (2) можно назвать прямой, в противоположность обратной модели, у которой экстремум соответствует минимальному значению показателя v,

$$v = (e + ax)\left[1 - \frac{1}{|b| * |c-x|^n + d}\right] \qquad (3)$$

На рис. 1 и рис. 2 показаны формы резонансных кривых, построенные по моделям (2) и (3) при различных сочетаниях параметров. Из этих рисунков видно, что резонансные модели, позволяют получать кривые самой различной формы. При этом, по параметрам модели сразу видны характерные точки кривой.

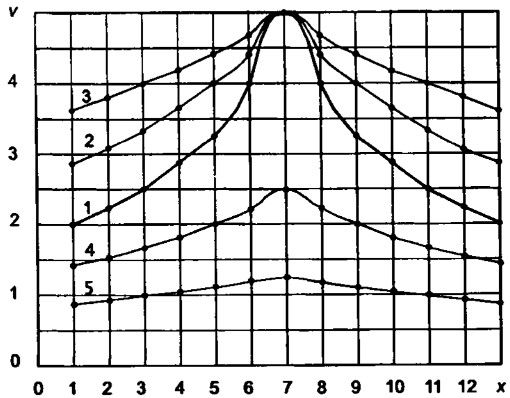

Рис. 1. Формы резонансных кривых:
1 – a = 0; b = 0,05; c = 7; d = 0,2; n = 1;
2 – a = 0; b = 0,025; c = 7; d = 0,2; n = 1;
3 – a = 0; b = 0,0125; c = 7; d = 0,2; n = 1;
4 – a = 0; b = 0,05; c = 7; d = 0,4; n = 1;
5 – a = 0; b = 0,051; c = 7; d = 0,8; n = 1;

Параметр c определяет положение экстремума на оси X.
Параметр d определяет высоту резонанса по оси V.

Параметр b определяет ординату начальной точки графика.

Параметр a определяет общий наклон графика.

При c≠f резонансная модель может иметь вид:

$$v = \frac{1 + a * x}{|b| * (|c - x| * |f - x|)^n + |d|} \qquad (4)$$

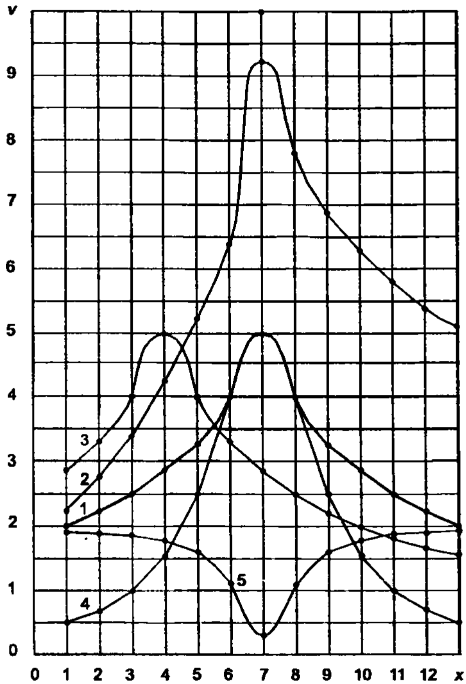

Рис. 2. Формы резонансных кривых:

-- прямых: 1 -- a = 0; b = 0,05; c = 7; d = 0,2; n = 1;

2 -- a = 0,12; b = 0,05; c = 7; d = 0,2; n = 1;

3 -- a = 0; b = 0,05; c = 4; d = 0,2; n = 1;

4 -- a = 0; b = 0,05; c = 7; d = 0,2; n = 0,5;

-- обратной: 5 -- a = 0; b = 1; c = 7; d = 1,2; n = 1; e = 3

На рис. 3 показаны формы резонансных кривых, построенные по модели (4) при различных сочетаниях параметров. Из этого рисунка видно, что резонансные модели с c ≠f не только могут отражать наличие двух экстремумов у исследуемого показателя процесса, но и служить средством изменения формы кривой при одном экстремуме.

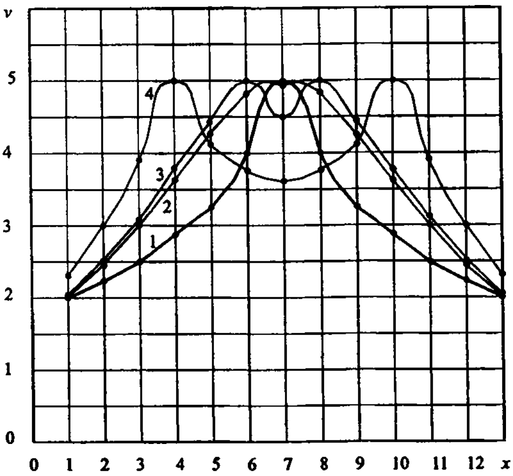

Рис. 3. Формы резонансных кривых:

1 – a = 0; b = 0,05; c = 7; f = 0; d = 0,2;

2 – a = 0; b = 0,0083; c = 6,5; f = 7,5; d = 0,2;

3 – a = 0; b = 0,0083; c = 6; f = 8; d = 0,2;

4 – a = 0; b = 0,0083; c = 4; f = 10; d = 0,2

3. При зависимости показателя от двух факторов резонансная модель в общем случае может иметь вид:

$$v = \frac{1 + ax + ey + gxy}{|b| * \sqrt[m]{[|c_1 - x| * |c_2 - x| * |f_1 - y| * |f_2 - y|]^n} + |d|} \quad (5)$$

В более простом случае можно применить следующую резонансную двухфакторную модель

$$v = \frac{1 + ax + ey}{|b| * [|c - x| * |f - y|]^n + |d|} \quad (6)$$

Очевидно, что подобным же образом можно построить и трехфакторную резонансную модель. Если факторов больше трех, то можно исследовать зависимость показателя технологического процесса поочередно от различных сочетаний из трех факторов.

4. Использование резонансных моделей на практике обусловлено двумя особенностями.

Первая особенность резонансных моделей заключается в том, что они могут служить удобным инструментом для исследования экспериментальных зависимостей на наличие экстремумов, для определения взаимодействия различных факторов и для определения других особенностей экспериментальных зависимостей. Но резонансные модели не могут точно отражать эти зависимости, т. е. давать малую остаточную дисперсию. Для точного отражения сложных многофакторных зависимостей необходимы полиномы высоких порядков. Одним из видов таких полиномов могут служить полиномы с переменными коэффициентами, которые можно использовать при условии проведении расчетов на ЭВМ. Пусть имеется двухфакторная экспериментальная зависимость

$$v_u = f(x_u, y_u)$$

Для каждого уровня u фактора y_u можно построить модель, отражающую зависимость показателя процесса (отклика) от x_u

$$y_u \Rightarrow \quad v = a_u x^o + b_u x^1 + \ldots + g_u x^n \qquad (7)$$

Из системы таких уравнений можно составить последовательности чисел для составления моделей, задающих параметры (7) как функции y_u, например,

y_u	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
a_u	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7

по которым модно построить модели для коэффициентов уравнений (7),

$$a = f_a(y_u);$$

$$b = f_b(y_u)$$

и т. д. Подставляя эти модели в (7), можно получить для параметра процесса модель с переменными коэффициентами:

$$v = f_a(y_u)x^o + f_b(y_u)x^1 + \ldots + f_g(y_u)x^n \qquad (8)$$

Модель (8) является слишком громоздкой для анализа экстремумов и других свойств отклика, но для вычислений отклика на ЭВМ она вполне приемлема.

Таким образом, резонансная модель вида (5) или (6) может использоваться для анализа сложной экспериментальной зависимости, а при необходимости точных вычислений может использоваться дополнительно модель вида (8). Такой подход вполне соответствует принципу, согласно которому каждый объект должен описываться с помощью нескольких моделей.

Вторая особенность резонансных моделей заключается в том, что в них много параметров и используются абсолютные значения величин. Поэтому определение параметров резонансных моделей целесообразно вести не с помощью аналитических методов, а методом направленного перебора по критерию минимума дисперсии или минимума величины ее заменяющей. Ниже рассмотрены основные шаги алгоритма направленного перебора параметров математических моделей по критерию минимума суммы модулей разностей теоретических и экспериментальных значений отклика. В описание этого алгоритма включены для определенности изложения элементы программы на языке "Паскаль". Операторы программы написаны прямым шрифтом.

1) Выбирается вид модели. В этом примере используется простейшая модель для сокращения объема изложения: $v = a + bx + cx^2$.

2) По результатам эксперимента создается массив исходных данных. В примере 13 уровней u со значениями факторов xu и yu: Ish_xu[1..13]: array of real; Ish_yu[1..13]: array of real; Ish_vu [1..13, 1..13]: array of real.

3) Вводятся начальные средние значения параметров модели: $a2$, $b2$, $c2$.

4) Назначаются начальные значения коэффициентов варьирования параметров модели: $q1$:=0,451; $q2$:=0,451 $q3$:=0451.

4) Определяется приращения параметров модели: Da1: = a2 * q1; Da2:=0; Da3:=a2*q1/(1–q1). То же для b и c

5) Определяется множество значений параметров модели: a1: = a2-Da1; a2: = a2; a3: = a2 + Da3 . То же для b и c

6) Составляются ряды множества значений параметров модели: Row_a[1..3]: array of real; Row_b[1..3]: array of real; Row_c[1..3]: array of real.

7) Вычисляются значения функции $v = \mathrm{f}(xu, yu)$ при всех возможных сочетаниях значений коэффициентов a, b, c по п. 5).

8) Вычисляются суммы модулей разностей SMR = S|$v(xu,yu)$–vu для всех сочетаний коэффициентов a, b, c и выбираются коэффициенты, дающие наименьший модуль разности. Эти коэффициенты принимаются за новые средние коэффициенты $a2$, $b2$. $c2$.

9) Изменяются коэффициенты варьирования параметров: если параметр модели имеет среднее значение $a2$, $b2$, $c2$, то соответствующий ему коэффициент $q1$, $q2$, $q3$ уменьшается до 0,7 прежнего значения; если параметр модели имеет уменьшенное или увеличенное значение, то соответствующий ему коэффициент увеличивается в 1,4 раза.

10) Цикл вычислений повторяется с п. 4) до тех пор, пока не будет получена SMR, удовлетворяющая некоторому критерию. Коэффициенты a, b, c, соответствующие этой сумме, принимаются в качестве искомых коэффициентов модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ящерицын П.И., Махаринский Е.И. Планирование эксперимента в машиностроении. Мн.: Выс. шк., 1985.– 288 с. 2. Мисевич В.С., Ольшанский В.И. Алгоритмический метод поиска коэффициентов регрессии многопараметрических моделей. Витебск, 2000. Совет ВГТУ. Деп. в БелИСА, рег. № Д200078 от 11 12 2000. Сборник рефератов № 4, 2001 г.