Проанализировав график (рис. 2), можно сделать вывод, что при увеличении расстояния *OA* относительные скорости скольжения возрастают. Причем оптимальное соотношение составляющих скоростей скольжения достигается при углах положения кривошипа, $z\varphi$ в диапазоне 0°–30°. Следовательно, необходимо добиваться того, чтобы взаимодействие контактирующих поверхностей неподвижного и прецессионного дисков происходило при угловом положении кривошипа $z\varphi$ = 0°–30° или близком к нему, а при других положениях кривошипа необходимо исключить данное взаимодействие. Это можно достичь, если зубчатый венец неподвижного диска расположить на определенном расстоянии от точки прецессии *O* и его ширину сделать минимальной, необходимой для обеспечения контактной прочности.

Проведенный анализ позволил использовать значения относительных скоростей скольжения для определении срока службы коническо-цилиндрических планетарных редукторов, изготовленных на РУП Могилевский завод "Электродвигатель"

ЛИТЕРАТУРА

1. Пат. 2029170 Россия, МКИ[6] F16 H1/32. Планетарная прецессионная передача/ П. Н. Громыко - № 5004739/28; Заявлено 01.07.91; Опубл. 20.02.95., Бюл. № 5. – 4 с. Планетарные прецессионные передачи (КЦПП). Кинематический, силовой и технологический аспекты их создания / П. Н. Громыко, А. А. Жолобов, А. А. Стаценко и др.; Под общ. ред. А. Т. Скойбеды. – Мн.: БГПА, 2000. – 252 с.

УДК 519.10: 539.3

О.В. Громыко

ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ МЯГКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь

В начальном недеформированном состоянии оболочка представляет цилиндр с жесткими дисками в торцах. Материал оболочки изотропен и допускает большие деформации. Связь между погонными усилиями и деформациями линейна, при этом коэффициенты, характеризующие эту связь (Eh) и μ считаются постоянными. Введем систему координат x, r, связанную с одним из торцов. Оболочка нагружена внутренним давлением p.

Введем следующие обозначения: R – радиус жесткого днища; $L_н$ – начальная длина оболочки; L_k – конечная длина оболочки; R_1 – радиус кривизны меридиана оболочки; R_2 – окружной радиус кривизны оболочки; θ – угол между нормалью и продольной осью оболочки; T_1, T_2 – соответственно меридиональное и окружное погонные усилия; ϑ – угол поворота нормали; w – перемещение в направлении; p – давление внутри оболочки; ε_1, ε_2 – главные удлинения.

Геометрические соотношения получаем из рассмотрения рис. 1 и 2 [1–3]:

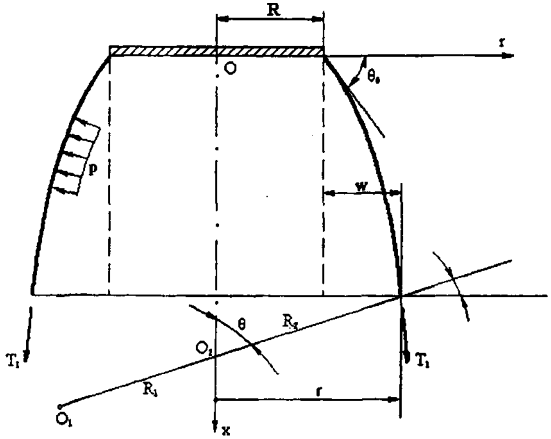

Рис. 1. Условные обозначения в расчетной схеме.

$$\frac{1}{R_2}=\frac{\sin\theta}{r}\,;\ \frac{1}{R_1}=\frac{d\theta}{dr}\cos\theta\,;\ \frac{dr}{dx}=ctg\theta\,;\ \varepsilon_2=\frac{w}{R}\,;\ \varepsilon_2=\frac{r}{R}-1 \qquad (1)$$

Уравнения равновесия для осесимметричной нагруженной безмоментной оболочки имеют следующий вид [3]:

$$T_1=\frac{pr}{2\sin\theta}\ \ (2); \qquad \frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}=p \ \ (3)$$

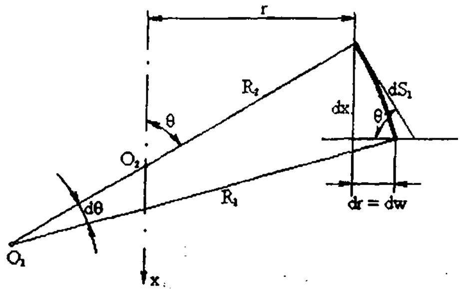

Рис. 2. Элемент мягкой оболочки

Связь погонных усилий с деформациями имеет вид закона Гука

$$T_1 = (Eh)(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2)\frac{1}{1-\mu^2}\ ;\ T_2 = (Eh)(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1)\frac{1}{1-\mu^2}$$

Отсюда можно записать, что $T_2 = Eh \cdot \varepsilon_2 + \mu T_1$ (4)

Подставим выражения для кривизны в уравнение (3): $T_1 \frac{d\theta}{dx} \cdot \sin\theta + T_2 \cdot \frac{\sin\theta}{r} = p$

Отсюда следует, что

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{T_1 \cdot \sin\theta}{p - T_2 \cdot \frac{\sin\theta}{r}} \tag{5}$$

Полная система уравнений, необходимых для отыскания деформированной формы оболочки, имеет вид (заметим, что $dr = dw$ и $\varepsilon_2 = \frac{w}{r}$):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{d\theta} = \frac{T_1 \cdot \sin\theta}{p - T_2 \cdot \frac{\sin\theta}{r}};\\ &\frac{dr}{dx} = ctg\theta;\\ &\frac{r}{R} = 1 + \varepsilon_2;\\ &T_2 = Eh \cdot \varepsilon_2 + \mu T_1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Запишем исходную систему (6) в безразмерном виде, вводя следующие обозначения: $\Phi_1 = \frac{T_1}{pR}$; $\Phi_2 = \frac{T_2}{pR}$; $\rho = \frac{r}{R}$; $\xi = \frac{x}{R}$; $\mathrm{B} = \frac{Eh}{pR}$. Тогда полная система уравнений (6) запишется в виде (заметим, что $d\rho = d\eta$ и $\varepsilon_2 = \eta$)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\Phi_1 \cdot \sin\theta}{1 - \Phi_2 \cdot \frac{\sin\theta}{\rho}};\\ &\frac{d\rho}{d\xi} = ctg\theta;\\ &\rho = 1 + \varepsilon_2;\\ &\Phi_1 = \frac{\rho}{2\sin\theta};\\ &\Phi_2 = \mathrm{B}\varepsilon_2 + \mu\Phi_1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Интегрирование системы уравнений (7) проводилось по параметру θ ($\theta_0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

Условия на границе: 1) $\theta=\theta_0$ $\rho=1, \xi=0$ 2) $\theta=\frac{\pi}{2}$; $\xi=\xi_k$

Численное интегрирование системы уравнений (7) проводилось на ПК в пакете Mathcad.

Алгоритм решения

Задаемся начальным углом $\theta=\theta_0$ и шагом интегрирования $\Delta\theta$ При этом началу расчетов соответствует система

$$\left.\begin{aligned}
&\xi=0;\\
&\rho_0=1;\\
&\Phi_{10}=\frac{1}{2\sin\theta_0};\\
&\varepsilon_{20}=0;\\
&\Phi_{20}=\mu\Phi_{10}.
\end{aligned}\right\}$$

Запишем систему уравнений (7) в конечных разностях:

$$\Delta\xi_i=\frac{\Phi_{1i-1}\cdot\sin\theta_{i-1}}{1-\Phi_{2i-1}\cdot\dfrac{\sin\theta_{i-1}}{\rho_{i-1}}}\cdot\Delta\theta;$$

$$\Delta\rho_i=\frac{\cos\theta_{i-1}}{\sin\theta_{i-1}}\cdot\Delta\xi_i;$$

$$\varepsilon_{2i}=\varepsilon_{2i-1}+\Delta\rho_i;$$

$$\xi_i=\xi_{i-1}+\Delta\xi_i;$$

$$\theta_i=\theta_{i-1}+\Delta\theta;$$

$$\rho_i=1+\varepsilon_{2i};$$

$$\Phi_{1i}=\frac{\rho_i}{2\sin\theta_i};$$

$$\Phi_{2i}=\mu\left(\frac{B\varepsilon_{2i}}{\mu}+\Phi_{1i}\right)$$

Проведем линеаризацию геометрических соотношений (1). Пусть угол поворота нормали – малая величина и равен $\vartheta={}^{\pi}\!/_{2}-\theta$ Тогда можно считать, что $\cos\vartheta\approx1$; $\sin\vartheta\approx\vartheta$ при этом $\sin\theta=\cos\vartheta\approx1$; $\cos\theta=-\sin\vartheta\approx-\vartheta$ Из рис. 2 очевидно соотношение $\frac{dw}{d\theta}=\vartheta$. Тогда выражения для кривизн будут иметь вид:

$$\frac{1}{R_1}=-\frac{d^2w}{d\theta^2};\qquad \frac{1}{R_2}=\frac{1}{R\left(1+\dfrac{w}{R}\right)} \tag{8}$$

Представим погонные усилия деформированного состояния оболочки в виде двух составляющих: $T_1 = T_{10} + t_1$; $T_2 = T_{20} + t_2$ Здесь усилия T_{10}, T_{20} соответствуют основному напряженному состоянию оболочки. Они определяются для начальной недеформированной формы из статических уравнений безмоментной линейной теории [3]:

$$T_{10} = \frac{pR}{2}; \quad T_{20} = pR.$$

t_1, t_2– возмущенные значения усилий.

Из уравнения (2) найдем возмущенное значение t_1: $T_1 = \dfrac{pr}{2\sin\theta} \to T_1 = \dfrac{pR}{2} + \dfrac{pw}{2}$ (9)

следовательно, $t_1 = \dfrac{pw}{2}$.

Подстановка полученных значений (8), (9) в уравнения (3) и (4) дает следующую систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &-\left(\frac{pR}{2} + \frac{pw}{2}\right)\cdot\frac{d^2w}{d\theta^2} + T_2\cdot\frac{1}{R\left(1+\dfrac{w}{R}\right)} = p \\ &T_2 = Eh\cdot\frac{w}{R} + \mu\left(\frac{pR}{2} + \frac{pw}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Решая совместно эти два уравнения и опустив члены более высокого порядка малости, получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{2}{R^2}\left[\frac{Eh}{pR} + \frac{\mu}{2} - 1\right]\cdot w = -\frac{2}{R}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \tag{11}$$

В случае, когда параметр нагрузки $\dfrac{Eh}{pR} >> (1 - \dfrac{\mu}{2})$ имеем

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{2Eh}{pR^3}w = -\frac{2}{R}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \tag{12}$$

Решения этих уравнений имеют вид $w = w_r + c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x}$.

Граничные условия на торцах: 1) $x = 0$, $w = 0$ 2) $x = L_k$, $w = 0$.

Получим решение для оболочки конечной длины

$$w = w_r\left[1 - \frac{ch\alpha\left(x - \dfrac{L_k}{2}\right)}{ch\alpha\dfrac{L_k}{2}}\right] \tag{13}$$

Здесь для уравнения (11)

$$w_r = \frac{\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\cdot R}{\frac{Eh}{pR}-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}; \quad \alpha^2 = \frac{2}{R^2}\left[\frac{Eh}{pR}-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\right] \tag{14}$$

В случае уравнения (12) решение соответствует решению линейной безмоментной теории

$$w_r = \frac{pR^2}{Eh}\left(1-\frac{\mu}{2}\right); \quad \alpha^2 = 2\frac{Eh}{pR^3} \tag{15}$$

В случае, когда длина краевой зоны меньше $\frac{L}{2}$ для участка вне краевой зоны и $\frac{d^2w}{dx^2}=0$ решением уравнений (11) и (12) будут частные решения (14) и (15). Отметим, что решение (14) является точным решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усюкин В. И. Строительная механика конструкций космической техники: Учебник для студентов втузов. – М.: Машиностроение, 1988. – 392 с. 2. Усюкин В. И. Техническая теория мягких оболочек и ее применение для расчета пневматических конструкций // Пневматические строительные конструкции. – М.: Стройиздат, 1983. – С. 299–333. 3. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. 4. Громыко О.В., Громыко А.О. Ландау М.Э. Конечно-разностная прогонка в анализе напряженно-деформированного состояния надувных оболочек вращения // Материалы II Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике. – Мн.: – 1999, С. 68–69.

УДК 539.3

О.В. Громыко

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МЯГКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь

Численное интегрирование системы уравнений (7) из работы [5] проводилось на ПЭВМ с использованием пакета математических расчетов Mathcad 2000 при $\mu := 0.5$