системах. М.: Мир, 1979. 6. Криштал М.М. Размерный эффект и макроструктурные аспекты пластической деформации при прерывистой текучести Al-Mg сплавов. *Физика металлов и металловедение,* т. 81, 1996, в. 1, С. 146-155. 7. Sherwood D.J., Hamilton C.H. The neighbour-switching mechanizm of superplastic deformation: the constitutive relationship and deformation-enhanced grain growth. *Philosophical Magazin A*, v.70, 1994, № 1, p. 109-143. 8. Климонтович Ю.Л. *Статистическая теория открытых систем.* М.: Янус, 1995.

УДК 539.3

И. А. Миклашевич

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ

Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь

1. Макроскопическое распространение трещины имеет ряд особенностей, происхождение и природа которых не вполне ясна до настоящего времени. Эти особенности связаны с отклонением трещины, как реального физического объекта, от модели идеальной трещины, даваемой классической теорией упругости и пластичности (модели типа Баренблатта – Дагдейла). К таким особенностям следует отнести достаточно уверенно установленный фрактальный характер процесса разрушения [1, 2], эффекты перколяции [3, 4], стохастизацию траектории [5, 6]. Объяснение этих эффектов требует более глубокой разработки физических оснований процесса разрушения и распространения трещины. Кроме того, проблемы устойчивого распространения трещины представляют интерес в связи с необходимостью создания композиционных материалов с заданными эксплуатационными свойствами.

2. На основании аналогии между распространением луча в оптически неоднородной среде и распространением трещины в неоднородном материале ранее было получено уравнение траектории трещины как уравнение экстремали, удовлетворяющее уравнению Эйлера, для упругой энергии разрушения [7, 8]. Для двумерного случая оно имеет вид

$$y'' - y f_1(x,y) + f_2(x,y)\left(1+y'^2\right)^2 = 0\,, \tag{1}$$

где введены обозначения

$$f_1(x,y) = \frac{\partial \ln Q(x,y)}{\partial x},\ f_2(x,y) = \frac{\partial \ln Q(x,y)}{\partial y}\,,\ Q = \left(\sigma_{ij} n_i u_j\right)^{-1},\ y' = \frac{dy}{dx}\,,$$

$P_i = \sigma_{ij} n_i$ – компоненты тензора напряжений на площадках, положение которых совпадает с поверхностью трещины, n_j – направляющий косинус j-й внешней нормали, u_i –

компоненты вектора перемещений точек поверхности трещины. В неоднородной среде уравнение траектории записано в виде $y = f(x)$.

Уравнение (1) имеет существенно нелинейный характер. В зависимости от типа неоднородности решения уравнения допускают, в том числе, существование режимов стохастизации [6]. Дополнительно исследуем устойчивость решений уравнения.

3. Поскольку нас интересует стационарная форма траектории трещины, уравнение (1) не содержит времени и его можно рассматривать как автономное уравнение относительно у. Введём дополнительную переменную $z = y'$ Тогда уравнение (1) перепишется в виде системы уравнений 1-го порядка.

Тогда уравнение (1) перепишется в виде системы уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = zf_1 - f_2\left(1+z^2\right)^2 \end{cases} \tag{2}$$

Орбиты уравнения (2) в фазовой плоскости даются выражением

$$\frac{dz}{dy} = \frac{zf_1 - f_2\left(1+z^2\right)^2}{z} = f_1 - f_2\frac{\left(1+z^2\right)^2}{z}, \tag{3}$$

Решение уравнения (3) существенно зависит от вида неоднородности среды. Эта зависимость существует поскольку напряженно – деформированное состояние есть функция механических характеристик среды, в которой распространяется трещина, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(s_{ijkl}\right)$. Если считать, что свойства среды слабо изменяются вдоль траектории распространения трещины (неоднородность материала невелика), то при анализе можно пренебречь членами, порядка выше второго. В этом случае имеем

$$\frac{dz}{dy} = f_1 - f_2\left(\frac{1}{z} + 4 + 6z\right) \tag{4}$$

Прямое аналитическое интегрирование уравнения (4) не приводит к обозримым результатам. Однако, соответствующим подбором неоднородности (параметры f_1, f_2), мы имеем возможность регулировать тип критических точек в фазовой плоскости. С точки зрения технологии, более логичным представляется регулировка параметра f_2 (неоднородности вдоль оси Y). Так, при конструировании композиционного материала таким образом, что

$$f_2 = z^2 \big/ \left(1 + 4z + 6z^2\right) \tag{5}$$

имеем положительный аттрактор, критической точкой является $z = 0$, трещина должна стягиваться до магистральной трещины, стохастизация невозможна.

Строго говоря, заключение о возможности линейного анализа критических точек нелинейной системы (2) требует дополнительного анализа. Так, например, для выполнения условия существования стабильных и нестабильных многообразий необходимо [9] удовлетворение дополнительных условий

$$\lim_{\|z\to 0\|} \frac{\left\| f_2\left(\frac{1}{z}+4+6z\right)\right\|}{\|z\|}=0,$$

что налагает дополнительные условия $f_2 = o(z^2)$ Рассмотрим якобиан системы (1). При рассмотрении также ограничиваемся членами порядка не выше z^2

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_1 - f_2(4+6z) & 0 \end{pmatrix}$$

Собственные значения системы (6) могут быть определены вблизи критической точки

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{f_1 - 4f_2} \qquad (7)$$

и тип возникающих критических точек зависит от соотношения f_1,f_2. Если f_2 выбирается в соответствии с (5), то тип критических точек зависит от выбора величины f_1. В зависимости от знака это может быть любой из возможных типов критической точки.

3. Проведенный анализ показывает, что при распространении трещины в неоднородных материалах на характер траектории трещины влияет и закон изменения свойств материала вдоль и поперёк траектории распространения трещины. Это принципиально позволяет в значительной степени регулировать характеристики траектории путём создания композитов детерминированной структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.S. Balankin, «Title», Enging. Fract. Mech.1997v. 57, (2/3), p. 135-203. 2. G.P. Cherepanov, A.S.Balankin, V.S. Ivanova, Fractal Fracture Mechanics – a Review, Enging. Fract. Mech., 1995, v. 51, (6), p. 997 – 1033. 3. I.M. Sokolov Dimensions and other geometric critical exponents in percolation theory. Uspekhi Fiz. Nauk, 15, (2), 221-248, (1986). 4. А.С. Баланкин. Фрактальная механика деформируемых сред и топология разрушения твердых тел. ДАН России, 322, (5), 869-874, (1992). 5. I. Miklashevich, A.V. Chigarev. Stochastisation of crack growth direction in heterogenous media. 8 International conference of fracture, Ukraine 93. Collection of Abstracts, Part 1., p.227. 6. I.A. Miklashevich, L.N. Bialiatskaja, A.V. Chigarev. Nonlinear effects at the crack propagation. Proceedings of IX Annual Seminar NPCS'2000 "Nonlinear phenomena in complex systems: Fractals, Chaos, Phase Transitions, Self-Organization", Minsk, 2000, p.206-214. 7. А.В. Чигарев, И.А. Миклашевич Расчёт траектории трещины в композиционном материале в линейном приближении. Доклады АН Беларуси, № 2, т. 39, 1995, с. 114-118. 8. И.А. Миклашевич. Траектория трещины в неоднородных средах при плоском нагружении. Механика композиционных материалов и конструкций, т. 6, № 3, 2000, с. 408-418. 9. F. Verhulst Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. Springer Verlag, Berlin, 1990.