

ЛИТЕРАТУРА

1. Врублевская В.И., Невзорова А.Б., Врублевский В.Б. Износосотойкие самосмазывающиеся антифрикционные материалы и узлы трения из них. – Гомель: БелГУТ, 2000. – 324 с. 2. Машкин Н. А., Хрулев В.М., Дорофеев Н.С. Модифицированная древесина и ее применение. – Кемерово: Кемеровское книжное издательство, 1988. – 120 с. 3. Невзорова А.Б., Врублевская В.И. Ресурсобогащающая технология изготовления самосвязывающихся подшипников скольжения//Ресурсооберегающие и экологически чистые технологии. Ч.2. – Гродно, 1995. С. 110–119. 4. Шамаев В.А. Модифицирование древесины. – М.: Экология – 1991. – 128 с.

УДК 539.3

Э.Д. Подлозный

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ВДОЛЬ СТЕРЖНЯ ПРИ ПЕНЕТРАЦИИ ЕГО В УПРУГУЮ СРЕДУ – Ч.1

*Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь*

Проведенные автором и др. экспериментально-теоретические исследования позволили установить, что при воздействии одночастотных колебаний вибратора на верхний конец стержня имеет место отрыв нижнего конца его от упругой среды, с последующими ударами о среду, вибрационный (колебательный) режим переходит в виброударный. При этом необходимо найти не только характеристики виброударных режимов (перемещения, скорости, время), но и рассмотреть распространение волн напряжений (деформаций) вдоль стержня при ударе его об упругую среду. Такого вида задача о периодических движениях упругого стержня с ограничителем была решена в институте машиноведения АН СССР применительно к рабочему органу ультразвуковой машины [1].

Изучение волнового процесса вдоль стержня позволит в дальнейшем при применении датчиков деформаций или ускорений (прямая связь), использованных автором в экспериментах, и актуаторов (обратная связь) – устройств регулирующих управляющее воздействие, прийти к созданию управляемых конструкций [2].

Рассматриваемая задача имеет практическое приложение, например, в строительной индустрии, при определении напряженно-деформированного состояния при возведении свай, погружаемых в грунты вибропогружателями или дизель-молотами [3] и др.

Расчетная схема задачи о пенетрации стержня в упругую среду изображена на рис.1, где 1 – стержень, 2 – одночастотный вибратор, 3 – присоединенная масса упругой среды на линейной пружине.

При постановке задачи принимаются следующие допущения:

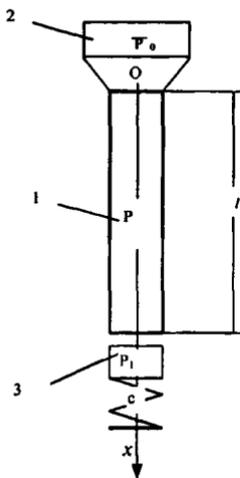


Рис. 1. Расчетная схема задачи о пенетрации стержня в упругую среду

1. Стержень рассматривается как круглый, сплошной и однородный.

2. Силами трения по боковой поверхности стержня, которые существенны при нахождении характеристик виброударного процесса, пренебрегают в виду их малого воздействия в течение времени распространения волн при ударе.

3. Влиянием предыдущего удара на последующий пренебрегаем в виду быстрого затухания колебаний в стержне во время отрыва его от массы.

4. Начальные характеристики движения в установленном режиме процесса определяются заранее, например методом точечных отображений плоскости в плоскость, с применением видоизмененной диаграммы Кенигса-Лемерея, развитым автором для неавтономных систем [4].

5. Для упрощения задачи пренебрегаем влиянием силы тяжести стержня и изменением возмущающей силы вибратора за время распространения ударной волны в прямом и обратном направлениях, т. е. вибратор отождествляем с инерционной массой.

6. Упругую среду моделируем присоединенной массой, приведенной к нижнему концу стержня, на линейной пружине.

Движение стержня при вышеприведенных допущениях можно характеризовать уравнением продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – продольное смещение сечения стержня, a – скорость распространения продольной волны в стержне.

Граничные условия имеют вид: на верхнем конце стержня ($x = 0$)

$$\left[EF \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{P}_0 - \frac{P_0}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_{x=0} = 0 \quad (2)$$

на нижнем конце стержня ($x = l$)

$$\left[EF \frac{\partial u}{\partial x} + (cu + \frac{P_1}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) I(t) \right]_{x=l} = 0 \quad (3)$$

Здесь $P_0 = P_0 + Q_0 \cos(\omega t - \varphi_0^{(1)})$ – осредненное до const значение возмущающей силы (см. п. 5), EF – продольная жесткость стержня, P_0 – вес вибратора, P_1 – вес

присоединенной массы, c – коэффициент жесткости среды; $I(t)=0$ при $t<0$, $I(t)=0$ при $t>0$ (функция Хевисайда).

Полагая, что в начальный момент времени происходит мгновенное изменение скорости нижнего конца стержня при неупругом ударе, начальные условия запишем в виде:

$$u|_{t=0} = 0 \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0 + (v_0^{(1)} - v_0)I(x-l) \quad (5)$$

$$[0 \leq x \leq l],$$

где $v_0^{(1)}$ – скорость нижнего конца стержня в конце неупругого удара, v_0 – скорость стержня в момент контакта с присоединенной массой на линейной пружине, $I(x-l) = 0$ при $0 \leq x < l$ и $I(x-l) = 1$ при $x = l$.

Решение уравнения (1) находим методом Даламбера в классе обобщенных функций

$$u = f_1(x-at) + f_2(x+at) \quad (6)$$

где $f_1(x-at)$ и $f_2(x+at)$ – функции, определяемые из начальных и граничных условий с помощью “продолжающего” уравнения, которые представляют соответственно две волны: отраженную от массы вибратора и прямую, распространяющуюся от удара нижнего конца стержня о присоединенную массу на линейной пружине.

При этом заметим, что впервые на необходимость использования для случая удара обобщенного решения (в смысле Соболева) указал В. Колоушек (1965) [5], хотя применительно к задачам строительной механики простейшими обобщенными функциями (прерыватели Герсеванова) пользовался еще Н.М. Герсеванов (1933)[6].

Покажем, каким образом, можно получить решение данной задачи. Подставив (6) в граничные условия (2) и (3) и обозначив $at = z$ получим уравнение для определения и продолжения функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$:

для верхнего конца стержня ($x = 0$)

$$f_1''(-z) - k_1 f_1'(-z) = f_2''(z) + k_1 f_2'(z) + k_2 \quad (7)$$

для нижнего конца стержня ($x = l$)

$$f_2''(l+z) - k_3 f_2'(l+z) - k_4 f_2(l+z) = f_1''(l-z) + k_3 f_1'(l-z) + k_4 f_1(l-z) \quad (8)$$

Здесь

$$k_1 = PP_0^{-1}l^{-1}, \quad k_2 = \dot{P}_0(EF)^{-1}k_1, \quad k_3 = PP_0^{-1}l^{-1}, \quad k_4 = c(EF)^{-1}k_3,$$

где P – собственный вес, l – длина стержня.

Вспользуемся начальными условиями задачи.

Из выражения (4) и (5) следует, что

$$u|_{t=0} = f_1(x) + f_2(x) = 0 \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = -af_1'(x) + af_2'(x) = v_0 + (v_0^{(1)} - v_0)I(x-l) \quad (10)$$

$$[0 \leq x \leq l]$$

В результате интегрирования выражений (9) и (10) и после введения вместо x переменной z получим

$$f_1(z) = -v_0(2a)^{-1}z - (v_0^{(1)} - v_0)(2a)^{-1} \left[\frac{z-l+|z-l|}{2} \right], \quad (11)$$

$$f_2(z) = v_0(2a)^{-1}z + (v_0^{(1)} - v_0)(2a)^{-1} \left[\frac{z-l+|z-l|}{2} \right]. \quad (12)$$

$$[0 \leq z \leq l]$$

И следовательно величина напряжений $\sigma(x,t)$ будет

$$\sigma(x,t) = E \frac{\partial u}{\partial x} = -E(v_0^{(1)} - v_0)(2a)^{-1} [I(x-at-l) - I(x+at-l)] \quad (13)$$

при $at \leq x \leq l$ и $0 \leq x \leq l-at$.

Ниже приводится табл. 1 для вычисления напряжений в характерных сечениях стержня $0, l/2$ и l при $at = l, 3/2l$ и $2l$.

Таблица 1

at \ x	x = 0	x = l/2	x = l
at = l	$E(F_1' + F_2')$	EF_1'	EF_1'
at = 3/2l	$E(F_1' + F_2')$	$E(F_1' + F_2')$	EF_3'
at = 2l	$E(F_1' + F_2')$	$E(F_3' + F_2')$	$E(F_2' + F_3')$

Величины напряжений $\sigma(x,t)$, подсчитанные по формуле (13), значительно меньше экспериментально определенных. Поэтому необходимо далее определить функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в интервале $[l, 2l]$ и найти $\sigma(x,t)$. Данные функции были найдены и приводятся в следующей статье ч. 2 данного сборника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асташев В.К. Нелинейная динамика ультразвуковых технологических машин. Автореф. дис. ...ученой степени докт. физ.-мат. наук, М.: Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова, 2000. – 34 с. 2. Абовский Н.П. Управляемые конструкции: Учеб. пособие/Крас. Гаса. – Красноярск, 1998. – 433 с. 3. Баркан Д.Д. Виброметод в строительстве. М.: Госстройиздат, 1959. 4. Подлозный Э.Д. Проблемы пенетрации в сплошные среды/VIII Белорусская математическая конференция//Тезисы докладов. Мн.: – ч.3 С. 131; 5. Колоушек В. Динамика строительных конструкций. Стройиздат, М.: – 1965; 6. Герсеванов Н.М. Функциональные прерыватели в строительной механике и их примененис к расчету ленточных фундаментов// Сб. ВИОС, № 1. – Госстройиздат. – 1933.

УДК 539.3

Э.Д. Подлозный

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ВДОЛЬ СТЕРЖНЯ ПРИ ПЕНЕТРАЦИИ ЕГО В УПРУГУЮ СРЕДУ – Ч. 2

*Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь*

Работа является непосредственным продолжением одноименной статьи – ч.1 [7] данного сборника. Здесь покажем, каким образом можно находить “продолжающее” волновое уравнение (1) при граничных (2) и (3), и начальных (4) и (5) условиях методом Даламбера (6) в интервалах распространения волн $[-l, 0]$ и $[l, 2l]$, и, следовательно, найти напряжения $\sigma(x, t)$ на последующих этапах распространения ударной волны. Во избежание возможной путаницы мы продолжим в данной работе нумерацию формул и литературы, которая была принята в ч.1.

Сначала из уравнения (7) найдем $f_1(z)$ в интервале $[-l, 0]$. Подставив в правую данного уравнения значения функции $f_2(z)$ в интервале $[0, l]$ и значения ее производных, получим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$f_1''(z) - k_1 f_1'(z) = g(z) \quad (14)$$
$$[-l \leq z \leq 0],$$

где

$$g(z) = (v_0^{(1)} - v_0)(2a)^{-1} \delta(z-l) - k_1 (v_0^{(1)} - v_0)(2a)^{-1} I(z-l) + k_1 v_0 (2a)^{-1} + k_2 \quad (15)$$

Здесь $\delta(z-l)$ – m – функция Дирака.

Следуя И.М. Гельфанду и Г.Е. Шилову [8] сначала найдем фундаментальное решение $\mu(z)$ дифференциального уравнения (14) с правой частью $\delta(z)$