УДК 621.01 (075.8)

И.В. Дайняк

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МНОГОКООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Беларусь

ВВЕДЕНИЕ

Основной проблемой математического моделирования многокоординатных систем является проблема построения требуемых программных движений путем определения управляющих воздействий.

В настоящей работе рассматриваются задачи построения программного движения. Эти задачи [1, 2] в математической постановке сводятся к выбору параметров, содержащихся в дифференциальных уравнениях движения материальной системы многокоординатного устройства или к определению неизвестной части дифференциальных уравнений из условия существования заданных частных решений [3].

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МНОГОКООРДИНАТНЫХ ЛШД

В общем случае система уравнений как разомкнутого, так и замкнутого однокоординатного шагового привода, содержащего m-фазную обмотку возбуждения, записывается в виде [4]

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}+\beta\dfrac{dx}{dt}+F_c=F_e \\ i_k r_k+\dfrac{d\psi_k}{dt}=u_k, \end{cases}, \qquad (1)$$

где $k=1, 2, \dots m$ – номера электрических контуров, образованных фазами обмоток возбуждения ЛШД; i_k, ψ_k, u_k – мгновенные значения тока, потокосцепления и напряжения k-го электрического контура; r_k – электрическое сопротивление k-го контура; m – суммарная масса подвижных частей системы; x – текущее смещение индуктора по отношению к статору; F_c – суммарная сила сопротивления нагрузки и потерь холостого хода; F_e – электромагнитная сила, развиваемая электроприводом, определяемая типом и конструкцией ЛШД.

Система (1) позволяет исследовать поведение однокоординатного ЛШД без каких-либо упрощающих допущений. На ее основе формулируется основное управляющее движение электромеханической системы.

В фазных координатах система (1) получит вид

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}+\beta\dfrac{dx}{dt}+F_c=\dfrac{2\pi}{\tau_z}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{m}i_j i_k\dfrac{dL_{jk}}{dx} \\ r_j i_j+\sum\limits_{k=1}^{n}L_{jk}\dfrac{di_k}{dt}+\dfrac{2\pi}{\tau_z}\dfrac{dx}{dt}\sum i_k\dfrac{dL_{jk}}{dx}=U_j \end{cases} \qquad j=1,2,\dots,m, \tag{2}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{m}L_{jk}\dfrac{di_k}{dt}$ – электродвижущая сила самоиндукции и взаимной индукции, действующая в j-м контуре; L_{jk} – коэффициенты собственной и взаимной индуктивности фаз; τ_z – период зубцовой структуры ЛШД.

Аналогичные по структуре системы уравнений могут быть записаны для любого многокоординатного привода на основе ЛШД. Уравнения (1) и другие, отображающие физические процессы, происходящие в соответствующем координатном шаговом электроприводе, представляют собой полную математическую модель рассматриваемого устройства. В зависимости от вида и характера математического исследования используется та или другая форма представления этой модели. В случае исследования динамики движения координатной системы и решения задач построения программных движений представляется удобным приводить полную математическую модель к следующему виду [1, 4]:

$$\ddot{x}=f_i(t,x_1,\dots,x_n;\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n),\quad i=1,2,\dots,n, \tag{3}$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)$ – вектор обобщенных координат системы; $\dot{x}=(\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n)$ – вектор обобщенных скоростей системы.

2. ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МНОГОКООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ

Полученные в работе [3] равенства $\left(\operatorname{grad}_{\dot{x}}\omega_\mu\cdot X\right)=R_\mu(\omega,x,\dot{x},t)-\varphi_\mu$, $(\mu=1,2,\dots,m)$, где $\varphi_\mu=\left(\operatorname{grad}_{x}\omega_\mu\cdot\dot{x}\right)+\dfrac{\partial\omega_\mu}{\partial t}$, служат уравнениями для определения правых частей X_ν искомых уравнениях (3).

В том случае, когда $m=n$, непосредственным решением уравнений находим искомые уравнения:

$$\ddot{x}_\nu=\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta^{i\nu}/\Delta\right)(R_i-\varphi_i), \tag{4}$$

где $\Delta=\left|\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right|_m^m\neq0$; $\Delta^{i\nu}$ – алгебраическое дополнение i, ν-го элемента определителя Δ.

Если $m < n$, то во многих отношениях удобнее искать вектор-функцию X правых частей уравнений в виде суммы:

$$X = X^{\nu} + X^{\tau},$$

где вектор X^{ν} ортогонален многообразию $\Omega_{\dot{x}}\left\{\omega(x,\dot{x},t)_{x=inv} = 0\right\}$ и определяется с точностью до множителей Лагранжа:

$$X^{\nu} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname*{grad}_{\dot{x}} \omega_i\,, \tag{5}$$

а вектор X^{τ} является составляющим вектор-функции вдоль многообразия $\Omega_{\dot{x}}$ и определяется условием

$$\left(\operatorname*{grad}_{\dot{x}} \omega_{\mu} \cdot X^{\tau}\right) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Подставив вектор-функцию X в виде суммы в условия осуществимости движения, получим

$$\left(\operatorname*{grad}_{\dot{x}} \omega_{\mu} \cdot X^{\nu}\right) = R_{\mu} - \varphi_{\mu}, \tag{7}$$

с учетом значения X^{τ} получим

$$\lambda_i = \left(\frac{1}{\Gamma}\right)\sum_{j=1}^{m} \Gamma_{ij}\left(R_j - \varphi_j\right), \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где $\Gamma = \left|\operatorname*{grad}_{\dot{x}} \omega_i \cdot \operatorname*{grad}_{\dot{x}} \omega_j\right|_m^m \neq 0$, Γ_{ij} – алгебраическое дополнение i, j-го элемента определителя Γ.

Таким образом, имеем, что

$$X^{\nu} = \left(\frac{1}{\Gamma}\right)\sum_{i,j}^{1,m} \Gamma_{ij}\left(R_j - \varphi_j\right)\operatorname*{grad}_{\dot{x}} \omega_j\,.$$

Составляющие вектор-функции X^{τ} определяются решением неопределенной системы линейных уравнений (6) и могут быть представлены в виде

$$X_r^{\tau} = -\sum_{s=m+1}^{n} D^{rs} Q_s \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

где $X_s^\tau = DQ_s$ $(s = m+1, \dots n)$; D^{rs} – определитель, полученный заменой его i-го столбца s-м столбцом матрицы $\left[\dfrac{\partial\omega}{\partial\dot{x}}\right]_n^m$; $Q_s = Q_s(x, \dot{x}, t)$ – произвольные функции.

Итак, искомая система уравнений (3) может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_r &= \left(1/\Gamma\right)\sum_{i,j}^{1,m}\Gamma_{ij}\left(R_j - \varphi_j\right)\frac{\partial\omega_i}{\partial\dot{x}_r} - \sum_{s=m+1}^{n} D^{rs}Q_s \; (r = 1, 2, \dots, m); \\ \ddot{x}_s &= \left(1/\Gamma\right)\sum_{i,j}^{1,m}\Gamma_{ij}\left(R_j - \varphi_j\right)\frac{\partial\omega_i}{\partial\dot{x}_s} + DQ_s \; (s = m+1, \dots, n). \end{aligned} \tag{8}$$

Как видим, решение общей задачи построения уравнений движения содержит не определяемые в рамках рассматриваемой задачи функции $R_j(\omega, x, \dot{x}, t)$ (при $c_j = 0$) и $Q_s(x, \dot{x}, t)$ (при $m < n$). Эти функции, естественно, должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись условия существования и единственности решения системы уравнений (8) в области Ω_ε.

Построенная система уравнений движения (8), допускающая движение с заданными свойствами, может быть представлена в виде векторного уравнения

$$\ddot{x} = \left(1/\Gamma\right)\sum_{i,j}^{1,m}\Gamma_{ij}\left(R_j - \varphi_j\right)\operatorname*{grad}_{\dot{x}}\omega_i + X^\tau, \tag{9}$$

где вектор X^τ определяется условиями (6).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Полученное решение как по широте постановки задачи, так и универсальности примененного метода может быть использовано при построении уравнений движения во многих обратных задачах динамики.

2. При решении обратных задач динамики в некоторых частных случаях целесообразно строить уравнения движения, используя сначала лишь некоторые из заданных интегралов, затем достраивать эти уравнения, привлекая оставшиеся неиспользованными заданные интегралы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. 2. Галиулин А.С. Аналитическая динамика. – М.: Высш. шк., 1989. 3. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Мн.: Выш. шк., 1979. 4. Карпович С.Е., Русецкий А.М., Ляшук Ю.Ф. Теория построения прецизионных механизмов оборудования производства электронной техники. – Мн.: ГНПКТМ «Планар», 1999.