

текстура ( $10\bar{1}0$ ). Согласно гипотезе ориентированного роста, межзеренные высокоугловые границы обладают максимальной подвижностью при разориентировке исходного и рекристаллизованного зерен на  $25^{\circ}$ – $40^{\circ}$  вокруг общей оси. Угол между плоскостями ( $10\bar{1}2$ ) и ( $10\bar{1}0$ ) составляет  $33,5^{\circ}$ . Таким образом, для образования текстуры ( $10\bar{1}0$ ) необходим поворот исходной решетки зерен быстрозатвердевших фольг на угол  $33,5^{\circ}$  вокруг оси  $[01\bar{1}0]$ . Согласно [3], идеальной текстурой для висмута и сурьмы является (0001). Соответствующая ей линия 0009 также наблюдается в отожженных быстрозатвердевших фольгах сплавов Bi–15 ат.% Sb–(Zn, Al, Ga, In, Ge, Sn, S). Однако, для формирования текстуры (0001) при отжиге необходим поворот решетки зерен при рекристаллизации на угол  $56,4^{\circ}$  вокруг оси  $[0\bar{1}10]$ , что объясняет преобладание текстуры ( $10\bar{1}0$ ) в отожженных быстрозатвердевших фольгах.

Результаты рентгеноструктурного анализа показывают, что в быстрозатвердевших фольгах легированного сплава Bi–15 ат.% Sb при отжиге происходит распад пересыщенного твердого раствора. Температура начала процесса распада зависит от легирующего элемента и от степени пересыщения твердого раствора.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гицу Д.В., Голбан Т.М., Канцер В.Г., Мунтяну Ф.М. Явления переноса в висмуте и его сплавах с сурьмой.- Кишинев: Штиинца, 1983. - 238 с. 2 Осипов Э.В. Твердотельная криогеника.- Киев: Наукова думка, 1977.- 234 с. 3. Вассерман Г., Гревен И. Текстуры металлических материалов.- М.: Металлургия, 1969.- 654 с. 4 Шепелевич В.Г. Текстура быстрозакаленных фольг висмута, сурьмы и их сплавов //Кристаллография.- 1991.- Т.36, №1.- С.238-239. 5. Физическое металловедение Под ред. Р.У.Кана и П.Хаазена.- М.: Металлургия, 1987.-624 с.

УДК 534.075.8:539.3

А.О.Громыко, О.В.Громыко

#### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

*Белорусский государственный университет  
Минск, Беларусь*

Дифференциальное уравнение собственных колебаний анизотропной пластины на упругом основании в прямоугольной системе координат имеет следующий вид [1]:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \beta^2 w = 0, \quad (1)$$

где  $\beta^2 = (\omega^2 \rho h - k)$ ;  $k$  — коэффициент постели упругого основания; а жесткости из-

гиба  $D_{11} = \frac{h^3}{12\Delta} (a_{22} a_{66} - a_{26}^2)$ ,  $D_{22} = \frac{h^3}{12\Delta} (a_{11} a_{66} - a_{16}^2)$  кручения  $D_{66} = \frac{h^3}{12\Delta} (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)$

и дополнительные  $D_{16} = \frac{h^3}{12\Delta} (a_{12} a_{26} - a_{22} a_{16})$ ;  $D_{26} = \frac{h^3}{12\Delta} (a_{12} a_{16} - a_{16} a_{26})$ ,

$D_{12} = \frac{h^3}{12\Delta} (a_{16} a_{26} - a_{12} a_{66})$  вычисляются с помощью соотношений [2],

$\frac{D_{12}}{D_{22}} = \mu_1$  и  $\frac{D_{22}}{D_{11}} = \mu_2$  — приведенные коэффициенты Пуассона;

$\Delta$  — определитель матрицы коэффициентов обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon_x = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{16} \tau_{xy};$$

$$\varepsilon_y = a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{26} \tau_{xy};$$

$$\gamma_{xy} = a_{16} \sigma_x + a_{26} \sigma_y + a_{66} \tau_{xy}.$$

Круговая частота собственных колебаний определяется формулой

$$\omega = \sqrt{(\beta^2 + k) \frac{1}{\rho h}}. \text{ В частном случае } k = 0 \text{ и } \omega = \beta \sqrt{\frac{1}{\rho h}}.$$

Выражения погонных силовых факторов, а также граничных условий не отличаются от принятых в теории изгиба пластин [1].

Для прямоугольных пластинок во всех случаях, когда граничные условия не изменяются в пределах каждого из краев, задача может быть решена методом Релея-Ритца или с использованием численных методов, например [3,4].

В практике особенно часто встречается случай ортотропной пластинки, для которого уравнение колебаний является частным случаем (1) и имеет вид

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \beta^2 w = 0. \quad (2)$$

Для  $\beta^2$  сохраняется справедливым (1); а жесткости определяются по форму-

лам:  $D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}$ ;  $D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}$ ;  $D_{12} = D_{11} \mu_2 + 2D_k$ ;  $D_k = \frac{G h^3}{12}$ ,

где  $G$  – модуль упругости при сдвиге.

Точное решение задачи известно для случаев, когда две противоположные стороны прямоугольной пластинки оперты, а две другие закреплены произвольно [1]. Если при этом пластинка оперта по всему контуру, то формы колебаний, как и в [2],

$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ , а частотный параметр определяется формулой:

$$\beta = \pi^2 \sqrt{\frac{m^4}{a^4} D_{11} + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} D_{12} + \frac{n^4}{b^4} D_{22}}.$$

Для основного тона квадратной пластины ( $a = b$ ,  $m = n = 1$ ) имеем:

$$\beta = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{D_{11} + 2D_{12} + D_{22}}.$$

Уравнение (2) в ряде случаев удобно представить таким образом:

$$\eta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \eta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \beta^2 w = 0, \quad (3)$$

где  $\eta_1 = \frac{D_{11}}{D_{12}}$ ;  $\eta_2 = \frac{D_{22}}{D_{12}}$ ;  $\beta^2 = (\omega^2 \rho h - k) \frac{1}{D_{12}}$ .

Тогда частота колебаний определяется формулой  $\omega = \sqrt{(\beta^2 D_{12} + k) \frac{1}{\rho h}}$  или при

$$k=0 \quad \omega = \beta \sqrt{\frac{D_{12}}{\rho h}}.$$

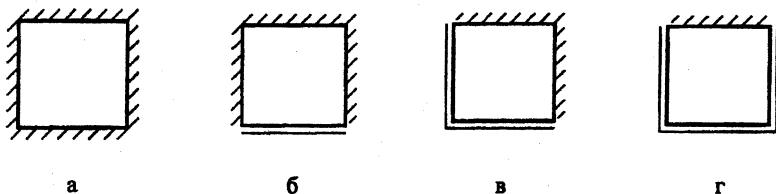


Рис. 1. Схемы закрепления краев пластины

На рис. 1 представлены различные схемы закрепления и опирания краев пластины, которые рассматривались в настоящей статье. Заштрихованный край соответствует

жесткому защемлению, а параллельные краям линии означают шарнирное опирание пластины по данному краю.

В соответствии с методиками для исследования собственных и вынужденных колебаний механических систем, изложенными в работах [3,4], разработаны алгоритмы и вычислительные программы, позволяющие анализировать формы и частоты свободных колебаний пластин, состоящих из одного или нескольких изотропных или ортотропных слоев.

Результаты, приведенные в табл.1 для расчетных схем, рис.1, получены для различных соотношений изгибных жесткостей квадратных пластин.

Таблица 1

Значения параметра  $\beta a^2$

Схема (рис.1)	$D_{11}/D_{12}$	1/3	1/2	1	2	3
	$D_{22}/D_{12}$					
а	1/3	25,035	26,741	31,235	38,764	44,837
	1/2	26,741	28,347	32,625	39,776	45,820
	1	31,235	32,625	36,408	42,939	48,584
	2	38,764	39,776	42,939	48,603	53,661
	3	44,837	45,820	48,584	53,661	58,283
б	1/3	22,848	24,706	29,517	37,239	43,652
	1/2	23,796	25,587	30,261	37,864	44,162
	1	26,361	27,989	32,328	39,543	45,576
	2	30,786	32,191	36,031	42,634	48,330
	3	34,604	35,891	39,393	45,494	50,874
в	1/3	21,053	23,049	28,124	35,753	42,707
	1/2	21,440	23,406	28,422	36,383	42,878
	1	22,567	24,442	29,285	37,062	43,444
	2	24,664	26,396	30,968	38,384	44,622
	3	26,595	28,226	32,507	39,662	45,706
г	1/3	20,428	21,483	24,302	29,211	33,057
	1/2	21,483	22,493	25,194	29,794	33,749
	1	24,302	25,194	27,647	31,910	35,599
	2	29,061	29,794	31,910	35,681	39,064
	3	33,057	33,749	35,599	39,064	42,184

На рис.2 приведены графики зависимости частотных параметров  $\beta a^2$  защемленной по контуру квадратной пластинки от параметра  $\eta_2$ .

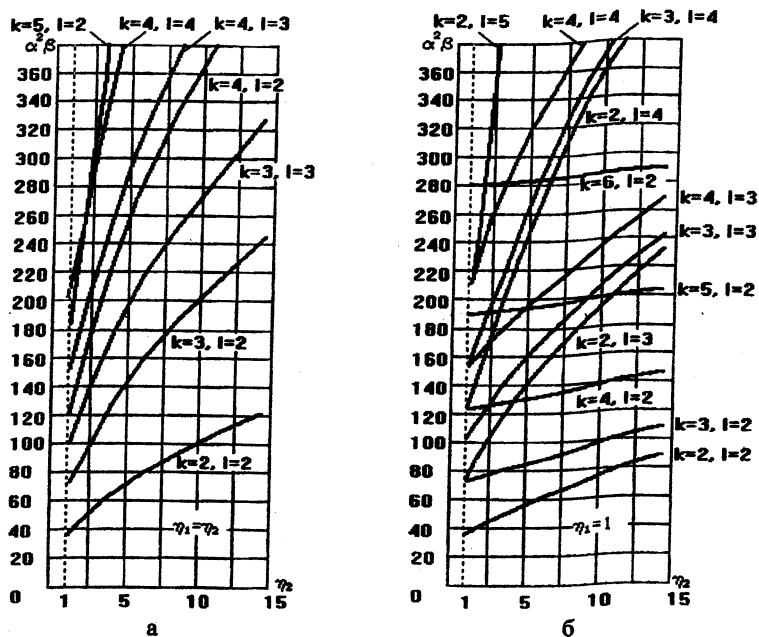


Рис.2.

Задачи о колебаниях гофрированных пластин, усиленных ребрами или другими элементами жесткости, а также многослойных пластин [1,2] могут быть сведены к задаче колебаний анизотропной (ортотропной) пластины, жесткости которой вычисляются изложенным способом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.-М.: Физматгиз, 1967. – 266 с.
2. Громыко О.В. Многослойные композиты в условиях плоского напряженного состояния и при изгибе//Наука и технологии на рубеже XXI века. Материалы между. НТК.- Мн.:УП «Технопринт», 2000.-С.417-423.
3. Громыко О.В. Исследование динамики пластин и оболочек в заданных частотных диапазонах //Материалы между. НТК «Вклад вузовской науки в развитие приоритетных направлений производственно-хозяйственной деятельности, разработку экономичных и экологически чистых технологий и прогрессивных методов обучения». Надежность и ресурсное проектирование машин. Т.6.-Минск, БГПА, 2000.
4. Громыко О.В. Автоматизация расчета тонкостенных элементов конструкций//Наука и технологии на рубеже XXI века. Материалы между. НТК.- Мн.:УП «Технопринт», 2000.-С.244-253.