

Министерство образования и науки Республики Беларусь
БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

Кафедра "Технология машиностроения"

Сакович А.А.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ТОНКОСТЕННЫХ КОЛЕЦ
ПРИ ЗАКРЕПЛЕНИИ В ПРИЗМАХ

Учебно-методическое пособие
по дисциплине "Проектирование технологической
оснастки" для студентов специальности
12.01 - "Технология машиностроения"

М и н с к 1 9 9 5

621.9

УДК 669.018(075.8)

С15

Сакович А.А. и др. Определение деформаций тонкостенных колец при закреплении в призмах: Учебно-метод. пособие по дисц. "Проектирование технологической оснастки" для студ. спец. 12.01 - "Технология машиностроения"/А.А.Сакович, С.И.Романчук, Н.А.Козыревич. - Мн.: БГПА, 1995.- 31 с.

А.А.Сакович, С.И.Романчук, Н.А.Козыревич

В пособии рассмотрена методика аналитического определения деформаций тонкостенных колец при закреплении заготовок в станочных приспособлениях, установочными элементами которых являются самоцентрирующие призмы.

Рецензенты:

И.А.Каштальян, А.С.Шамшур

(с) А.А.Сакович, С.И.Романчук,
Н.А.Козыревич, 1995

В в е д е н и е

Закрепление тонкостенных деталей (колец, втулок) в призмах применяется при растачивании и других операциях механической обработки. Обычно тонкостенными кольцами и втулками считаются такие, у которых отношение внутреннего диаметра к наружному равно 0,9 – 0,95. Под воздействием зажимных усилий заготовка деформируется. В результате чего после открепления заготовки форма обработанной поверхности искажается. При проектировании станочных приспособлений для механической обработки заготовок необходимо определить величину искажений в зависимости от применяемой схемы закрепления заготовки с тем, чтобы эти искажения не превышали величину допуска, заданную чертежом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ТОНКОСТЕННЫХ КОЛЕЦ ПРИ ЗАКРЕПЛЕНИИ В ПРИЗМАХ

Деформации тонкостенных колец и втулок при закреплении в призмах зависят от способа установки. Обычно применяют два варианта закрепления колец в призмах: плоским прижимом и между двумя призмами. Рассмотрим деформации тонкостенных колец при закреплении в двух самоцентрирующих призмах. Схема нагружения кольца представлена на рис. 1. В процессе закрепления кольцо деформируется и скользит по боковым поверхностям призм, а точки его контакта перемещаются из положения А в положение А₁. При этом первоначальное значение центрального угла β изменяется до значения β₁. Для малых деформаций, допускаемых условиями обработки разность этих углов невелика и составляет менее одного градуса. Поэтому с достаточной для практики точностью будем считать β₁ ≈ β. На рис. 1 указаны силы, действующие со стороны кольца на боковые поверхности призм, где P' – нормальные силы в точках контакта и F'_{тр} – силы трения в тех же точках. Указанное на рис. 1 направление сил F'_{тр} выбираем таким, чтобы силы трения, действующие со стороны кольца на призму, противодействовали ее перемещению. Для нахождения значений сил P' и F'_{тр} рассмотрим равновесие одной из призм (рис. 2). Проектируя все действующие силы* на ось O_y, получим

$$\sum_{i=1}^5 F_{iy} = -F + 2P' \sin \alpha + 2F'_{mp} \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

* Силы, действующие на призму со стороны направляющих и привода при...

$$\delta_2 = D \cos \alpha + E \sin \alpha + \alpha (-D \sin \alpha + E \cos \alpha);$$

$$\delta_2'' = -2D \sin \alpha + 2E \cos \alpha - \alpha (D \cos \alpha + E \sin \alpha)$$

$$= -2D \sin \alpha + 2E \cos \alpha - \alpha (D \cos \alpha + E \sin \alpha) + C + \alpha (D \cos \alpha + E \sin \alpha) = \\ = \frac{PR^3}{2EJ} \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \frac{\pi}{K}} - \frac{K}{\pi} \right),$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} -2D &= 0; \\ 2E &= \frac{PR^3}{2EJ \sin \frac{\pi}{K}}; \\ C &= -\frac{PR^3 K}{2EJ \pi}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} D &= 0; \\ E &= \frac{PR^3}{4EJ \sin \frac{\pi}{K}}; \\ C &= -\frac{PR^3 K}{2EJ \pi}; \end{aligned} \right.$$

$$\text{т.о.} \quad \delta = A \cos \alpha + B \sin \alpha - \frac{PR^3 K}{2EJ \pi} + \frac{PR^3 \alpha}{4EJ \sin \frac{\pi}{K}} \cdot \sin \alpha; \quad (\text{II})$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{K}$ имеют место экстремумы функции (II), т.е. $\frac{d\delta}{d\alpha} = 0$;
тогда

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = -A \sin \alpha + \frac{PR^3}{4EJ \sin \frac{\pi}{K}} \cdot \sin \alpha + \frac{PR^3 \alpha}{4EJ \sin \frac{\pi}{K}} \cdot \cos \alpha + B \cos \alpha;$$

$$\frac{d\delta}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = B = 0; \quad \frac{d\delta}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{K}} = -A \sin \frac{\pi}{K} + \frac{PR^3}{4EJ} + \frac{PR^3 \pi}{4KEJ \sin^2 \frac{\pi}{K}} \cdot$$

$$\times \cos \frac{\pi}{K} = 0,$$

т.е.

$$A = \frac{PR^3}{4EJ \sin \frac{\pi}{K}} + \frac{PR^3 \pi \cdot \cos \frac{\pi}{K}}{4KEJ \sin^2 \frac{\pi}{K}}.$$

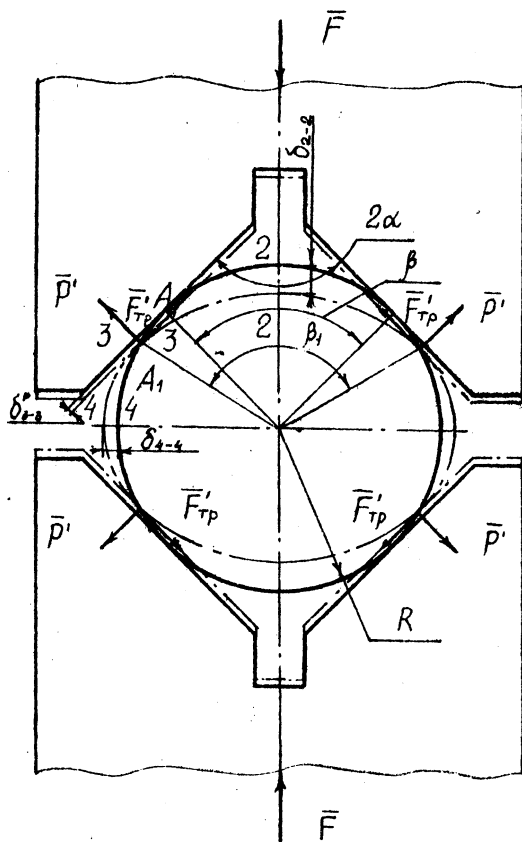


Рис. I. Схема закрепления кольца в двух самоцентрирующих призмах

Из закона Кулона известно, что сила трения скольжения принимается равной нормальной составляющей реакции P' (в месте контакта) на коэффициент трения (в месте контакта), т.е.

дяд к изменению величины силы F , которая оказывает зажимное действие. Считаем, что этот расчет уже сделан и поэтому другие силы не рассматриваем.

$$F'_{mp} = f P' \quad (2)$$

Выразив из равенства (1) силу P' и подставив в уравнение (2), получим

$$-F + 2P' \sin \alpha + 2f P' \cos \alpha = -F + 2P'(\sin \alpha + f \cos \alpha) = 0$$

$$P' = \frac{F}{2(\sin \alpha + f \cos \alpha)} \quad (3) \quad F'_{mp} = \frac{f F}{2(\sin \alpha + f \cos \alpha)} \quad (4)$$

Со стороны призмы на кольцо действуют силы, равные по величине P' и F'_{tr} , но направленные в противоположные стороны. Разделим кольцо на четыре одинаковых деформирующихся участка, которые заключены между сечениями 2-2 и 4-4 (рис.1). Рассмотрим равновесие четвертой части кольца, заменив действие отброшенной части реакциями связи. Эти связи в сечениях 2-2 и 4-4 будут иметь касательную составляющую (она будет равна нормальной силе N_2 или силе N_4 соответственно). В силу симметричности правая и левая часть кольца около сечений 2-2 и 4-4 деформируются одинаково, отсюда все точки этих частей не перемещаются относительно друг друга в радиальном направлении, т.е. радиальная составляющая (равная поперечной силе Q_2 или силе Q_4 соответственно) равно 0.

Кроме того, в этих сечениях действуют реактивные моменты M_2 и M_4 (рис.3).

С учетом изложенного выше и учитывая значения уравнений (3) и (4), получим

$$P = P' = \frac{F}{(\sin \alpha + f \cos \alpha) 2} \quad (5) \quad F_{mp} = F'_{mp} = \frac{F f}{2(\sin \alpha + f \cos \alpha)} \quad (6)$$

Для сокращения записей введем обозначения

$$C = \frac{1}{\sin \alpha + f \cos \alpha} \quad (7)$$

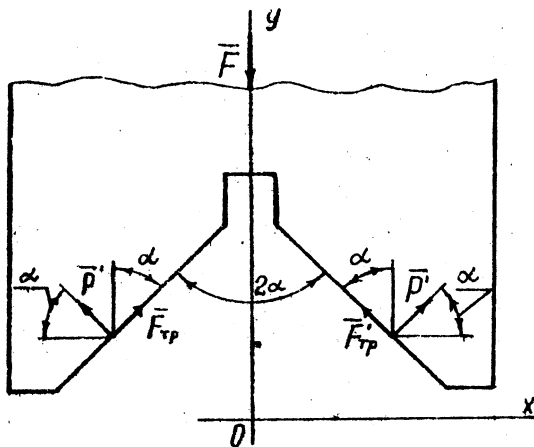


Рис.2. Схема равновесия призмы

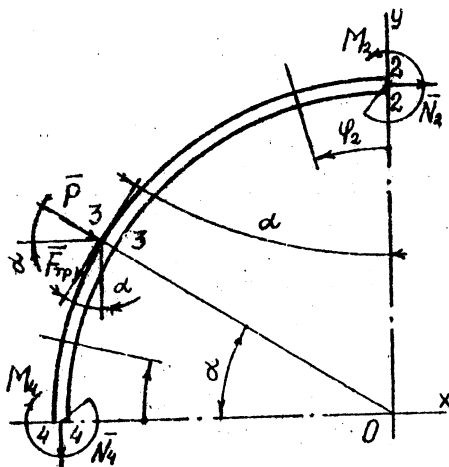


Рис.3. Схема равновесия четвертой части кольца

Тогда (5) и (6) будут иметь вид.

$$p = \frac{CF}{2} \quad (8); \quad F_{mp} = f \frac{CF}{2} \quad (9)$$

Для нахождения сил N_2 и N_4 спроектируем все силы на оси O_x и O_y

$$\sum_{i=1}^4 F_{ix} = N_2 + p \cos \alpha - F_{mp} \sin \alpha = 0; \Rightarrow N_2 = F_{mp} \sin \alpha - p \cos \alpha$$

или учтя уравнения (8) и (9) $N_2 = (f \sin \alpha - \cos \alpha) CF / 2 \quad (10)$

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = -N_4 - p \sin \alpha - F_{mp} \cos \alpha = 0; \Rightarrow N_4 = -F_{mp} \cos \alpha - p \sin \alpha$$

или учтя уравнения (8) и (9) $N_4 = -(f \cos \alpha + \sin \alpha) CF / 2 \quad (11)$

или учтя уравнение (7) $N_4 = -F / 2 \quad (12)$

Для определения моментов M_4 и M_2 воспользуемся тем, что сечение 2-2 относительно сечения 4-4 не поворачиваются, тогда энергия деформации 1/4 части кольца равна

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2 R}{2EJ} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{4-2}^2 R}{2EJ} d\varphi_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{M_{2-2}^2 R}{2EJ} d\varphi_2$$

где U - потенциальная энергия деформации кольца;

M - изгибающий момент в сечении кольца;

R - средний радиус кольца;

E - модуль упругости;

J - осевой момент инерции;

φ - угол между рассматриваемым и начальным сечением кольца;

Для сокращения промежуточных вычислений во втором интеграле произведем замену переменной, пусть $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$, тогда $d\varphi_2 = -d\varphi_1$ и при $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$; при $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ $\varphi_2 = 0$, тогда имеем

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{4-2}^2 R}{2EJ} d\varphi_1 - \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^0 \frac{M_{2-2}^2 R}{2EJ} d\varphi_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{4-2}^2 R}{2EJ} d\varphi_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{M_{2-2}^2 R}{2EJ} d\varphi_2$$

M_{3-2} - момент на участке между сечениями 3-3 и 2-2, составленный из условия равновесия левой части четверти кольца заменим на момент M_{2-3} , составленный для правой части четверти кольца, получим:

$$U = \int_0^{\alpha} \frac{M_{4-3}^2 R}{2EJ} d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2-\alpha} \frac{M_{2-3}^2 R}{2EJ} d\varphi_2 \quad (I3)$$

По теореме Кастильяно угол поворота сечения 4-4 относительно сечения 2-2 определится как $\frac{dU}{dM_2}$ и в нашем случае $\frac{dU}{dM_2} = 0$.
Запишем уравнения моментов между сечениями 4-4, 3-3 и 2-2 и 3-3

$$\begin{cases} M_{4-3} = M_4 - N_4 R (1 - \cos \varphi_1); 0 \leq \varphi_1 \leq \alpha \\ M_{2-3} = -M_2 + N_2 R (1 - \cos \varphi_2); 0 \leq \varphi_2 \leq \pi/2 - \alpha \end{cases} \quad (I4)$$

Составим уравнения моментов относительно точки O

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 m_{oi} (\vec{F}_i) &= -M_4 + M_2 + F_{mp} R - N_2 R + N_4 R = 0; \Rightarrow \\ \Rightarrow M_4 &= M_2 + F_{mp} R - N_2 R + N_4 R \end{aligned} \quad (I5)$$

с учетом уравнения (I5) система (I4) примет вид

$$\begin{cases} M_{4-3} = M_2 + F_{mp} R - N_2 R + N_4 R \cos \varphi_1; 0 \leq \varphi_1 \leq \alpha \\ M_{2-3} = -M_2 + N_2 R (1 - \cos \varphi_2); 0 \leq \varphi_2 \leq \pi/2 - \alpha \end{cases} \quad (I6)$$

Найдем $\frac{dU}{dM_2}$ из уравнения (I3)

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dM_2} &= \frac{d}{dM_2} \left(\int_0^{\alpha} \frac{M_{4-3}^2 R}{2EJ} d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2-\alpha} \frac{M_{2-3}^2 R}{2EJ} d\varphi_2 \right) = \frac{R}{EJ} \left(\int_0^{\alpha} M_{4-3} \frac{dM_{4-3}}{dM_2} d\varphi_1 + \right. \\ & \left. + \int_0^{\pi/2-\alpha} \frac{M_{2-3}}{dM_2} dM_{2-3} d\varphi_2 \right) = \frac{R}{EJ} \left(\int_0^{\alpha} M_{4-3} d\varphi_1 - \int_0^{\pi/2-\alpha} M_{2-3} d\varphi_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (I7)$$

Т.к. из уравнения (16) следует, что $\frac{dM_{4-3}}{dM_2} = 1$ и $\frac{dM_{2-3}}{dM_2} = -1$;
 Подставив значения M_{4-3} и M_{2-3} из системы уравнений (16) в уравнение (17), получим

$$\frac{dU}{dM_2} = \frac{R}{EJ} \left(\int_0^\alpha (M_2 + F_{mp} R - N_2 R + N_4 R \cos \varphi_1) d\varphi_1 - \int_0^{\pi/2-\alpha} (-M_2 + N_2 R \cdot \right. \\
 \left. \cdot (1 - \cos \varphi_2)) d\varphi_2 \right) = (M_2 \alpha + F_{mp} \alpha - N_2 R \alpha + N_4 R \sin \alpha + M_2 (\pi/2 - \alpha) - N_2 R (\pi/2 - \alpha) + N_2 R \sin(\pi/2 - \alpha)) R / EJ = (M_2 \pi/2 + F_{mp} R \alpha + N_4 R \sin \alpha - N_2 R \pi/2 + N_2 R \cos \alpha) R / (EJ) = 0$$

откуда
$$M_2 = \frac{N_2 R (\pi - 2 \cos \alpha) - 2 F_{mp} R \alpha - N_4 \cdot 2 \cdot R \sin \alpha}{\pi} \quad (18)$$

Подставив значения N_2 , N_4 и $F_{тр}$ из уравнений (10), (11) и (9), получим

$$M_2 = \frac{CFR(f \sin \alpha - \cos \alpha)(\pi - 2 \cos \alpha) - 2 \int CFR \alpha + 2 CFR(f \cos \alpha + \sin \alpha) \sin \alpha}{2 \pi} = \\
 = CFR(f(\sin \alpha \cdot (\pi - 2 \cos \alpha) - 2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha) + 2 \sin^2 \alpha - \cos \alpha \cdot (\pi - 2 \cos \alpha)) / (2 \pi) = CFR(f(\pi \sin \alpha - 2 \alpha) + 2 - \pi \cos \alpha) / (2 \pi)$$

Для сокращения записей введем обозначения

$$K_1 = (\pi \sin \alpha - 2 \alpha) / (2 \pi) ; \quad K_2 = (2 - \pi \cos \alpha) / (2 \pi)$$

тогда
$$M_2 = \int CFR K_1 + CFR K_2 \quad (19)$$

Подставив полученное значение M_2 из уравнения (18) в уравнение (15), имеем

$$M_4 = (N_2 R (\pi - 2 \cos \alpha) - 2 F_{mp} R \alpha - 2 N_4 R \sin \alpha + F_{mp} R - \pi N_2 R + \pi N_4 R) / \pi$$

$$M_4 = (N_4 R (\pi - 2 \sin \alpha) + F_{mp} R (\pi - 2 \alpha) - 2 N_2 R \cos \alpha) / \pi. \quad (20)$$

Подставив значения N_2 , N_4 и F_{mp} из уравнений (I0), (II), (9), получим

$$M_4 = (-CFR(f \cos \alpha + \sin \alpha)(\pi - 2 \sin \alpha) + f CFR(\pi - 2 \alpha) - 2 CFR(f \sin \alpha - \cos \alpha) \cos \alpha) / (2 \pi) = CFR(f((\pi - 2 \sin \alpha)(-\cos \alpha) + \pi - 2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha) + 2 \cos^2 \alpha - \pi \sin \alpha) / (2 \pi) = CFR(f(\pi - 2 \alpha - \pi \cos \alpha) + 2 - \pi \sin \alpha) / (2 \pi).$$

Для сокращения записей введем обозначения

$$K_3 = (\pi - 2 \alpha - \pi \cos \alpha) / (2 \pi); \quad K_4 = (2 - \pi \sin \alpha) / (2 \pi)$$

тогда $M_4 = f CFR K_3 + CFR K_4 \quad (21)$

Для определения радиального перемещения в сечении 3-3 способом Максвелла-Мора нагрузим четверть кольца радиальной единичной силой, приложенной в этом сечении (рис. 4). Значения сил реакций связи определим аналогично тому, как это делалось для основной схемы нагружения (рис. 3).

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = N_{21} + 1 \cos \alpha = 0; \Rightarrow N_{21} = -\cos \alpha \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = -N_{41} - 1 \sin \alpha = 0; \Rightarrow N_{41} = \sin \alpha \quad (23)$$

Уравнения моментов для участков кольца, расположенных между сечениями 4-4 и 3-3, 2-2 и 3-3

$$\begin{cases} M_{4-3_1} = M_{41} - N_{41} R (1 - \cos \varphi_1); & 0 \leq \varphi_1 \leq \alpha \\ M_{2-3_1} = -M_{21} + N_{21} R (1 - \cos \varphi_2); & 0 \leq \varphi_2 \leq \pi/2 - \alpha \end{cases} \quad (24)$$

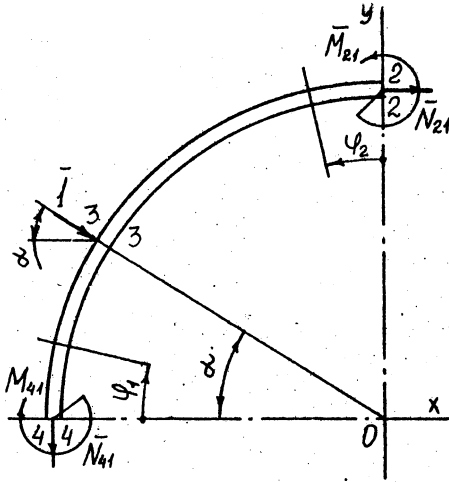


Рис. 4. Схема равновесия четвертой части кольца под действием единичной радиальной силы

Значения моментов запишем, пользуясь полученными ранее соотношениями (18) и (20) на основании аналогичности схем нагружения и учета, что для схемы на рис. 4 $F_{\text{тр}}=0$; N_2 , N_4 и M_2, M_4 соответствуют N_{2I} ; N_{4I} , M_{2I} , M_{4I} , тогда

$$M_{21} = (N_{21}R(\pi - 2\cos\alpha) - 2N_{41}R\sin\alpha)/\pi \quad (25)$$

$$M_{41} = (N_{41}R(\pi - 2\sin\alpha) - 2N_{21}R\cos\alpha)/\pi \quad (26)$$

Подставив в выражения (25) и (26) значения N_{2I} и N_{4I} из (22) и (23) получим:

$$M_{21} = (-R(\pi - 2\cos\alpha)\cos\alpha + 2R\sin^2\alpha)/\pi \Rightarrow M_{21} = R(2 - \pi\cos\alpha)/\pi \quad (27)$$

$$M_{41} = (-R(\pi - 2\sin\alpha)\sin\alpha + 2R\cos^2\alpha)/\pi \Rightarrow M_{41} = R(2 - \pi\sin\alpha)/\pi \quad (28)$$

или учета введенные ранее постоянные K_2 и K_4 , получим

$$M_{21} = 2K_2R \quad (29) \quad M_{41} = 2K_4R \quad (30)$$

С достаточной для практики точностью радиальное перемещение равно

$$\delta_{3-3}^p = \int_0^{\pi/2} \frac{MM_1}{EJ} R d\varphi_1 = \int_0^{\alpha} \frac{M_{4-3} M_{4-3,1}}{EJ} R d\varphi_1 + \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{M_{3-2} M_{3-2,1}}{EJ} R d\varphi_1.$$

Для сокращения объема вычислений во втором интеграле произведем замену переменной, пусть $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$, тогда $d\varphi_2 = -d\varphi_1$ и при $\varphi_1 = \alpha$ $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$; при $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ $\varphi_2 = 0$, тогда

$$\delta_{3-3}^p = \int_0^{\alpha} \frac{M_{4-3} M_{4-3,1}}{EJ} R d\varphi_1 - \int_{\pi/2-\alpha}^0 \frac{M_{3-2} M_{3-2,1}}{EJ} R d\varphi_2 = \int_0^{\alpha} \frac{M_{4-3} M_{4-3,1}}{EJ} R d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2-\alpha} \frac{M_{3-2} M_{3-2,1}}{EJ} R d\varphi_2.$$

Во втором интеграле заменим моменты M_{3-2} и $M_{3-2,1}$ на участке между сечениями 3-3 и 2-2, составленные из условия равновесия левой части четверти кольца, на моменты M_{2-3} и $M_{2-3,1}$, составленные для правой части четверти кольца, тогда имеем

$$\delta_{3-3}^p = \int_0^{\alpha} \frac{M_{4-3} M_{4-3,1}}{EJ} R d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2-\alpha} \frac{M_{2-3} M_{2-3,1}}{EJ} R d\varphi_2 = \frac{R}{EJ} \left(\int_0^{\alpha} M_{4-3} M_{4-3,1} d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2-\alpha} M_{2-3} M_{2-3,1} d\varphi_2 \right) \quad (31)$$

Определим значение первого интеграла, подставив значения M_{4-3} и $M_{4-3,1}$ из уравнений (14) и (24) соответственно

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} M_{4-3} M_{4-3,1} d\varphi_1 &= \int_0^{\alpha} (M_4 - N_4 R (1 - \cos \varphi_1)) (M_{4,1} - N_{4,1} R (1 - \cos \varphi_1)) d\varphi_1 = \\ &= \int_0^{\alpha} M_4 M_{4,1} d\varphi_1 - \int_0^{\alpha} M_4 N_{4,1} R (1 - \cos \varphi_1) d\varphi_1 - \int_0^{\alpha} M_{4,1} N_4 R (1 - \cos \varphi_1) d\varphi_1 + \\ &+ \int_0^{\alpha} N_4 N_{4,1} R^2 (1 - 2 \cos \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) d\varphi_1. \end{aligned}$$

Воспользуемся равенством 18 (1, с. 171) для определения последнего интеграла

$$\int \cos^2 x dx = x/2 + (\sin 2x)/4, \quad \text{тогда}$$

$$\int M_{4-3} M_{4-3} d\varphi_1 = M_4 M_{41} \alpha - M_4 N_{41} R(\alpha - \sin \alpha) - M_{41} N_4 R(\alpha - \sin \alpha) + N_4 N_{41} R^2(\alpha - 2 \sin \alpha + \alpha/2 + (\sin 2\alpha)/4) = M_4 M_{41} \alpha - (M_4 N_{41} R + M_{41} N_4 R)(\alpha - \sin \alpha) + N_4 N_{41} R^2(3\alpha/2 - 2 \sin \alpha + (\sin 2\alpha)/4)$$

Аналогично найдем второй интеграл выражения (31)

$$\int_0^{\pi/2} M_{2-3} M_{2-3} d\varphi_2 = \int_0^{\pi/2} (-M_2 + N_2 R(1 - \cos \varphi_2))(-M_{21} + N_{21} R(1 - \cos \varphi_2)) d\varphi_2 = M_2 M_{21} (\pi/2 - \alpha) - (M_2 N_{21} R + M_{21} N_2 R)(\pi/2 - \alpha - \sin(\pi/2 - \alpha)) + N_2 N_{21} R^2(\pi/2 - \alpha - 2 \sin(\pi/2 - \alpha) + (\pi/2 - \alpha)/2 + (\sin 2(\pi/2 - \alpha))/4) = M_2 M_{21} (\pi/2 - \alpha) - (M_2 N_{21} R + M_{21} N_2 R)(\pi/2 - \alpha - \cos \alpha) + N_2 N_{21} R^2 \times (3\pi/4 - 3\alpha/2 - 2 \cos \alpha + (\sin 2\alpha)/4)$$

Теперь запишем выражение для радиального перемещения в сечении 3-3 и упростим его

$$\delta_{3-3}^p = (M_4 M_{41} \alpha + M_2 M_{21} (\pi/2 - \alpha) - (M_4 N_{41} R + M_{41} N_4 R)(\alpha - \sin \alpha) - (M_2 N_{21} R + M_{21} N_2 R)(\pi/2 - \alpha - \cos \alpha) + N_2 N_{21} (3\pi/4 - 3\alpha/2 - 2 \cos \alpha + (\sin 2\alpha)/4) R^2 + N_4 N_{41} R^2(3\alpha/2 - 2 \sin \alpha + (\sin 2\alpha)/4)) \times R / (EJ) \quad (32)$$

Подставим в выражение (32) значения $M_4, M_2, M_{41}, M_{21}, N_4, N_2, N_{41}, N_{21}$ из (21), (19), (30), (29), (10), (11), (22) и (23)

$$\delta_{3-3}^p = ((fCFK_3 R + CFRK_4) \cdot 2K_4 R \alpha + (fCFRK_1 + CFRK_2) 2K_2 R (\pi/2 - \alpha) - ((fCFK_3 R + CFRK_4)(-\sin \alpha) R + 2K_4 R^2(-CF(f \cos \alpha + \sin \alpha)/2)) \times (\alpha - \sin \alpha) - ((fCFRK_1 + CFRK_2)(-\cos \alpha) R + 2K_2 R^2(CF(f \sin \alpha - \cos \alpha)/2)) (\pi/2 - \alpha - \cos \alpha) + CF(f \sin \alpha - \cos \alpha)(-\cos \alpha) R^2 \times$$

$$\begin{aligned}
& \times (3\pi/4 - 3\alpha/2 - 2\cos\alpha + (\sin 2\alpha)/4)/2 + (-CF)(f\cos\alpha + \sin\alpha) \times \\
& \times (-\sin\alpha) R^2 (3\alpha/2 - 2\sin\alpha + (\sin 2\alpha)/4)/2) R / (EJ) = (2K_4^2 \alpha + \\
& + 2K_2^2 (\pi/2 - \alpha) + (K_4 \sin\alpha + K_4 \sin\alpha)(\alpha - \sin\alpha) + (K_2 \cos\alpha + K_2 \cos\alpha) \times \\
& \times (\pi/2 - \alpha - \cos\alpha) + (\cos^2 \alpha) (3\pi/4 - 3\alpha/2 - 2\cos\alpha + (\sin 2\alpha)/4)/2 + \\
& + (\sin^2 \alpha) (3\alpha/2 - 2\sin\alpha + (\sin 2\alpha)/4)/2 + f(2K_3 K_4 \alpha + 2K_1 \times \\
& \times K_2 (\pi/2 - \alpha) + (K_3 \sin\alpha + K_4 \cos\alpha)(\alpha - \sin\alpha) + (K_1 \cos\alpha - K_2 \sin\alpha) \times \\
& \times (\pi/2 - \alpha - \cos\alpha) - (\sin\alpha)(\cos\alpha)(3\pi/4 - 3\alpha/2 - 2\cos\alpha + (\sin 2\alpha)/4)/2) + \\
& + (\sin\alpha)(\cos\alpha)(3\alpha/2 - 2\sin\alpha + (\sin 2\alpha)/4)/2) CFR^3 / (EJ)
\end{aligned}$$

Если введем обозначения

$$\begin{aligned}
K_5 = & 2K_4^2 \alpha + 2K_2^2 (\pi/2 - \alpha) + 2K_4 (\alpha - \sin\alpha) \sin\alpha + 2K_2 (\pi/2 - \alpha - \\
& - \cos\alpha) \cos\alpha + (3\pi/4 - 2\cos\alpha) \cos^2 \alpha / 2 - \sin^3 \alpha - (3\alpha \cos 2\alpha) / 4 + \\
& + (\sin 2\alpha) / 8
\end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
K_6 = & 2K_3 K_4 \alpha + 2K_1 K_2 (\pi/2 - \alpha) + (K_3 \sin\alpha + K_4 \cos\alpha)(\alpha - \sin\alpha) + \\
& + (K_1 \cos\alpha - K_2 \sin\alpha)(\pi/2 - \alpha - \cos\alpha) - (\sin\alpha)(\cos\alpha)(3\pi/4 - 2\cos\alpha) / 2 - \\
& - \sin^2 \alpha \cos\alpha + (3\alpha \sin\alpha \cos\alpha) / 2
\end{aligned} \quad (34)$$

имеем
$$\delta_{3-3}^p = CFR^3 (K_5 + fK_6) / (EJ). \quad (35)$$

Для определения коэффициента трения, при котором закрепление кольца происходит без проскальзывания в точке его контакта с поверхностями призмы, найдем тангенциальное перемещение кольца в сечении 3-3. Воспользуемся тем же методом, что и при определении радиального перемещения кольца в сечении 3-3 (методом Максвелла-Мора). Нагрузим чет-

верть кольца тангенциальной радиальной силой по величине равной единице (рис.5). Определение реакций связи и уравнений моментов на участках между сечениями 4-4, 3-3 и 3-3, 2-2 проводим также, как это делалось при определении аналогичных величин для расчета $\bar{\sigma}_{3-3}^p$

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = N_{22} - 1 \sin \alpha = 0; \Rightarrow N_{22} = \sin \alpha \quad (36)$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = -N_{42} - 1 \cos \alpha = 0; \Rightarrow N_{42} = -\cos \alpha \quad (37)$$

Уравнения моментов будут иметь вид

$$\begin{cases} M_{4-3_2} = M_{42} - N_{42}R(1 - \cos \varphi_1); & 0 \leq \varphi_1 \leq \alpha \\ M_{2-3_2} = -M_{22} + N_{22}R(1 - \cos \varphi_2); & 0 \leq \varphi_2 \leq \pi/2 - \alpha \end{cases} \quad (38)$$

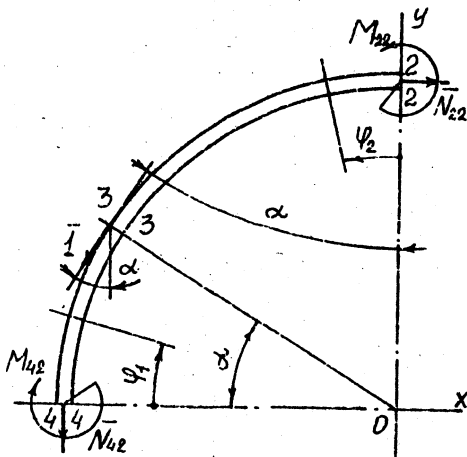


Рис.5. Схема равновесия четвертой части кольца под действием единичной тангенциальной силы

Значения моментов запишем пользуясь полученными ранее соотношениями (18) и (20) на основании аналогичности схем нагружения и учтя, что для схемы (рис.5) $F_{тр}=1$, N_2 , N_4 и M_2, M_4 соответствует N_{22} , N_{42} и M_{22}, M_{42} , тогда

$$M_{22} = (N_{22} R (\pi - 2 \cos \alpha) - 2 R \alpha - 2 N_{42} R \sin \alpha) / \pi \quad (39)$$

$$M_{42} = (N_{42} R (\pi - 2 \sin \alpha) + R (\pi - 2 \alpha) - 2 N_{22} R \cos \alpha) / \pi \quad (40)$$

Подставив в выражения (39) и (40) значения N_{22} и N_{42} из (36) и (37), получим:

$$M_{22} = (R (\pi - 2 \cos \alpha) \sin \alpha - 2 R \alpha + 2 R \sin \alpha \cos \alpha) / \pi \Rightarrow M_{22} = (\pi \sin \alpha - 2 \alpha) R / \pi \quad (41)$$

$$M_{42} = (-R (\pi - 2 \sin \alpha) \cos \alpha + R (\pi - 2 \alpha) - 2 R \cos \alpha \sin \alpha) / \pi \Rightarrow M_{42} = (\pi - \pi \cos \alpha - 2 \alpha) R / \pi \quad (42)$$

или учтя введенные ранее постоянные K_1 и K_3 , получим

$$M_{22} = 2 K_1 R \quad (43) \quad M_{42} = 2 K_3 R \quad (44)$$

Тангенциальное перемещение равно

$$\delta_{3-3}^T = \int_0^{\alpha} (M_{4-3} M_{4-3} / (EJ)) R d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2 - \alpha} (M_{2-3} M_{2-3} / (EJ)) R d\varphi_2$$

Отсюда видно, что выражения для M_{4-3I} и M_{4-32} , а также выражений для M_{2-3I} и M_{2-32} одинаковы с точностью до принятых обозначений, поэтому по аналогии с (32) можно записать

$$\begin{aligned} \delta_{3-3}^T = & (M_4 M_{42} \alpha + M_2 M_{22} (\pi/2 - \alpha) - (M_4 N_{42} R + M_{42} N_4 R) (\alpha - \sin \alpha) - \\ & - (M_2 N_{22} R + M_{22} N_2 R) (\pi/2 - \alpha - \cos \alpha) + N_2 N_{22} R^2 (3\pi/4 - 3\alpha/2 - 2 \cos \alpha + \\ & + (\sin 2\alpha)/4) + N_4 N_{42} R^2 (3\alpha/2 - 2 \sin \alpha + (\sin 2\alpha)/4)) R / (EJ). \quad (45) \end{aligned}$$

Подставим в выражение (45) значения $M_4, M_2, M_{42}, M_{22}, N_2, N_4, N_{22}$ и N_{42} из (21), (19), (44), (43), (10), (11), (36), и (37)

$$\begin{aligned} \delta_{3,3}^T = & ((fCFRK_3 + CFRK_4)2K_3R\alpha + (fCFRK_1 + CFRK_2)2K_1R(\pi/2 - \\ & - \alpha) - ((fCFRK_3 + CFRK_4)(-\cos\alpha)R + 2K_3R^2(-CF)(f\cos\alpha + \sin\alpha)/2) \times \\ & \times (\alpha - \sin\alpha) - ((fCFRK_1 + CFRK_2)R\sin\alpha + 2K_1R^2(CF(f\sin\alpha - \cos\alpha))/2) \times \\ & \times (\pi/2 - \alpha - \cos\alpha) + CF(f\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha)R^2(3\pi/4 - 3\alpha/2 - 2\cos\alpha + \\ & + (\sin 2\alpha)/4)/2 + (-CF)(f\cos\alpha + \sin\alpha)(-\cos\alpha)R^2(3\alpha/2 - 2\sin\alpha + (\sin 2\alpha)/4)/2 \times \\ & \times R/(EJ) = CFR^3(2K_3K_4\alpha + 2K_1K_2(\pi/2 - \alpha) + (K_4\cos\alpha + K_3\sin\alpha) \times \\ & \times (\alpha - \sin\alpha) + (K_1\cos\alpha - K_2\sin\alpha)(\pi/2 - \alpha - \cos\alpha) - (\sin\alpha)(\cos\alpha)(3\pi/4 - \\ & - 3\alpha/2 - 2\cos\alpha + (\sin 2\alpha)/4)/2 + (\sin\alpha)(\cos\alpha)(3\alpha/2 - 2\sin\alpha + (\sin 2\alpha)/4)/2 + \\ & + f(2K_3^2\alpha + 2K_1^2(\pi/2 - \alpha) + (K_3\cos\alpha + K_3\cos\alpha)(\alpha - \sin\alpha) - (K_1\sin\alpha + K_1\sin\alpha) \times \\ & \times (\pi/2 - \alpha - \cos\alpha) + (\sin^2\alpha)(3\pi/4 - 3\alpha/2 - 2\cos\alpha + (\sin 2\alpha)/4)/2 + (\cos^2\alpha) \times \\ & \times (3\alpha/2 - 2\sin\alpha + (\sin 2\alpha)/4)/2)/(EJ) \end{aligned}$$

или учтя ранее введенное обозначение для K_6 (34) и введя обозначение

$$K_7 = 2K_3^2\alpha + 2K_1(\pi/2 - \alpha) + 2K_3(\alpha - \sin\alpha)\cos\alpha - 2K_1(\pi/2 - \alpha - \cos\alpha)\sin\alpha - \cos^2\alpha\sin\alpha + (\sin 2\alpha)/8 + (3\alpha\cos 2\alpha)/4 + (3\pi/4 - 2\cos\alpha)(\sin^2\alpha)/2 \quad (46)$$

тогда

$$\delta_{3,3}^T = CFR^3(K_6 + fK_7)/(EJ) \quad (47)$$

Рассмотрим перемещение кольца в сечении 3-3 (рис.6). Если относительного скольжения в точке контакта кольца и поверхности призмы нет, то (т.к. все точки призмы движутся только прямолинейно вдоль оси O_y) точка кольца А после зажима кольца займет положение A_I , причем отрезок AA_I параллелен O_y (в противном случае есть проскальзывание). Тогда радиальное и тангенциальное перемещения точки А связаны соотношением (предполагается, что все точки сечения 3-3 движутся одинаково)

$$\delta_{3-3} = \delta_{3-3}^P / \sin \alpha = \delta_{3-3}^T / \cos \alpha. \quad (48)$$

Подставляя в соотношение (48) значения δ_{3-3}^P и δ_{3-3}^T из (35) и (47), получим

$$\begin{aligned} \frac{CFR^3}{EJ \sin \alpha} (K_5 + K_6 f_{min}) &= \frac{CFR^3}{EJ \cos \alpha} (K_6 + K_7 f_{min}); \Rightarrow \\ \Rightarrow f_{min} (K_6 \cos \alpha - K_7 \sin \alpha) &= K_6 \sin \alpha - K_5 \cos \alpha; \Rightarrow \\ \Rightarrow f_{min} &= (K_6 \sin \alpha - K_5 \cos \alpha) / (K_6 \cos \alpha - K_7 \sin \alpha). \end{aligned} \quad (49)$$

Определим при каком угле α минимальный коэффициент трения равен 0

$$\frac{K_6 \sin \alpha - K_5 \cos \alpha}{K_6 \cos \alpha - K_7 \sin \alpha} = 0; \Rightarrow K_6 \sin \alpha - K_5 \cos \alpha = 0. \quad (50)$$

Аналитическое решение уравнения (50) с учетом уравнений (33), (35) и выражений для $K_1; K_2; K_3$ и K_4 представляет значительные трудности. Решение с помощью компьютера методом интерраций дает значение

$$2\alpha_0 = 95,550085 \pm 0,000005^\circ \quad (51)$$

$$\text{или } 2\alpha_0 = 95^\circ 33' 0,306'' \pm 0,018''.$$

При попытке определить значение коэффициента трения для углов больших указанных в равенствах (51) дает его отрицательное значение, что свидетельствует о том, что сила трения (рис.3) меняет свое направление на противосложное. Для получения действительных значений величин необходимо в равенствах (5), (6), (7), (10), (11), (18), (19), (20), (21), (47) перед множителем f поменять знак на противоположный. При этом равенство (49) для углов призмы больших $2\alpha_0$ (см. (51)) будет иметь вид

$$f_{i, in} = \frac{K_6 \sin \alpha - K_5 \cos \alpha}{K_6 \cos \alpha + K_7 \sin \alpha}, \quad (52)$$

а тангенциальное перемещение сечения 3-3 равно $\delta_{3-3}^T = \frac{CFR^3}{EJ} (K_6 - f K_7)$,

где

$$C = 1 / (\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (53)$$

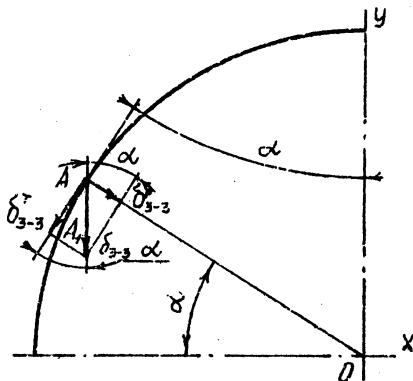


Рис.6. Схема перемещения кольца в сечении 3-3

Определим минимальные значения коэффициента трения (f_{min}) для разных углов при условии обеспечения отсутствия проскальзывания, а также значения коэффициентов $K_I \dots K_7$ и результаты расчетов звездочкой в таблицу I.

Если реальный коэффициент трения (f) кольца о призму (для стальных кольца и призмы $f = 0,18$) $f \geq f_{min}$ -скольжения нет, причем величина силы трения определяется коэффициентом f_{min} (это значит, что во все формулы подставляют вместо f значение f_{min} , полученное по соотношению). В случае, если $f_{min} > f$, то без столкновения не возможен (49) или (52), а сила трения определяется коэффициентом f .

На рис.7 показан график зависимости минимального коэффициента трения, при котором зажим осуществляется без проскальзывания от угла призмы.

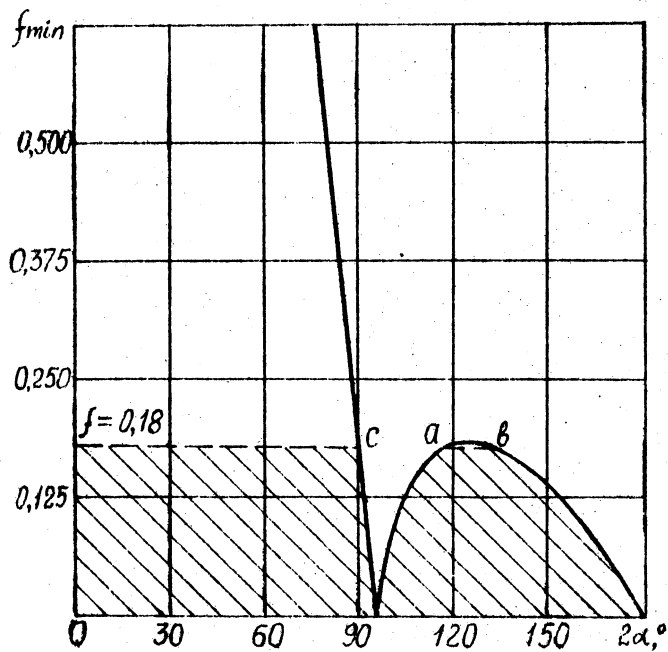


Рис.7. График изменения f_{\min} от угла 2α

Таблица I

$2L^{\circ}$	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	f_{min}
0	0	-0,18189	0	0,31831	0,07439	0	0	$+\infty$
10°	0,01580	-0,17979	-0,02588	0,27473	0,07162	-0,00633	0,00056	11,3198
20°	0,03126	-0,17409	-0,04796	0,23149	0,06430	-0,01175	0,00216	5,4701
30°	0,04608	-0,16465	-0,06630	0,18890	0,05390	-0,01561	0,00457	3,4503
40°	0,05990	-0,15154	-0,08096	0,14730	0,04195	-0,01750	0,00749	2,3895
50°	0,07242	-0,13484	-0,09204	0,10700	0,02989	-0,01726	0,01055	1,7101
60°	0,08333	-0,11470	-0,09968	0,06831	0,01902	-0,01501	0,01340	1,2170
70°	0,09234	-0,09127	-0,10402	0,03152	0,01042	-0,01105	0,01569	0,8241
80°	0,09917	-0,06471	-0,10524	-0,00308	0,00493	-0,00585	0,01718	0,4854
90°	0,10355	-0,03524	-0,10355	-0,03524	0,00304	0	0,01770	0,1717
100°	0,10524	-0,00308	-0,09917	-0,06471	0,00493	0,00585	0,01718	0,0776
110°	0,10402	0,03152	-0,09234	-0,09127	0,01042	0,01105	0,015169	0,1602
120°	0,09968	0,06831	-0,08333	-0,11470	0,01902	0,01501	0,01340	0,1828
130°	0,09204	0,10700	-0,07242	-0,13484	0,02989	0,01726	0,01055	0,1788
140°	0,08096	0,14730	-0,05990	-0,15154	0,04195	0,01750	0,00749	0,1607
150°	0,06730	0,18890	-0,04608	-0,16465	0,05390	0,01561	0,00457	0,1333
160°	0,04796	0,23149	-0,03127	-0,17410	0,06430	0,01175	0,00216	0,0983
170°	0,02588	0,27473	-0,01580	-0,17979	0,07163	0,00633	0,00056	0,0549
180°	0	0,31831	0	-0,18189	0,07439	0	0	0

При заданном коэффициенте трения $f = 0,18$ (рис.7, показано пунктиром) скольжение будет для углов 2α находящихся в пределах от 0 до С и от а до в. С ростом коэффициента трения эти интервалы сужаются и может наступить такой момент, что останется один интервал от 0 до С. Эпюра изменения действительного коэффициента трения показана на рис.7 заштрихованной площадью.

Для определения радиальных перемещений кольца в сечении 4-4 напишем дифференциальное уравнение упругой линии кольца между сечениями 4-4 и 3-3.

$$\frac{d^2 \delta_{4-3}}{d \varphi^2} + \delta_{4-3} = - \frac{M_{4-3} R^2}{EJ}$$

с учетом (I4) имеем

$$\frac{d^2 \delta_{4-3}}{d \varphi^2} + \delta_{4-3} = - \frac{M_4 - N_4 R (1 - \cos \varphi_1)}{EJ} R^2 \quad (54)$$

Общее решение этого уравнения состоит из двух частей: $\delta_{1,4-3}$ - общее решение однородного дифференциального уравнения и $\delta_{2,4-3}$ - частное решение дифференциального уравнения. Из теории дифференциальных уравнений известно, что $\delta_{1,4-3} = A_1 \cos \varphi_1 + B_1 \sin \varphi_1$; $\delta_{2,4-3} = \varphi_1 (C_1 \cos \varphi_1 + D_1 \sin \varphi_1) + G_1$.
Найдем $\delta_{2,4-3}$ для чего найдем $\ddot{\delta}_{2,4-3}$ и подставим в уравнение (54)

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_{2,4-3} &= C_1 \cos \varphi_1 + D_1 \sin \varphi_1 + \varphi_1 (-C_1 \sin \varphi_1 + D_1 \cos \varphi_1) \\ \ddot{\delta}_{2,4-3} &= -2C_1 \sin \varphi_1 + 2D_1 \cos \varphi_1 - \varphi_1 (C_1 \cos \varphi_1 + D_1 \sin \varphi_1) \\ -2C_1 \sin \varphi_1 + 2D_1 \cos \varphi_1 + G_1 &= -R^2 (M_4 - N_4 (1 - \cos \varphi_1)) / (EJ) \end{aligned}$$

Для определения постоянных C_I, D_I и G_I приравняем коэффициенты в левой и правой частях при $\sin \varphi_1, \cos \varphi_1$ и свободном члене.

$$\begin{cases} -2C_1 = 0 \\ 2D_1 = -(N_4 R^3)/(EJ) \\ G_1 = (-M_4 R^2 + N_4 R^3)/(EJ) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ D_1 = -(N_4 R^3)/(2EJ) \\ G_1 = (N_4 R^3 - M_4 R^2)/(EJ) \end{cases}$$

Таким образом имеем

$$\begin{aligned} \delta_{2,3} &= -N_4 R^3 \varphi_1 \sin \varphi_1 / (2EJ) + (N_4 R^3 - M_4 R^2) / (EJ) \\ \delta_{4,3} &= A_1 \cos \varphi_1 + B_1 \sin \varphi_1 - (N_4 R^3 \varphi_1 \sin \varphi_1) / (2EJ) + (N_4 R^3 - M_4 R^2) / (EJ) \end{aligned} \quad (55)$$

Так как левая и правая части кольца возле сечения 4-4 деформируются симметрично, то $\frac{\partial \delta_{4,3}}{\partial \varphi_1} = 0$; при $\varphi_1 = 0$; тогда так как

$$\delta_{4,3} = -A_1 \sin \varphi_1 + B_1 \cos \varphi_1 - N_4 R^3 (\sin \varphi_1 + \varphi_1 \cos \varphi_1) / (2EJ)$$

имеем $\delta_{4,3} / \varphi_1 = 0$

При $\varphi_1 = \alpha$; $\delta_{4,3} = \delta_{3,3}^0$, тогда

$$A_1 \cos \alpha - (N_4 R^3 \alpha \sin \alpha) / (2EJ) + (N_4 R^3 - M_4 R^2) / (EJ) = \delta_{3,3}^0$$

Учтя выражения (II), (2I) и (35), получим

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{CFR^3}{EJ} (fK_6 + K_5) + \frac{CFR^3}{4EJ} (-f \cos \alpha - \sin \alpha) \alpha \sin \alpha + \right. \\ &+ \frac{CFR^3}{EJ} (fK_3 + K_4) - \frac{CFR^3}{2EJ} (-f \cos \alpha - \sin \alpha) \left. \right) = \frac{CFR^3}{EJ \cos \alpha} \left(K_5 - \right. \\ &\left. - (\alpha \sin^2 \alpha) / 4 + K_4 + (\sin \alpha) / 2 + f(K_6 - (\alpha \cos \alpha \sin \alpha) / 4 + K_3 + (\cos \alpha) / 2) \right) \end{aligned}$$

или подставив в уравнение (55), получим:

$$\begin{aligned} \delta_{4,3} &= CFR^3 \left(K_5 - (\alpha \sin^2 \alpha) / 4 + K_4 + (\sin \alpha) / 2 + f \left(K_6 - (\alpha \cos \alpha \sin \alpha) / 4 + \right. \right. \\ &+ K_3 + (\cos \alpha) / 2 \left. \right) \cos \varphi_1 / (EJ \cos \alpha) - CFR^3 (-f \cos \alpha - \sin \alpha) \varphi_1 (\sin \varphi_1) : \\ &: (4EJ) + CFR^3 (-f \cos \alpha - \sin \alpha) / (2EJ) - CFR^3 (f K_3 + K_4) / (EJ) \\ \xi_{4,3} &= \frac{CFR^3}{EJ} \left(\left(K_5 - \frac{\alpha \sin^2 \alpha}{4} + K_4 + \frac{\sin \alpha}{2} \right) \frac{\cos \varphi_1}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{4} \varphi_1 \sin \varphi_1 - \frac{\sin \alpha}{2} - K_4 + \right. \\ &+ \left. f \left(K_6 - \frac{\alpha \cos \alpha \sin \alpha}{4} + K_3 + \frac{\cos \alpha}{2} \right) \frac{\cos \varphi_1}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{4} \varphi_1 \sin \varphi_1 - \frac{\cos \alpha}{2} - K_3 \right). \quad (56) \end{aligned}$$

Полученное соотношение можно использовать для любого сечения при $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ (51). Если же $\alpha > \alpha_0$, то необходимо использовать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \delta_{4,3} &= \frac{CFR^3}{EJ} \left(\left(K_5 - \frac{\alpha \sin^2 \alpha}{4} + K_4 + \frac{\sin \alpha}{2} \right) \frac{\cos \varphi_1}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{4} \varphi_1 \sin \varphi_1 - \frac{\sin \alpha}{2} - K_4 - \right. \\ &- \left. f \left(K_6 - \frac{\alpha \cos \alpha \sin \alpha}{4} + K_3 + \frac{\cos \alpha}{2} \right) \frac{\cos \varphi_1}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{4} \varphi_1 \sin \varphi_1 - \frac{\cos \alpha}{2} - K_3 \right). \end{aligned}$$

(57)

При $\varphi_1 = 0$; $\delta_{4,3} / \varphi_1 = 0 = \delta_{4,4}$

ТОГДА

$$\delta_{4-4} = \frac{CFR^3}{EJ} \left(\left(K_5 - \frac{\alpha \sin^2 \alpha}{4} + K_4 + \frac{\sin \alpha}{2} \right) \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{2} - K_4 + f \left(K_6 - \frac{\alpha \cos \alpha \sin \alpha}{4} + K_3 + \frac{\cos \alpha}{2} \right) \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{2} - K_3 \right) \quad (58)$$

ИЛИ ВВЕДЕМ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$$K_8 = (K_5 - (\alpha \sin^2 \alpha)/4 + K_4 + (\sin \alpha)/2) / \cos \alpha - (\sin \alpha)/2 - K_4$$

$$K_9 = (K_6 - (\alpha \cos \alpha \sin \alpha)/4 + K_3 + (\cos \alpha)/2) / \cos \alpha - (\cos \alpha)/2 - K_3$$

ПОЛУЧИМ
$$\delta_{4-4} = CFR^3 (K_8 + f K_9) / (EJ). \quad (59)$$

Аналогично найдем и выражение для δ_{3-2} . Дифференциальное уравнение упругой линии между сечениями 2-2 и 3-3 будет иметь вид (уравнение записано для правой части сечения кольца).

$$\frac{d^2 \delta_{3-2}}{d \varphi_1^2} + \delta_{3-2} = \frac{M_{3-2} R^2}{EJ}$$

с учетом (14) и того, что $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$, имеем

$$\frac{d^2 \delta_{3-2}}{d \varphi_1^2} + \delta_{3-2} = - \frac{M_2 - N_2 R (1 - \cos(\pi/2 - \varphi_1))}{EJ} R^2$$

ИЛИ

$$\frac{d^2 \delta_{3-2}}{d \varphi_1^2} + \delta_{3-2} = - \frac{M_2 - N_2 R (1 - \sin \varphi_1)}{EJ} R^2 \quad (60)$$

$$\delta_{1,3} = A_2 \cos \varphi_1 + B_2 \sin \varphi_1; \quad \delta_{2,3} = \varphi_1 (C_2 \cos \varphi_1 + D_2 \sin \varphi_1) + G_2$$

тогда

$$\delta_{2,3,2} = C_2 \cos \varphi_1 + D_2 \sin \varphi_1 + \varphi_1 (-C_2 \sin \varphi_1 + D_2 \cos \varphi_1)$$

$$\delta_{2,3,2} = -2C_2 \sin \varphi_1 + 2D_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 (C_2 \cos \varphi_1 + D_2 \sin \varphi_1)$$

$$-2C_2 \sin \varphi_1 + 2D_2 \cos \varphi_1 + G_2 = -R^2 (M_2 - N_2 (1 - \sin \varphi_1)) / (EJ)$$

Определим постоянные C_2 , D_2 и G_2 :

$$\begin{cases} -2C_2 = -(N_2 R^3) / (EJ) \\ 2D_2 = 0 \\ G_2 = (-M_2 R^2 + N_2 R^3) / (EJ) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = (N_2 R^3) / (2EJ) \\ D_2 = 0 \\ G_2 = (N_2 R^3 - M_2 R^2) / (EJ) \end{cases}$$

т.о.

$$\delta_{2,3,2} = (\varphi_1 N_2 R^3 \cos \varphi_1) / (2EJ) + (N_2 R^3 - M_2 R^2) / (EJ)$$

$$\delta_{3,2} = A_2 \cos \varphi_1 + B_2 \sin \varphi_1 + (\varphi_1 N_2 R^3 \cos \varphi_1) / (2EJ) + (N_2 R^3 - M_2 R^2) / (EJ) \quad (61)$$

$$\delta_{3,2} = -A_2 \sin \varphi_1 + B_2 \cos \varphi_1 + (N_2 R^3 \cos \varphi_1) / (2EJ) - (\varphi_1 N_2 R^3 \sin \varphi_1) / (2EJ)$$

при $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; $\delta_{2,3} = 0$, тогда

$$-A_2 = (\pi N_2 R^3) / (4EJ) \Rightarrow A_2 = -(\pi N_2 R^3) / (4EJ)$$

при $\varphi_1 = \alpha$; $\delta_{3,2} = \delta_{3,3}^p$, тогда

$$\delta_{3,3}^p = B_2 \sin \alpha - \frac{\pi N_2 R^3 \cos \alpha}{4EJ} + \frac{\alpha N_2 R^3 \cos \alpha}{2EJ} - \frac{M_2 R^2}{EJ} + \frac{N_2 R^3}{EJ} =$$

$$= B_2 \sin \alpha - \frac{N_2 R^3 \cos \alpha}{2EJ} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \frac{M_2 R^2}{EJ} + \frac{N_2 R^3}{EJ}$$

откуда выразим B

$$B_2 = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\delta_{3-3}^p + \frac{N_2 R^3}{2EJ} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \alpha + \frac{M_2 R^2}{EJ} - \frac{N_2 R^3}{EJ} \right)$$

или учтя (10), (19) и (35), получим

$$B_2 = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{CFR^3}{EJ} (K_5 + fK_6) + \frac{C(f \sin \alpha - \cos \alpha) FR^3}{4EJ} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \alpha + \right. \\ \left. - \frac{CFR^3}{2EJ} (f \sin \alpha - \cos \alpha) + \frac{CFR^3}{EJ} (fK_1 + K_2) \right) \\ B_2 = \frac{CFR^3}{EJ \sin \alpha} \left(K_2 + K_5 - \frac{\cos^2 \alpha}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{\cos \alpha}{2} + f(K_1 + K_6 + \right. \\ \left. + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \frac{\sin \alpha}{2} \right)$$

или подставив найденное значение B_2 в (61) и учтя (10), (19) и (35):

$$\delta_{3-2} = \frac{CFR^3}{EJ} \left(\left(K_2 + K_5 - \frac{\cos^2 \alpha}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{\cos \alpha}{2} + f \left(K_1 + K_6 + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{4} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \frac{\sin \alpha}{2} \right) \frac{\sin \varphi_1}{\sin \alpha} - \frac{\pi}{2} \frac{f \sin \alpha - \cos \alpha}{4} \cos \varphi_1 + \varphi_1 \frac{f \sin \alpha - \cos \alpha}{4} \right. \\ \left. \times \cos \varphi_1 - (fK_1 + K_2) + \frac{f \sin \alpha - \cos \alpha}{2} \right)$$

$$\delta_{3-2} = \frac{CFR^3}{EJ} \left(\left(K_2 + K_5 - \frac{\cos^2 \alpha}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{\cos \alpha}{2} \right) \frac{\sin \varphi_1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha \cos \varphi_1}{4} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) - K_2 - \frac{\cos \alpha}{2} + f \left(\left(K_1 + K_6 + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \frac{\sin \alpha}{2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sin \varphi_1}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha \cos \varphi_1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) - K_1 + \frac{\sin \alpha}{2} \right) \quad (62)$$

Формулой (62) можно пользоваться при определении радиального перемещения любого сечения при $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ (51). При $\alpha > \alpha_0$ необходимо в выражении (61) перед f поставить знак "минус".

Если $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, то $\delta_{3-2} = \delta_{2-2}$, т.е.

$$\delta_{2-2} = \frac{CFR^3}{EJ} \left(\left(K_2 + K_5 - \frac{\cos^2 \alpha}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{\cos \alpha}{2} \right) \frac{1}{\sin \alpha} - K_2 - \frac{\cos \alpha}{2} + \right.$$

$$\left. + f \left(\left(K_1 + K_6 + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \frac{\sin \alpha}{2} \right) \frac{1}{\sin \alpha} - K_1 + \frac{\sin \alpha}{2} \right) \right) \quad (63)$$

или введя обозначения

$$K_{10} = (K_2 + K_5 - (\pi/2 - \alpha)(\cos^2 \alpha)/4 + (\cos \alpha)/2) / \sin \alpha - K_2 - (\cos \alpha)/2$$

$$K_{11} = (K_1 + K_6 + (\sin \alpha \cos \alpha)(\pi/2 - \alpha)/4 - (\sin \alpha)/2) / \sin \alpha - K_1 + (\sin \alpha)/2$$

получим

$$\delta_{2-2} = CFR^3 (K_{10} + f K_{11}) / (EJ) \quad (64)$$

Рассчитаем значения коэффициентов K_8, K_9, K_{10}, K_{11} и результаты расчетов сведем в таблицу 2.

Т а б л и ц а 2

$2 \alpha^{\circ}$	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}
0	0,07439	0	-0,06817	0
10	0,07295	-0,00645	-0,05734	0,00593
20	0,06886	-0,01266	-0,06453	0,00117
30	0,06249	-0,01840	-0,05989	0,01714
40	0,05421	-0,02351	-0,05354	0,02210
50	0,04439	-0,02782	-0,04563	0,02644
60	0,03342	-0,03122	-0,03635	0,03003
70	0,02167	-0,03363	-0,02593	0,03275
80	0,00951	-0,03499	-0,01461	0,03453
90	-0,00269	-0,03529	-0,00269	0,03529
100	-0,01461	-0,03453	0,00951	0,03499
110	-0,02593	-0,03275	0,02167	0,03363
120	-0,03635	-0,03003	0,03342	0,03122
130	-0,04563	-0,02644	0,04439	0,02782
140	-0,05354	-0,02210	0,05421	0,02351
150	-0,05989	-0,01714	0,06249	0,01840
160	-0,06453	-0,01170	0,06886	0,01266
170	-0,06736	-0,00593	0,07295	0,00645
180	-0,06817	0	0,07439	0

Определим коэффициенты при перемещениях в сечениях 2-2, 3-3 и 4-4 при коэффициенте трения $f = 0,18$ (сталь по стали), при этом будем полагать, что

$$\left. \begin{aligned} K_{2-2} &= C(K_{10} + f K_{11}) \\ K_{3-3} &= C(K_5 + f K_6) \\ K_{4-4} &= C(K_8 + f K_9) \end{aligned} \right\} \text{при } \alpha \leq \alpha_0 \quad (65)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{2-2} &= C(K_{10} - f K_{11}) \\ K_{3-3} &= C(K_5 - f K_6) \\ K_{4-4} &= C(K_8 - f K_9) \end{aligned} \right\} \text{при } \alpha \gg \alpha_0 \quad (66)$$

Результаты расчетов сведем в таблицу 3.

Т а б л и ц а 3

$2\alpha^0$	K_{2-2}	K_{3-3}	K_{4-4}	f действ.
10	-0,24878	0,26452	0,26941	0,18
20	-0,17789	0,17720	0,18975	0,18
30	-0,13128	0,11808	0,13678	0,18
40	-0,09696	0,07591	0,09777	0,18
50	-0,06978	0,04572	0,06723	0,18
60	-0,04719	0,02488	0,04238	0,18
70	-0,02778	0,01170	0,02165	0,18
80	-0,01075	0,00496	0,00412	0,18
90	0,00406	0,00367	-0,01056	0,17174
100	0,00949	0,00625	-0,01666	0,07762
110	0,02239	0,01190	-0,02844	0,16015
120	0,04083	0,02272	-0,04368	0,18
130	0,04744	0,03226	-0,04924	0,17882
140	0,05700	0,04424	-0,05650	0,16066
150	0,06446	0,05564	-0,06184	0,13334
160	0,06988	0,06525	-0,06549	0,09839
170	0,07322	0,07190	-0,06761	0,05486
180	0,07439	0,07439	-0,06817	0

Если значение коэффициента K_{2-2} , K_{3-3} или K_{4-4} отрицательно, имеет место выпучивание кольца и наоборот. Если $f_g = f = 0,18$, значит зажим происходит с проскальзыванием. Значения коэффициентов для углов 10^0-20^0 полученных по формулам (65) имеют большую погрешность (до 10^0), т.к. уже нельзя пренесречь разницей между углами β и β_1 (рис. 1).

Л и т е р а т у р а

1. В о д н е в В.Т. и др. Основные математические формулы. Справочник. Мн.: Высшая школа, 1983. - 269 с.
2. З у б а р е в Ю.М., П р и е м ш е в А.В. Проектирование приспособлений. Методические указания к выполнению лабораторных работ. - Л.: ВТУЗ, 1987. - 30 с.
3. К о р с а к о в В.С. Основы конструирования приспособлений. - М.: Машиностроение, 1983. - 277 с.
4. Станочные приспособления. Справочник. В 2-х т. - Т. I /Под ред. Б.Н. Вардашкина, А.А. Шатилова. - М.: Машиностроение, 1984. - 592 с.

Учебное издание

САКОВИЧ Александр Аверьянович
РОМАНЧУК Сергей Иванович
КОЗЫРЕВИЧ Наталия Александровна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ТОНКОСТЕННЫХ КОЛЕЦ
ПРИ ЗАКРЕПЛЕНИИ В ПРИЗМАХ

Учебно-методическое пособие
по дисциплине "Проектирование технологической
оснастки" для студентов специальности
I2.01 - "Технология машиностроения"

Редактор Т.А.Палилова. Корректор М.П.Антонова

Подписано в печать 14.09.94.

Формат 60x84⁺/16. Бумага тип. № 2. Офсет. печать.

Усл.печ.л. 1,9. Уч.-изд.л. 1,5. Тир. 130. Зэк. 54.

Белорусская государственная политехническая академия.

Отпечатано на ротапринте БГПА. 220027, Минск, пр. Ф.Скорини, 65.