

$$I_3(\lambda) = \int_0^{\pi} (1 - 4\lambda^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - 4\lambda^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} d\varphi = 2E\left(\frac{\pi}{2}, 2\lambda\right) + 8\lambda^2 \left\{ \frac{1 - 4\lambda^2}{12\lambda^2} F\left(\frac{\pi}{2}, 2\lambda\right) + \frac{8\lambda^2 - 1}{12\lambda^2} E\left(\frac{\pi}{2}, 2\lambda\right) - \frac{\lambda}{3} [(1 + 4\lambda^4 - 4\lambda^2)(1 - \lambda^2)]^{1/2} \right\},$$

$$2\lambda \leq 1, \quad \alpha_0 = \arccos \lambda.$$

Итак, нами получена формула

$$\omega_1(\lambda) = \begin{cases} \omega_M(\lambda) & \text{при } \sqrt{2}/2 \leq \lambda \leq 1, \\ \omega_C(\lambda) & \text{при } 1/2 \leq \lambda \leq \sqrt{2}/2, \\ \omega_B(\lambda) & \text{при } 0 \leq \lambda \leq 1/2. \end{cases}$$

Для нахождения корней трансцендентного уравнения $\omega(\lambda) = 0$ необходимо привлечение ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Из-во наука, 1977. 2. Беляков В.А., Кравцова Р.И., Рапопорт М.Р. Таблицы аналитических интегралов. Из-во АН СССР, 1962. 3. Граденштейн И.С., Рыжик И.М. Таблиц интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука, 1971.

УДК 621.839.1

В.А. Акимов

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗНОСА ТРУЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ

Белорусский национальный технический университет

Минск, Беларусь

Данная работа является продолжением выполненной ранее работы о вращающихся дисках.

Один из дисков вращается с некоторой угловой скоростью ω и может совершать поступательное движение относительно поверхности другого. Второй диск свободно вращается вокруг неподвижной оси за счет соприкосновения с первым (рис. 1) с некоторой угловой скоростью ω_1 . Очевидно, что в течение всего процесса движения выполняется условие $\omega \geq \omega_1$. Была найдена угловая скорость ω как функция ω и параметра перекрытия λ :

$$а) \omega_1(\lambda) = \omega_M(\lambda) \quad \text{при } \sqrt{2}/2 \leq \lambda \leq 1,$$

где $\omega_M = \omega[E(\lambda) - I_1(\lambda)]$;

б) $\omega_1(\lambda) = \omega_C(\lambda)$ при $1/2 \leq \lambda \leq \sqrt{2}/2$,

где $\omega_C = \omega[F(\lambda) + I_1(\lambda) - I_2(\lambda)]$;

в) $\omega_1(\lambda) = \omega_B(\lambda)$ при $0 \leq \lambda \leq 1/2$,

где $\omega_B = \omega[F(\lambda) + I_1'(\lambda) - I_3(\lambda)]$,

I_1, I_2, I_3, I_1' — эллиптические и псевдоэллиптические интегралы I и II рода.

$$I_1(\lambda) = \int_0^{\alpha_0} (1 - 4\lambda^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} d\varphi, \quad I_2(\lambda) = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (1 - 4\lambda^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} d\varphi,$$

$$I_3(\lambda) = \int_0^{\pi} (1 - 4\lambda^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} d\varphi,$$

$$I_1'(\lambda) = E(\alpha_0, 2\lambda) + 4\lambda^2 \left\{ \frac{1 - 4\lambda^2}{12\lambda^2} F(\alpha_0, 2\lambda) + \frac{8\lambda^2 - 1}{12\lambda^2} E(\alpha_0, 2\lambda) - \frac{\lambda}{3} [(1 + 4\lambda^4 - 4\lambda^2)(1 - \lambda^2)]^{1/2} \right\}.$$

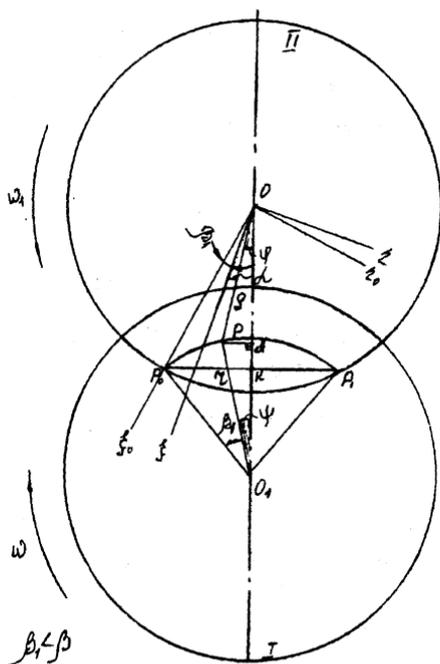


Рис. 1

Целью предлагаемой работы является определение «пути трения» точек диска I, необходимое для определения износа трущихся поверхностей. В предельных случаях перекрывания дисков.

В данном положении (рис. 1) полагаем: $O_1P_0 = r_1$; $a > R$, т.е. проследим за движением произвольно выбранной контактируемой точки P_0 . Ее абсолютная траектория — дуга P_0P_1 .

$I = kQS$ — формула износа,

где $S = nL$ — суммарный «путь трения»; n — число оборотов; k — коэффициент; Q — давление; L — длина дуги точки P в плоскости диска II.

Несложно определить:

$$\begin{cases} OK + KO_1 = a, \\ r^2 - KO_1^2 = R^2 - OK^2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} OK + KO_1 = Q, \\ (OK + KO_1)(OK - KO_1) = R^2 - r^2, \end{cases}$$

$OK > KO_1$

$$\begin{aligned} OK + KO_1 &= a, \\ OK - KO_1 &= \frac{R^2 - r^2}{a} \Rightarrow \begin{cases} OK = \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2a}, \\ KO_1 = \frac{a^2 - R^2 + r^2}{2a}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\angle P_0P_0 = 2 \arccos \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2aR}, \quad \angle P_1O_1P_0 = 2 \arccos \frac{a^2 - R^2 + r^2}{2aR}.$$

Учитывая, что $\omega_1 = const$; $\omega = const$ определяем время одного оборота точки P_0

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega},$$

определяем время прохождения по дуге P_0P_1

$$T = \frac{2}{\omega} \arccos \frac{a^2 - R^2 + r^2}{2aR}.$$

Очевидно, что значения β_1 и β можно представить в виде:

$$\beta = \omega t, \quad \beta_1 = \omega_1 t,$$

где t — текущее значение параметра (время контакта $0 \leq t \leq T$).

Из рис. 1 находим:

$$\psi(t) = \arccos \frac{a^2 - R^2 + r^2}{2aR} - \omega t, \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{r \sin \psi}{a - r \cos \psi},$$

$$\alpha(t) = \arccos \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2aR} - \omega_1 t - \varphi(t), \quad \rho(t) = \sqrt{b^2 - (c^2 \cos \omega t + l^2 \sin \omega t)}, \quad (1)$$

$$\text{где } b^2 = a^2 + r^2; \quad c^2 = a^2 + r^2 - R^2; \quad l^2 = \sqrt{4a^2r^2 - (a^2 + r^2 - R^2)^2}.$$

Переходя к декартовым координатам $\xi O \eta$ в плоскости подвижного диска II получаем

$$\begin{cases} \xi(t) = \rho \cos \alpha; & \xi'(t) = \rho' \cos \alpha - \rho \alpha' \sin \alpha; \\ \eta(t) = \rho \sin \alpha; & \eta'(t) = \rho' \sin \alpha + \rho \alpha' \cos \alpha. \end{cases}$$

Тогда искомая длина "следа" точки в плоскости диска II равна

$$L = \int_0^T \sqrt{\eta'^2(t) + \xi'^2(t)} dt = \int_0^T \sqrt{\rho'^2 + (\rho \alpha')^2} dt. \quad (2)$$

Определим подкоренное выражение в (2) $F = \rho'^2 + (\rho \alpha')^2$. (3)

Предварительно находим $\alpha' = \omega_1 - \varphi_1'$,

где

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \frac{1}{1 + \left(\frac{r \sin \psi}{a - r \cos \psi} \right)^2} \cdot r \frac{\cos \psi \psi'(a - r \cos \psi)}{(a - r \cos \psi)^2} - \frac{r \sin \psi \sin \psi \psi'}{(a - r \cos \psi)^2} = \\ &= - \frac{\omega r (a \cos \psi - r)}{(a - r \cos \psi)^2 + r^2 \sin^2 \psi} = - \frac{\omega r (a \cos \psi - r)}{a^2 + r^2 - 2a \cos \psi} = - \frac{\omega r (a \cos \psi - r)}{\rho^2}; \end{aligned}$$

$\rho(t)$ — задается соотношением (1).

Нетрудно найти $\rho'^2 = \frac{\omega^2 f^2}{4 \rho^2}$;

где $f = c^2 \sin \omega t - l \cos \omega t$ $(\rho \alpha')^2 = \left(\omega_1 \rho + \frac{\omega g}{2 \rho} \right)^2$,

$$g = c^2 \cos \omega t + l^2 \sin \omega t - 2r^2.$$

Тогда выражение (3) примет вид:

$$F = \rho'^2 + (\rho \alpha')^2 + \omega^2 \rho^2 + \omega \omega_1 g + \frac{\omega_1^2}{4 \rho^2} (g^2 + f^2). \quad (4)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{4 \rho^2} (g^2 + f^2) &= \frac{c^4 + l^4 - [4r^2 (c^2 \cos \omega t + l^2 \sin \omega t) + 4r^4] \omega^2}{4 \rho^2} = \\ &= \frac{4r^2 [a^2 + r^2 - (c \cos \omega t + l \sin \omega t)] \omega^2}{4 \rho^2} = r^2 \omega^2, \end{aligned}$$

где $c^4 + l^4 = 4a^2 r^2$, для выражения (4) получим:

$$F = \omega^2 + \omega\omega_1 g + \omega_1^2 \rho^2 = \omega^2 r^2 - \omega\omega_1 r^2 + \omega\omega_1 (c \cos \omega t + l \sin \omega t) + \\ + \omega^2 [a^2 + r^2 - (c \cos \omega t + l \sin \omega t)] = k^2 + m^2 \cos \omega t + n^2 \sin \omega t,$$

где $k^2 = (\omega - \omega_1)^2 r^2 + \omega_1^2 a^2$, $m^2 = \omega_1 (\omega - \omega_1) c^2$, $n^2 = \omega_1 (\omega - \omega_1) l^2$, $\omega \geq \omega_1$.

Таким образом, выражение (2) примет вид

$$L = \int_0^T \sqrt{k^2 + m^2 \cos \omega t + n^2 \sin \omega t} dt. \quad (5)$$

Заметим, что если в качестве проверки положить $\omega = 0$ (т.е. диск 2 стоит), то получим

$$L = \int_0^T \omega r dt = \omega r T = r \angle P_1 O_1 P_0,$$

что показывает верность проведенных выкладок.

Преобразуем в подкоренном выражении (5) члены, содержащие тригонометрические функции.

$$m^2 \cos \omega t + n^2 \sin \omega t = l^2 \cos(\omega t - \xi),$$

$$\text{где } l^2 = \sqrt{m^4 + n^4} = 2\omega_1 (\omega - \omega_1) a r, \quad \xi = \operatorname{arctg} \frac{n^2}{m^2} = \operatorname{arctg} \frac{l^2}{c^2}.$$

Заметим, что из соотношений для среднеарифметического и геометрического следует:

$$k^2 = (\omega - \omega_1)^2 r^2 + \omega_1^2 a^2 > l^2 = 2\omega_1 (\omega - \omega_1) a r, \quad \text{при } (\omega - \omega_1) r \neq \omega_1 a, \quad (6)$$

кроме этого, считаем $l \neq 0$ (причем всегда $l \geq 0$).

Условие (6) для простоты, всегда считаем выполненным.

Таким образом, сделав замену переменной $t = \frac{x + \xi}{\omega_1}$ приведем выражение для L в (5) к виду:

$$L = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega T - \xi} \sqrt{k^2 + l^2 \cos x} dx + \frac{1}{\omega} \int_{-\xi}^0 \sqrt{k^2 + l^2 \cos x} dx = \\ = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega T - \xi} \sqrt{k^2 + l^2 \cos x} dx + \frac{1}{\omega} \int_0^{\xi} \sqrt{k^2 + l^2 \cos x} dx;$$

$\omega \neq 0$.

Значение этого интеграла при $k > l > 0$, $0 \leq x \leq \pi$ согласно [1] имеет вид:

$$L = \frac{2}{\omega} \sqrt{k^2 + l^2} E \left(\frac{\omega T - \xi}{2}, \sqrt{\frac{2l^2}{k^2 + l^2}} \right) + \frac{2}{\omega} \sqrt{k^2 + l^2} E \left(\frac{\xi}{2}, \sqrt{\frac{2l^2}{k^2 + l^2}} \right),$$

где E — эллиптический интеграл 2-го рода, таким образом, задача решена.

На практике решение данной задачи дает возможность оценить износ различных участков деталей, работающих в указанных выше условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, суммы рядов и произведений. М., 1970 г.

УДК 621.8

Г.Н. Алехнович

ВЛИЯНИЕ РЕГУЛИРУЕМОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ СОПРЯГАЕМЫХ ДЕТАЛЕЙ НА ПРОЦЕСС ТРЕНИЯ

*Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь*

Детали машин и механизмов, которые по конструкции и назначению должны обеспечить подвижные сочленения, могут иметь цилиндрические или плоские поверхности сопряжения, изготовленные с высокой степенью точности и имеющие минимальные допустимые зазоры, обеспечивающие плавное перемещение деталей относительно друг друга.

Жесткость, износостойкость, антифрикционные свойства и теплостойкость определяются главным образом качеством их рабочих поверхностей и в первую очередь их микрорельефом. Микрорельеф поверхностей деталей имеет ряд характерных особенностей, к которым следует отнести малую высоту неровностей (R_z от 3,2 до 0,125 мкм). Однако, для трущихся поверхностей чрезмерное уменьшение шероховатости поверхности ухудшает условия трения, вероятность схватывания поверхностей. При трении, в условиях несовершенного смазочного слоя, решающее значение имеет «маслоемкость» поверхностей, определяемая объемом впадин неровностей, с помощью которых на поверхности удерживается смазка.

Анализ методов финишной обработки сопрягаемых поверхностей деталей показывает их ограниченные возможности.

К ним относятся:

- а) образуемый микрорельеф неоднороден в отношении формы и размеров микронеровностей;
- б) шаг и высота микронеровностей взаимосвязаны и, как следствие, малая маслоемкость высокочистых поверхностей;