В заключение отметим, что вид линии характеристик для идеально пластической среды (см. рис. 1) имеет тот же вид, что и линии разрыва скоростей и напряжений для сжимаемой пластической среды при $\beta = 0$ и $a = 1$ в случае неустановившихся движений [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гениев Г. А., Эстрин М. И. Динамика пластической и сыпучей сред. М.: Стройиздат, 1972. — 216 с. 2. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. — 608 с. 3. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980.: — 280 с. 1980. 4. Новацкий В. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. — 307 с.

УДК 539.3

М.Г. Ботогова, Е.Д. Рафеенко

ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Разработка методов численного решения задач теории оболочек достигла в настоящее время такого уровня, при котором трудно назвать задачу, не поддающуюся численному решению. Для осесимметрично нагруженных оболочек вращения — это методы ортогональной прогонки, в случаях не допускающих разделения переменных — это вариационные методы, в том числе интенсивно разрабатываемые в последнее время методы конечных элементов. В связи с этим происходит переоценка роли и значения аналитических методов. В простейших случаях аналитические методы дают точное решение задачи. Во многих других случаях они приводят к удовлетворительному по точности приближенному решению или позволяют существенно упростить численное решение. Ведущее место среди аналитических методов, применяемых для решения задач теории оболочек, занимают методы асимптотического интегрирования, использующие малость относительной толщины оболочки.

С математической точки зрения исследование свободных колебаний оболочек сводится к нахождению собственных чисел и соответствующих им векторов сложных систем дифференциальных уравнений. Проинтегрировать эти уравнения удается лишь в простейших случаях одномерных задач при однородном исходном состоянии, когда уравнения имеют постоянные коэффициенты. В данной же работе рассматривается случай двумерных задач, когда исходное напряженное состояние в оболочке является неоднородным в направлении круговой координаты. В этом случае колебания оболочки сосредоточены в какой-то части ее поверхности. Для оболочек нулевой гауссовой кривизны собственные формы колебаний сосредоточены вдоль образующей (экспериментально установленный факт). Для исследования таких колебаний одним из наиболее эффективных является асимптотический метод Товстика [6,7], сочетающий в себе за счет локализации простоту и точность.

Рассмотрим вязкоупругую некруговую цилиндрическую оболочку длиной L и толщиной h. Введем на срединной поверхности оболочки ортогональную систему координат s, f, связанную с главными линиями кривизны, так чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $R^2(ds^2+d\phi^2)$. Здесь R — характерный размер срединной поверхности, s — продольная координата ($0 \le s \le l = L/R$), ϕ — координата на направляющей $(0 \le \phi < 2\pi)$. При этом радиус кривизны оболочки — $R_2(\phi)=\dfrac{R}{k(\phi)}$. Материал оболочки — линейно-вязкоупругий с мгновенным модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν.

Будем рассматривать случай, когда оболочка испытывает однородную осевую нагрузку $T_1^* = \mu E h T_1$. В качестве исходных уравнений используем полубезмоментные уравнения теории оболочек, записанные в безразмерном виде [1, 2, 4]:

$$\mu^4\Delta^2\left[W-\int_{-\infty}^{t}K(t-\tau,T)W(\tau)d\tau\right]-\mu^2k(\phi)\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}+\mu^2T_1\frac{\partial^2W}{\partial s^2}+\frac{\partial^2W}{\partial t^2}=0$$

$$\mu^4\Delta^2\Phi+k(\phi)\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[W-\int_{-\infty}^{t}K(t-\tau,T)W(\tau)d\tau\right]=0\,, \qquad (1)$$

$$\Delta=\partial^2/\partial s^2+\partial^2/\partial\phi^2\,,\ \mu^4=h^2/\left[12R^2(1-\nu^2)\right],$$

$$W=\mu^2R^{-1}W^*,\quad \Phi=\Phi^*/(\mu^2Eh)\,,\ t=\frac{t^*}{t_c}\,,\ t_c=\frac{R^2\rho}{\mu^2E}\,.$$

Здесь W^*,Φ^* – нормальный прогиб и функция напряжения, ρ — плотность материала, μ — естественный малый параметр, $K(t-\tau)$ — ядро скорости релаксации материала оболочки, t^* — время. На краях оболочки выполняются условия шарнирного опирания:

$$W=\frac{\partial^2W}{\partial s^2}=\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}=0 \qquad \text{при } s=0,\ l\,. \qquad (2)$$

Представим решение уравнений (1) в виде:

$$W=w(s,\phi,\mu)\exp(i\Omega t),\qquad \Phi=f(s,\phi,\mu)\exp(i\Omega t)\,,\qquad \Omega=\omega+i\alpha\,, \qquad (3)$$

где $\omega>0$ — искомая частота, $\alpha>0$ — число, характеризующее скорость затухания колебаний.

Подставляя (3) в (1) и замечая, что

$\int K(t-\tau)e^{i\Omega\tau}d\tau = e^{i\Omega t}C$, где $C = \int\limits_0 K(\theta)e^{i\Omega\theta}d\theta$, получим следующую систему уравнений:

$$(1-C)\mu^4\Delta^2 w - \mu^2 k(\phi)\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \mu^2 T_1\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \Omega^2 w = 0\ , \tag{4}$$

$$\mu^4\Delta^2 f + k(\phi)(1-C)\frac{\partial^2}{\partial s^2}w = 0\ .$$

Начальные условия (2) позволяют искать решения w, f следующим образом:

$$w = w_m(\phi)\sin(\mu^{-1}p_m s),\qquad f = f_m(\phi)\sin(\mu^{-1}p_m s)\ , \tag{5}$$

где $p_m = \mu m\pi R/L$, m — натуральное число. Тогда задача (4) перепишется в виде:

$$\begin{gathered}(1-C)\mu^4\frac{\partial^4}{\partial\phi^4}w_m - 2\mu^2 k(\phi)(1-C)p_m^2\frac{\partial^2 w_m}{\partial\phi^2} + p_m^4(1-C)w_m + \\ + p_m^2 k(\phi)f_m - p_m^2 T_1 w_m - \Omega^2 w_m = 0\end{gathered} \tag{6}$$

$$\mu^4\frac{\partial^4}{\partial\phi^4}f_m - 2\mu^2 p_m^2\frac{\partial^2 f_m}{\partial\phi^2} + p_m^4 f_m - p_m^2 k(\phi)(1-C)w_m = 0$$

В дальнейшем индекс m опускается.

Принимая во внимания зависимость радиуса кривизны оболочки от f, мы предполагаем, что оболочка имеет «наиболее слабую» образующую $\phi=\phi_0$, вблизи которой локализуются собственные формы колебаний [3,4,6,7]. Решение системы уравнений (6), затухающее при удалении от "наиболее слабой образующей" может быть представлено в виде ВКБ-функций [3, 6,7]:

$$w(\phi,\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mu^{k/2}w_k(\xi)\exp\left\{i\left[\mu^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}b\xi^2\right]\right\} \tag{7}$$

$$f(\phi,\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mu^{k/2}f_k(\xi)\exp\left\{i\left[\mu^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}b\xi^2\right]\right\},$$

где $\xi=\mu^{-1/2}(\phi-\phi_0)$, w_k, f_k - полиномы по x, q — вещественное число, определяющее изменяемость в направлении f, параметр b характеризует скорость уменьшения глубины вмятины при удалении от «наиболее слабой» образующей.

Искомую комплексную частоту W и функцию $k(\phi)$ представим в виде рядов:

$$\Omega = \Omega_0 + \mu\Omega_1 + \mu^2\Omega_2 + \ldots\ , \tag{8}$$

$$k(\phi) = k(\phi_0) + \mu^{1/2}k'(\phi_0)\xi + \frac{1}{2}\mu k''(\phi_0)\xi^2 + \ldots$$

Учитывая (7), получаем

$$C = C_0 + \mu\Omega_1 C_1\text{, где } C_0 = \int_0^{+\infty} K(\theta)e^{-i\Omega_0\theta}d\theta\text{, } C_1 = -i\int_0^{+\infty} \theta K(\theta)e^{-i\Omega_0\theta}d\theta\text{.}$$

Подставив (7), (8) в (6), предварительно исключив функцию f, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mu^{1/2}$, получим последовательность уравнений для определения $w_k(\xi)$, которая может быть записана в виде

$$\sum_{j=0}^{n} L_j w_{n-j} = 0, \quad n=0,1,2,... \tag{9}$$

где

$$L_0 y \equiv p^2 k^2(\phi_0)(1 - C_0)(z + z^{-1})y - T_1 p^2 y - \Omega_0^{\ 2} y\text{,}$$

а L_j $(\mathrm{j} \geq 1)$ — операторы, которые выражаются через L_0 и ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Из условия существования ненулевого решения уравнения (9) при $n = 0$ следует два соотношения :

$$\frac{2\alpha_0\omega_0}{A_0} = (z + z^{-1})p^2 k(\phi_0), \tag{10}$$

$$\frac{\omega_0^{\ 2} - \alpha_0^{\ 2}}{1 - B_0} + \frac{T_1 p^2}{1 - B_0} = \frac{2\alpha_0\omega_0}{A_0}, \tag{11}$$

где $z = \dfrac{\left(q^2 + p^2\right)^2}{p^2 k\left(\phi_0\right)}$, $A_0 = -\operatorname{Im} C_0$, $B_0 = \operatorname{Re} C_0$. В силу (9), (10) ω_0 и α_0— функции, зависящие от ϕ_0 и q.

Рассмотрим уравнение (9) при $n = 1$. Учитывая, что

$w(\xi) = A_m\xi^m + A_{m-1}\xi^{m-1} + ... + A_0$ — полином по x и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем, что $\dfrac{\partial L_0}{\partial \phi} = 0$ и $\dfrac{\partial L_0}{\partial q} = 0$, т.е. «наиболее слабая» образующая определяется из условия

$$k'(\phi_0^0) = 0; \tag{12}$$

а $q^0 = 0 \quad (p > \sqrt{k(\phi_0^0)})$

$$\text{или же } q = p(\sqrt{k(\phi_0^0)} - p) \quad (p < \sqrt{k(\phi_0^0)}) \tag{13}$$

Положим для удобства $k\left(\phi_0^0\right) = 1$.

Из формулы (11) при $B_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$, получим выражение, определяющее наименьшую собственную частоту колебаний упругой оболочки с учетом однородного осевого усилия [4].

Таким образом, минимальная частота и соответствующий ей параметр а, который характеризует скорость затухания колебаний достигается либо при $z=1$ ($q^{02}=p(1-p)$ $p<1$) и определяются из уравнений

$$\text{А)}\ \frac{2\alpha_0\omega_0}{A_0}=2p^2 \qquad \frac{\omega_0^{\ 2}-\alpha_0^{\ 2}}{1-B_0}+\frac{T_1p^2}{1-B_0}=2p^2 \tag{14}$$

либо при $q^0=0$ ($p>1$) и определяются из уравнений :

$$\text{Б)}\ \frac{2\alpha_0\omega_0}{A_0}=p^4+1 \qquad \frac{\omega_0^{\ 2}-\alpha_0^{\ 2}}{1-B_0}+\frac{T_1p^2}{1-B_0}=p^4+1 \tag{15}$$

Каждый из этих случаев имеет место при определенных соотношениях между параметрами оболочки.

Из условия существования решения уравнения (9) виде полинома

$$w_0(\xi)=A_m\xi^m+A_{m-1}\xi^{m-1}+\ldots+A_0$$

находим число

$$b=i\left[\mathrm{Re}\frac{\partial^2L}{\partial\phi_0^2}/\mathrm{Re}\frac{\partial^2L}{\partial q^2}\right]^{1/2}\Bigg|_{\substack{q=q^0\\ \phi=\phi_0^0}},$$

а также поправку $\mu\Omega_1$ к комплексной частоте колебаний

$$\Omega_{1n}=\frac{i(n+1/2)b\dfrac{\partial^2L_0}{\partial q^2}}{N}\Bigg|_{\substack{q=q^0\\ \phi_0=\phi_0^0}},\ n \text{ — целое число.}$$

В случае

$$\text{А)}\ p<1\,,\ b^2=\frac{-k''(\phi_0^0)p^2}{16q^{02}}.$$

Поскольку $\mathrm{Im}\,b>0$, то необходимо, чтобы $k''(\phi_0^0)>0$. Соответствующие поправки к частоте и определяются по формулам

$$\omega_1=\mathrm{Re}\left[\frac{2p\sqrt{p-p^2}(1-C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2}}{\Omega_0+C_1(p^4-p^3+p^2)}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right], \tag{16}$$

$$\alpha_1=\mathrm{Im}\left[\frac{2p\sqrt{p-p^2}(1-C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2}}{\Omega_0+C_1(p^4-p^3+p^2)}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right].$$

В случае Б) $p > 1$, $b^2 = \dfrac{-k''(\phi_0^0)p^2}{2(p^4 - 1)}$,

$$\omega_1 = \mathrm{Re}\left[\frac{\sqrt{2}(1 - C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2}\sqrt{p^4 - 1}}{p(2\Omega_0 + C_1(p^4 + 1))}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right], \tag{17}$$

$$\alpha_1 = \mathrm{Im}\left[\frac{\sqrt{2}(1 - C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2}\sqrt{p^4 - 1}}{p(2\Omega_0 + C_1(p^4 + 1))}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right]$$

При значениях p близких к единице, построенные ВКБ-решения становятся непригодными, поскольку при $\mathrm{p} = 1$ $b \to \infty$ и слагаемое $\mu^2\Omega_2$, также обращается в бесконечность [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: ГТТИ, 1956. — 573 с. 2. Матяш В. И. Колебания изотопных упруго-вязких оболочек // Механика полимеров. — 1971. — № 1. — С. 157–163. 3. Михасев Г.И. О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек. // Прикладная механика. — 1992. — Т. 28, № 1. — С. 50–55. 4. Михасев Г.И. К исследованию локальных колебаний и динамической неустойчивости цилиндрических оболочек // Вестник Витебского гос. ун-та. — 1997. — № 1(3). — С. 61–66. 5. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. — 416 с. 6. Товстик П. Е. Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек. // Прикл. математ. и механика. — 1983. — Т. 47, № 5. С. 815–822. 7. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. — М.: Наука, 1995. — 320 с.

УДК 539.3

Ю.В. Василевич, С.В. Акимова

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ В ПЛАСТИНКЕ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Пусть внутри отверстия, имеющего форму квадрата с закрепленными углами, впаяны две жесткие дуговые накладки (рис. 1).