В случае Б) $p > 1$, $b^2 = \dfrac{-k''(\phi_0^0)p^2}{2(p^4-1)}$,

$$\omega_1 = \mathrm{Re}\left[\frac{\sqrt{2}(1-C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2}\sqrt{p^4-1}}{p(2\Omega_0 + C_1(p^4+1))}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right], \tag{17}$$

$$\alpha_1 = \mathrm{Im}\left[\frac{\sqrt{2}(1-C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2}\sqrt{p^4-1}}{p(2\Omega_0 + C_1(p^4+1))}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right]$$

При значениях $p$ близких к единице, построенные ВКБ-решения становятся непригодными, поскольку при $p = 1$ $b \to \infty$ и слагаемое $\mu^2\Omega_2$, также обращается в бесконечность [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: ГТТИ, 1956. — 573 с. 2. Матяш В. И. Колебания изотопных упруго-вязких оболочек // Механика полимеров. — 1971. — № 1. — С. 157–163. 3. Михасев Г.И. О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек. // Прикладная механика. — 1992. — Т. 28, № 1. — С. 50–55. 4. Михасев Г.И. К исследованию локальных колебаний и динамической неустойчивости цилиндрических оболочек // Вестник Витебского гос. ун-та. — 1997. — № 1(3). — С. 61–66. 5. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. — 416 с. 6. Товстик П. Е. Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек. // Прикл. математ. и механика. — 1983. — Т. 47, № 5. С. 815–822. 7. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. — М.: Наука, 1995. — 320 с.

*УДК 539.3*

**Ю.В. Василевич, С.В. Акимова**

# ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ В ПЛАСТИНКЕ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ ОТВЕРСТИЕМ

*Белорусский национальный технический университет*
*Минск, Беларусь*

Пусть внутри отверстия, имеющего форму квадрата с закрепленными углами, впаяны две жесткие дуговые накладки (рис. 1).

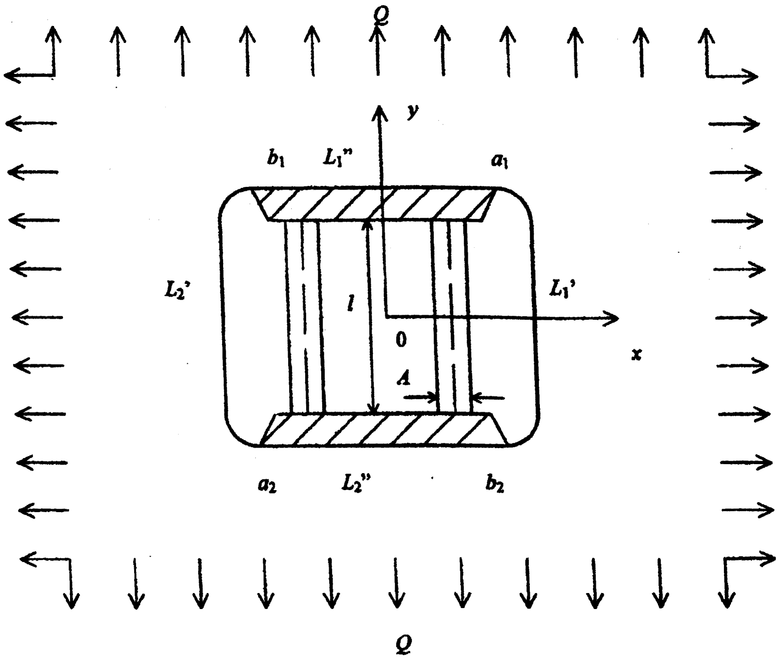


*Рис. 1.*

Между ними установлены с натягом $\delta$ два одинаковых стержня, каждый из которых имеет длину $l$ и сопротивление растяжению $EA$. Стержни и накладки расположены симметрично относительно главных направлений упругости. Направление осей координат комплексной плоскости $z = x + iy$ и нагрузки на бесконечности такие, как указано на рисунке. Требуется определить напряженное состояние в пластинке и суммарное давление на стержни, полагая, что к стержням применима гипотеза плоских сечений, на контуре $L$ задана постоянная температура $T_0$; участки контура $L_1'$, $L_2'$ свободны от воздействия внешних усилий. Будем считать, что стержни и накладки также нагреваются до температуры $T_0$.

Введем в рассмотрение функцию $$z = \omega(\xi) = R(\xi + n/\xi^3), \qquad (1)$$ конформно отображающую внешность контура $L$ на область $|\xi|>1$ комплексной плоскости $\xi = \rho e^{i\theta}$, где $n = -1/9$, $R = a/2(1+n) = 9a/16$.

Согласно введенному преобразованию точкам $\xi = \sigma$ на контуре области (единичной окружности) $\gamma$ $|\xi|>1$ соответствуют точки $t = \omega_0(\sigma)$, где $\omega_0(\sigma) = x + iy = R(\sigma + n/\sigma^3)$.

Температурное поле вне квадратного отверстия, т.е. в области $D^-$, определим по формуле [1]

$$T = 2\operatorname{Re}\Psi_0(z), \tag{2}$$

где $\Psi_0(z)$ — аналитическая функция. С учетом (1)

$$T = 2\operatorname{Re}\Psi_*(\xi), \quad \xi = \rho e^{i\theta}, \tag{3}$$

где $\Psi_*(\xi) = \Psi[\omega_0(\xi)]$ — аналитическая функция в области $|\xi|>1$.

Так как $\Psi_*(\xi) = 0{,}5[F_0(\xi) + \varepsilon\overline{F}_0(1/\xi)]$, то $T = \operatorname{Re}[F_0(\xi) + \varepsilon\overline{F}_0(1/\xi)]$, (4)
где $F_0(\xi)$ — аналитическая функция в областях $D^-(|\xi|>1)$ и $D^+(|\xi|<1)$; $\varepsilon = \pm 1$; $F_0(\xi) + \varepsilon F_0(1/\overline{\xi}) = T + i\eta$; $T$, $\eta$ — гармонические функции переменных $\rho$ и $\theta$ в $D^-$.

Определим температуру $T$ в области $D^-$. Полагая $\varepsilon = -1$, $\eta = 0$, граничное условие для $F_0(\xi)$ запишем в виде

$$F_0^-(\sigma) - F_0^+(\sigma) = T_0 \text{ на } \gamma,$$

где $F_0^\pm(\sigma)$ — предельные значения $F_0(\xi)$ на контуре $\gamma$ со стороны областей $D^+$ и $D^-$. Следовательно, $F_0(\xi) = 0$ для $|\xi|<1$, $F_0(\xi) = T_0$ для $|\xi|>1$. На основании (4) имеем $T = T_0$ во всей области $D^-$.

В результате изменения температуры перемещение точек (x,y) накладок (рассмотрим, например, верхнюю накладку) определим соотношениями

$$u = (\alpha_1 - \alpha_0)T_0 x, \quad v = (\alpha_1 - \alpha_0)T_0(y - 0{,}5l).$$

Тогда перемещение точек дуги $L_1''(\gamma_1'')$

$$u = 0{,}5(\alpha_1 - \alpha_0)T_0 R[\sigma + \overline{\sigma} + n(\overline{\sigma}^3 + \sigma^3)],$$

$$v = (\alpha_1 - \alpha_0)T_0\left\{\frac{R}{2i}[\sigma - \overline{\sigma} + n(\overline{\sigma}^3 - \sigma^3)] - \frac{l}{2}\right\}.$$

С учетом температурных перемещений точек стержней, результирующее перемещение точек дуги $L_1''(\gamma_1'')$ запишем в форме

$$u = 0{,}5(\alpha_1 - \alpha_0)T_0 R(\cos\theta + n\cos 3\theta),$$

$$v = 0{,}5\left\{(\alpha_1 - \alpha_0)T_0[R(\sin\theta - n\sin 3\theta) - l] + (\alpha_2 - \alpha_0)T_0 l + \frac{P_0^T l}{EA}\right\},$$

где $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ — температурные коэффициенты линейного расширения пластинки, накладок и стержней; $P_0^T$ — давление в стержнях, возникающее от температуры; $E$ — модуль Юнга.

Воспользовавшись аналогичным методом решения задачи, когда в $D^-$ задана на бесконечности только силовая нагрузка [2], запишем граничные условия

$$\Phi^-(\sigma)\omega'(\sigma) - \Phi^+(\sigma)\omega'(\sigma) = 0 \text{ на } \gamma_1', \tag{5}$$

$$\chi\Phi^-(\sigma)\omega'(\sigma) + \Phi^+(\sigma)\omega'(\sigma) = RT_0\left[2\mu(\alpha_1 - \alpha_0) - \frac{\beta_1}{2}\right]\left(1 - \frac{3n}{\sigma^4}\right) \text{ на } \gamma_1'',$$

$\Phi^{\pm}$ — предельные значения функции $\Phi$ на контуре $\gamma(|\xi|=|\sigma|=1)$; $\gamma_1'$, $\gamma_1''$ — и на $\gamma$, в которые переходят $L_1'$ и $L_1''$ при конформном отображении; $\beta_1 = 2E\alpha_0$ и $\frac{2E\alpha_0}{1+\nu}$), $\chi = 3-4\nu$ (или $\frac{3-4\nu}{1+\nu}$); $\mu$ — модуль сдвига; двойное обозначение $\chi$ относятся соответственно к случаям плоской деформации и плоского напряженного состояния.

Учитывая особенности функции $\Phi(\xi)\omega'(\xi)$ в нуле и на бесконечности, решение левой задачи (5) запишем в виде

$$\Phi(\xi)\omega'(\xi) = \frac{1}{1+\chi}\left(m_* - \frac{n_*}{\xi^4}\right) + X(\xi)R\left(\frac{D_4^T}{\xi^4} + \frac{D_2^T}{\xi^2} + c_0^T\xi^2 + c_2^T\right),$$

е $m_* = RT_0[2\mu(\alpha_1-\alpha_0)-0{,}5\beta]$, $n_* = 3nm_*$, $c_2^T = m_*/R(1+\chi)$,

$D_4^T = n_* e^{-2\beta\omega}/R(1+\chi)$,

$$D_2^T = e^{-2\beta\omega}\left[c_2 n + \frac{1-\cos\theta}{R^2(1+\chi)}(Rm_*n+n_*) + \frac{2\beta\sin\omega}{R^2(1+\chi)}(Rm_*n-n_*)\right];$$

$\omega$ — центральный угол, соответствующий дуге $\gamma_1''(L_1'')$;

$X(\xi) = \prod_{k=1}^{2}(\xi-\alpha_k)^{\lambda}(\xi-\beta_k)^{\bar\lambda}$, $\lambda = -0{,}5+i\beta$, $\bar\lambda = -0{,}5-i\beta$, $\beta = \ln\chi/2\pi$; $\alpha_k$, $\beta_k$ — точки на $\gamma$, соответствующие точкам $a_k$, $b_k$ на $L$.

Требуя непрерывность смещений на контуре $L$ и полагая, что главный вектор усилий $2P_0^T$, действующий на накладки, вызывает их поступательное перемещение $v_1$, имеем систему уравнений для определения $P_0^T$, $c_0^T$

$$(1+\chi)\int_{\gamma_1'}\Phi^-(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma = 4\mu i v_1,$$

$$(1+\chi)\int_{\gamma_1''}\Phi^-(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma = -2P_0^T - 2\left(m_*\sin\omega/2 + \frac{n_*}{3}\sin\frac{3}{2}\omega\right), \qquad (6)$$

$$2v_1 = \delta + \frac{P_0^T l}{EA} + (\alpha_2-\alpha_0)T_0 l.$$

Последнее выражение в (6) есть закон Гука для стержней. Из (6) находим $P_0^T$

$$P_0^T = \left(A_1 - \mu\delta - (\alpha_2-\alpha_0)T_0 l + m_*\cos\frac{\omega}{2} - \frac{n_*}{3}\cos\frac{3}{2}\omega\right)\Big/\left(\sqrt{\chi}B_1 + \frac{\mu l}{EA}\right),$$

где $B_1 = (I_2 D_2^{T_*} + I_0)/(J_2 D_2^{T_*} + J_0)$,

$$A_1 = \frac{(1+\chi)R}{2e^{-2\beta\omega}}\left[D_4^T I_4 + D_2^{T_{**}} I_2 + c_0^T I_{-2} - B_1(D_4^T J_4 + D_2^T J_2 + c_0^T J_{-2})\right],\quad D_2^{T_*} = ne^{-\beta\omega},$$

$$D_2^{T_{**}} = \frac{e^{-\beta\omega}}{R^2(1+\chi)}\left[(1-\cos\omega)(Rm_*n+n_*) + 2\beta\sin\omega(Rm_*n-n_*)\right],\quad I_k = \int_0^{\alpha}\frac{\cos(A+k\theta)d\theta}{R(\theta)},$$

$$J_k = \int\limits_{\alpha}^{\pi/2} \frac{\cos(A + k\theta)d\theta}{R(\theta)},\ k = 0, \pm 2, 4;\ R(\theta) = \sqrt{|\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha)|},$$

$$A = \beta \ln \left|\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}\right|,\ \alpha = \frac{\pi-\omega}{2}.$$

Осевое давление $P_0$, возникающее в стойках от приложенной нагрузки на бесконечности пластинки, определим по формуле

$$P_0 = A \Big/ (\sqrt{\chi} B + \mu l / EA),$$

где $A = \dfrac{(1+\chi)R}{2e^{-2\beta\omega}}\left[D_4 I_4 + D_2'' I_2 + c_0 I_{-2} - B(D_4 J_4 + D_2'' J_2 + c_0 J_{-2})\right]$, $B = \dfrac{I_2 D_2' + I_0}{J_2 D_2' + J_0}$,

$$c_0 = \Gamma,\ D_4 = 3n\Gamma e^{-2\beta\omega},\ D_2' = ne^{-2\beta\omega},\ D_2'' = e^{-2\beta\omega}[\Gamma' + 2n\Gamma(1 - \cos\omega - 4\beta\sin\omega)],$$

$$\Gamma = 0,25(\sigma_y^\infty + \sigma_x^\infty),\ \Gamma' = 0,5(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + 2i\tau_{xy}^\infty).$$

Суммарное давление $P_c$ на каждую стойку, запишем в виде

$$P_c = P_0^T + P_0.$$

Для определения компонент напряжений на контуре отверстия, воспользуемся выражениями [1]

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 4\operatorname{Re}\Phi^-(\sigma), \sigma_\rho + i\tau_{\rho\theta} = (1+\chi)\Phi^-(\sigma) - \frac{\sigma^4 m_*}{R(\sigma^4 - 3n)} \text{ на } \gamma_1''(L_1''),$$

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 4\operatorname{Re}\Phi^-(\sigma), \sigma_\rho + i\tau_{\rho\theta} = 0 \text{ на } \gamma_1'(L_1'),$$

где
$$\Phi^-(\sigma) = \frac{\sigma^4 m_* - n_*}{R(1+\chi)(\sigma^4 - 3n)} + \frac{X^-(\sigma)\sigma^4}{\sigma^4 - 3n}[(D_4^T + D_4)\bar{\sigma}^4 + (D_2^T + D_2)\bar{\sigma}^2 +$$
$$+ (c_0^T + c_0)\sigma^2 + c_2^T + c_2],$$

$$X^-(\sigma) = \frac{e^{\beta\omega - i(A+\theta)}}{2R(\theta)} \text{ на } \gamma_1'(L_1'),\ X^-(\sigma) = \frac{ie^{\beta(\omega-\pi) - i(A+\theta)}}{2R(\theta)} \text{ на } \gamma_1''(L_1'').$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. Мн.: изв-во БГУ, 1972. 200 с.
2. Прусов И.А. К вопросу о давлении на стержни, установленные внутри отверстия равномерно растянутой изотропной пластинки. Исследования горного давления. Горгостехиздат. М., 1960.