На седьмой частоте 31,51915 Гц заднее стекло совершает колебания с двумя центрами. На восьмой собственной частоте 32,06716 Гц крыша совершает колебания с четырьмя центрами и заднее стекло с двумя. На девятой частоте 37,78739 Гц крыша совершает колебания с тремя центрами. На десятой собственной частоте 39,26814 Гц переднее стекло совершает колебания с двумя центрами.

На основе проделанных расчетов могут быть выработаны рекомендации по улучшению виброакустических свойств кабины. В частности можно рекомендовать изменить конфигурацию крыши, то есть вместо плоской использовать поверхность с радиусом кривизны порядка 5 м и усиление ее ребрами жесткости. Аналогичные рекомендации можно дать и для изменения формы переднего и заднего стекол. Любые изменения касающиеся геометрии и свойств материалов могут быть легко внесены в существующую расчетную модель, после чего проводится повторный расчет и на основании полученных результатов делаются дальнейшие шаги по оптимальному проектированию. Для получения более точных результатов можно учесть характер контакта между элементами конструкции (то есть, например наличие резиновых прокладок между стеклами и каркасом, там где они есть), но это может привести к резкому увеличению требований к ресурсам вычислительной техники и, как следствие времени расчета, что не всегда оправдано.

УДК 539.3

И.А. Миклашевич

О СВЯЗИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ВЕРШИНЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЫ С БИФУРКАЦИЕЙ ТРАЕКТОРИИ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Рассмотрим динамическое распространение трещины. При росте трещины возникают многочисленные эффекты, связанные с диссипацией энергии движущейся трещиной. Так как критерий разрушения может быть связан с количеством энергии аккумулированной в объеме (разрушение наступает в случае диссипации в объеме энергии, которая превышает энергию связи данного объема), то диссипация в значительной мере детерминирует разрушение. При динамическом разрушении трещина является излучателем волн, которые распространяются от вершины трещины как от источника. При этом энергия упругой деформации объема материала в области роста трещины трансформируется в энергию излучаемых волн. Рассмотрим энергию, переносимую такими волнами.

Известно, что волновое уравнение для движущегося вдоль оси X источника имеет вид [1]:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x^*} = -4\pi Q, \tag{1}$$

где потенциал $\varphi = \psi\exp(i\omega t)$ есть гармоническая функция времени, Q — сила объемного источника.

Уравнение (1) записано в сжатой системе координат:

$$x^* = \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}},\ y = y,\ z = z.$$

где $\beta = v/c$, v — скорость источника, c — скорость возмущения в среде.

В случае источника, движущегося по произвольной траектории

$$x = X(t),\ y = Y(t),\ z = z(t),$$

можно ввести эйлерову систему координат,

$$\xi = x - X(t),\qquad \eta = y - Y(t),\qquad \zeta = z - Z(t).\ \ \tau = t$$

в которой скорость потока среды имеет вид

$$V_{0x} = -\frac{dX}{dt} = -v_x,\ V_{0y} = -\frac{dY}{dt} = -v_y,\ V_{0z} = -\frac{dZ}{dt} = -v_z.$$

Запишем волновое уравнение в эйлеровой системе координат. С учетом связи полных и конвективных производных оно имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}&\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} + \frac{2}{c^2}(\mathbf{v},\nabla)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - \\ &-\frac{1}{c^2}(\mathbf{v},\nabla)(\mathbf{v},\nabla)\varphi + \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt},\nabla\right)\varphi = 0,\end{aligned} \tag{2}$$

где $\mathbf{v} = -\mathbf{V}$ есть скорость источника.

Это уравнение может рассматриваться как уравнение возмущения в среде, движущейся со скоростью $\mathbf{V}_0(t)$, зависящей от времени, но не зависящей от координат. В случае динамического разрушения источником такого возмущения является растущая трещина. В вершине трещины, сответственно классическим решениям теории упругости, напряжения имеют особенность. Эта и есть точечный источник Q, локализованный в вершине трещины. Поскольку реальное распространение трещины есть последовательность процессов: разрыв связи — накопление энергии — новый разрыв, этот точечный источник имеет периодический характер. Тогда сила Q может быть представлена как

$$Q(x,y,z,t)=F(t)\delta(x-X(t))\delta(y-Y(t))\delta(z-Z(t)). \qquad (3)$$

Величина $F(t)$ дает зависимость силы от времени в системе, связанной с источником, а дельта-функции обеспечивают точечность.

Решение уравнения (2) с учетом представления (3) имеет вид:

$$\varphi(x,y,z,t)=\frac{F(t-R/c)}{R^{*}\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (4)$$

где R — единственный положительный корень уравнения:

$$f(R)=\left[x-X(t-R/c)\right]^2+\left[y-Y(t-R/c)\right]^2+\left[z-Z(t-R/c)\right]^2-R=0. \qquad (5)$$

Величина R имеет ясный физический смысл — это расстояние, возмущение от которого в данный момент достигает данной точки (эффективное расстояние). Величина R^{*} имеет смысл расстояния в эйлеровой поджатой системе координат от точки наблюдения P до точки волновой поверхности

$$R^{*}=\sqrt{\xi^{*2}+\eta^2+\zeta^2},\ \xi^{*}=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Найденное решение (5) представляет поле нулевого источника (т.е. такого источника, который имеет разложение по сферическим гармоникам только нулевого порядка). Комбинируя такие источники с надлежащими фазами и размещенными соответственным образом можно представить любое волновое поле. С учетом выражения для потенциала амплитуда волны выражается как:

$$\psi(x,y,z,t)=\frac{F(t-R/c)}{R^{*}\sqrt{1-\beta^2}}e^{-i\omega t}. \qquad (6)$$

Рассмотрим энергию, переносимую волной. В общем случае средняя за период T_0 мощность, отдаваемая в среду через поверхность Ω есть [2, 3]:

$$\langle E\rangle=-\frac{\omega}{2}\iint_{\Omega}(\mathbf{uq})dxdy, \qquad (7)$$

где $\mathbf{u}$ - вектор перемещения среды, $Q=\mathbf{q}\exp(-i\omega t)$ — гармоническая нагрузка, круглые скобки означают скалярное произведение.

Выражение (7) записано для большей ясности в нормированном безразмерном виде. Для быстрых процессов энергией, передаваемой вовне поверхности Ω за счет кинетических процессов (например, диффузией, теплообменом) можно пренебречь. В случае не сверхсильного нагружения генерация вторичных волн из объема также представляется маловероятной. Тогда максимальное количество энергии, которое может быть аккумулировано в объеме, составляет:

$$E=\int_0^T \frac{\langle E\rangle}{T_0}dt, \tag{8}$$

где $T=l/v$ — время движения трещины по траектории, l — расстояние от начала движения трещины до данной точки (длина траектории). Величина E есть полная энергия, пришедшая в объем с волнами. Строго говоря, в выражении (8) необходимо рассматривать сумму по всем типам волн, существующим в теле. Для малых расстояний в первом приближении траекторию трещины можно считать прямолинейной, и ось X совместить с направлением роста трещины. Для деформаций объема можно полагать перемещения среды совпадающими с амплитудой пришедшей волны, а частоту источника — с частотой волны. Тогда для амплитуды (6) имеем:

$$\psi=\frac{\mathbf{q}(t-R/c)}{R^*\sqrt{1-\beta^2}}e^{-i\omega t}e^{-i\omega t}=\frac{\mathbf{q}(t-R/c)}{R^*\sqrt{1-\beta^2}}e^{-2i\omega t}. \tag{9}$$

Учтем, что среднее значение гармонической функции за все время распространения имеет вид $\langle \sin^2\varphi\rangle=(1/2)N$, где $N=l\omega/v$ и, переходя к размерным обозначениям [3], получаем:

$$E=\frac{4\rho l\omega^3}{T_0}\int_0^T \frac{\mathbf{q}^2(t-R/c)}{\sqrt{(x-vt)^2+y^2(1-\beta^2)+z^2(1-\beta^2)}}\frac{1}{v}dt. \tag{10}$$

Поскольку периодичность источника была учтена в выражении (9), амплитуда гармонической нагрузки может быть принята постоянной $\mathbf{q}=\mathbf{const}\neq\mathbf{q}(t)$. Это отвечает неизменности напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины при ее движении. Иными словами, флуктуации напряжений не учитываются. Скорость роста также может считаться постоянной — как правило, она определяется внешними нагрузками. Тогда формула (10) приобретает вид:

$$E=\frac{4\rho l\omega^3}{T_0 v}\mathbf{q}^2\int_0^T \frac{dt}{\sqrt{(x-vt)^2+y^2(1-\beta^2)+z^2(1-\beta^2)}}. \tag{11}$$

Направления предпочтительного распространения трещины будут совпадать с направлением главных осей изоэнергетической поверхности. В случае движения трещины со скоростью звука $\beta=1$, уравнение (5) имеет два совпадающих корня, поскольку $df/dR=0$, функция имеет экстремум. С физической точки зрения, существование двух эффективных расстояний свидетельствует о возникновении бифуркации. Для звуковой скорости источника выражение (11) имеет вид:

$$E=\frac{4\rho l\omega^3}{T_0 v}\mathbf{q}^2\int_0^T \frac{dt}{\sqrt{(x-vt)^2}}=-\frac{4\rho l\omega^3}{T_0 v^2}\mathbf{q}^2\int_0^T \frac{d(x-vt)}{(x-vt)}=.\frac{4\rho l\omega^3}{T_0 v^2}\mathbf{q}^2\ln\frac{x}{x-vT},$$

а поверхности равной фазы представляют вырожденный вдоль оси Y, Z эллипс. Вырождение фазовой поверхности соответствует возникновению бифуркации траектории трещины. При сверхзвуковом движении возможно рассматривать два источника возбуждения колебаний в данной точке, лежащих в пределах конуса Маха [1].

В связи с тем, что в реальных веществах одновременно генерируются и распространяются несколько типов волн (например, продольные и поперечные), возможны сложные режимы возбуждения, когда для одних волн реализуется сверхзвуковой режим, а для вторых — дозвуковой. Соответственно, выражения для энергии должны иметь более сложный аддитивный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. — М.: Наука, 1981. — 208с. 2. Бабешко В.А., Глушаков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. — М.: Наука, 1989. — 344 с. 3. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах — М.: Наука, 1965. — 388 с.

УДК 531.1:621.01]:681.3 (075.8)

В.М. Носов, С.С.Чубанов

К ВОПРОСУ О КОМПЛЕКСНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НА ПК АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ (НА ПРИМЕРЕ СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ)

Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь

Покажем комплексное использование на ПК аналитических и численных методов в курсе теоретической механики на типовом примере сложного движения точки (К-10 [1, с. 137-143]). Исходная расчетная схема приведена на рис. 1а.

Для символьного решения на ПК составление уравнений движения является дополнительной работой, так как без ПК решение заданий на сложное движение точки проводится другим способом с использованием кинематической теоремы Кориолиса.

Исходные данные к представленной на рис. 3.4 схеме типового примера имеют вид [1, с. 137]:

s_r = 16 – 8*cos(3*p*t) см;

j_e = 0.9*t^2 – 9*t^3 рад; t_1 = 2/9 с. (1)