УДК 539.31

А.В. Чигарев, С.В. Корчеменко

СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Белорусский Национальный Технический Университет,
Военная академия Республики Беларусь
Минск, Беларусь

Рассмотрим распространение гармонических волн в слоистой среде, считая, что волна распространяется в направлении перпендикулярном плоскости слоев. Перемещение v удовлетворяет уравнению Гельмгольца [4]

$$v_{,xx} + k_0^2 \varepsilon(x) v = 0. \tag{1}$$

$k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c_0^2}$, k_0 — волновое число, c_0 — акустическая скорость, в однородной среде $\varepsilon(x) = \dfrac{c_0^2}{c^2(x)} = n^2(x)$, n(x) — показатель преломления, случайная функция. Уравнение (1) эквивалентно интегральному уравнению вида

$$v(y) = \langle v \rangle - \int G(y-x)\varepsilon'(x)v(x)dx, \tag{2}$$

$$\varepsilon'(x) = \varepsilon(x) - \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = 1.$$

Постановка задачи. На основании измерений поля $v(y)$ на заданном множестве V_1 точек y необходимо определить $\varepsilon(x)$ на интересующем множестве V точек x.

Решение уравнения (2) методом последовательных приближений приводит к рекуррентному уравнению

$$v^{(n)}(y) = -\int G(y-x)\varepsilon'(x)v^{(n-1)}(x)dx, \tag{3}$$

где $v^{(n)}$ — n-ое приближение, описывающее n-кратно рассеянную волну.

Измерение $v^{(n)}$ всегда производится с ошибкой. Для получения устойчивого решения необходима априорная информация о коэффициенте $\varepsilon(x)$. Такой информацией может являться информация об интегральных характеристиках $\varepsilon(x)$ — математическом ожидании и корреляционной функции.

На практике наиболее хорошо регистрируется однократно рассеянная волна, а волны высшей кратности рассеяния можно рассматривать как шум, влияющий на точность измерений. Представим измеренное поле $\nu(y)$ в виде

$$\nu = \nu^{(1)} + \Delta\nu^{(1)}, \tag{4}$$

где ошибка $\Delta\nu^{(1)}$ — случайная функция.

Запишем уравнение (3) в символическом виде

$$\nu = G * E + \Delta\nu, \quad E = -\varepsilon'(x)\langle\nu\rangle \cdot \tag{5}$$

Задачу обращения уравнения (5) сформулируем для спектров величин, входящих в (5). Преобразование (5) по Фурье приводит к

$$\nu(q) = G(q)E(q) + \Delta\nu(q), \tag{6}$$

где $\nu(q),\ \ G(q),\ \ E(q),\ \ \Delta\nu(q)$ — преобразования Фурье соответствующих функций.

На множестве реализаций величины, входящие в (6), случайны, $\langle\nu\rangle = 0$, $\langle E\rangle = 0,\ \ \langle G\rangle = 0,\ \ \langle\Delta\nu\rangle = 0$, поэтому задачу обращения сформулируем как статистическую [2].

$$\left\langle\left|\left(E(q) - M(q)\nu(q)\right)a_1\right|^2\right\rangle = \min \cdot \tag{7}$$

Положим $M(q)a_1=a_2$, тогда

$$\left\langle\left|E(q)a_1 - \nu(q)a_2\right|^2\right\rangle = a_1^{\,2}R_{EE} - R_{E\nu}a_1\overline{a_2} - R_{\nu E}\overline{a_1}a_2 + R_{\nu\nu}a_2^{\,2}, \tag{8}$$

где $R_{EE} = \left\langle E(q)\overline{E}(q)\right\rangle,\quad R_{E\nu} = \left\langle E(q)\overline{\nu}(q)\right\rangle,\quad R_{\nu E} = \left\langle\overline{E}(q)\nu(q)\right\rangle,\ R_{\nu\nu} = \left\langle\nu(q)\overline{\nu}(q)\right\rangle,\ \overline{f}$ — величины, комплексно сопряженные f.

Представим (8) в виде

$$\overline{\left(a_2 - R_{\nu\nu}^{\ \ -1}R_{\nu E}a_1\right)}R_{\nu\nu}\left(a_2 - R_{\nu\nu}^{\ \ -1}R_{\nu E}a_1\right) + \overline{a_1}\left(R_{EE} - \overline{R_{\nu E}}R_{\nu\nu}^{\ \ -1}R_{\nu E}\right)a_1 \cdot \tag{9}$$

Первый член в (9) положителен, второй также положителен. Следовательно, a_2 можно выбрать так, чтобы минимизировать (9). Выберем a_2 таким образом, чтобы первый член обратился в нуль. Это дает

$$a_2 = \overline{M}(q)a_1 = R_{\nu\nu}^{\ \ -1}R_{\nu E}a_1 \cdot \tag{10}$$

Отсюда находим

$$M(q) = \overline{R_{\nu\nu}^{\ \ -1}R_{\nu E}} \cdot \tag{11}$$

Заметим, что $\overline{R_{\nu E}} =< E\overline{\nu} >=< E\overline{\left(GE + \Delta\nu\right)} >= R_{EE}\overline{G} + R_{E\Delta\nu}$,

$$R_{\nu\nu} = <(GE+\Delta\nu)\left(\overline{GE+\Delta\nu}\right) = GR_{EE}\overline{G} + R_{\Delta\nu E}\overline{G} + GR_{E\Delta\nu} + R_{\Delta\nu\Delta\nu},$$

$$R_{E\Delta\nu} = < E\overline{\Delta\nu} >, \quad R_{\Delta\nu\Delta\nu} = < \Delta\nu\overline{\Delta\nu} > . \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) получим

$$E = M(q)\nu(q), \tag{13}$$

где $M(q) = \left(R_{EE}\overline{G} + R_{E\Delta\nu}\right)\left(GR_{EE}\overline{G} + \overline{R_{E\Delta\nu}}\overline{G} + GR_{E\Delta\nu} + R_{\Delta\nu\Delta\nu}\right)^{-1}.$

Во многих прикладных задачах ошибки измерений $\Delta\nu$ и неизвестная величина E некоррелированы, тогда $R_{E\Delta\nu} = 0$ и (13) примет вид

$$M(q) = \left(R_{EE}(q)\overline{G}(q)\right)\left(G(q)R_{EE}(q)\overline{G}(q) + R_{\Delta\nu\Delta\nu}(q)\right)^{-1}. \tag{14}$$

Максимальное значение ΔE_{max} ошибки определения E связано с относительной ошибкой $\Delta_{\Delta\nu}$ измерений соотношением

$$\Delta E_{max} = |G||M|\Delta_{\Delta\nu}, \tag{15}$$

где $\Delta E = \dfrac{|\delta E|}{|E|}, \quad \Delta_{\Delta\nu} = \dfrac{|\delta\nu|}{|\nu|}.$

Обычно $|M|$ мал по сравнению с $\left|G^{-1}\right|$, поэтому ошибка ΔE_{max} сравнима по величине с ошибкой измерения $\Delta_{\Delta\nu}$. Отсюда следует, что малой ошибке измерений соответствует малая ошибка в определении E. Поэтому найденный оператор обращения дает устойчивое решение.

Применяя к (13) обратное преобразование Фурье, получим

$$E(x) = \int M(x - x_1)\nu(x_1)dx_1 . \tag{16}$$

Применяя обратное преобразование Фурье к (14), находим ядро $M(x\text{-}x_1)$ оператора обращения M.

Таким образом, проблема нахождения оператора обращения свелась к необходимости знания корреляционных функций R_{EE}, $R_{\Delta\nu\Delta\nu}$ и их спектральных плотностей $R_{EE}(q)$, $R_{\Delta\nu\Delta\nu}(q)$.

Корреляционная функция $R_{\Delta\nu\Delta\nu}$ и ее спектральная плотность $R_{\Delta\nu\Delta\nu}(q)$ определяются из условий эксперимента. Корреляционная функция R_{EE} и ее спектральная плотность $R_{EE}(q)$ должны определяться в процессе решения обратной задачи. При решении прямой задачи первое приближение учитывает интегральные свойства среды через корреляционную функцию $R_{\theta\theta}$, которая входит в выражение для ядра эффективного оператора

$$\Theta^* = \int_{-\infty}^{\infty} G(x_1 - x_2)_{,xx} R(x_1, x_2) dx_2 \cdot \qquad (17)$$

Между операторами E^* *и* Θ^* существует взаимно однозначная связь

$$\Theta^* = \left(E^* - \varepsilon_0\right) E^{*-1}, \qquad (18)$$

поэтому возможно определение R_{EE}. В экспериментах по прохождению волн через неоднородную среду могут быть измерены коэффициент затухания и дисперсия скорости волны. Из серии экспериментов, изменяя частоту ω, можно определить зависимость $\delta(\omega)$ *и* $k(\omega)$. Подставляя полученные зависимости в дисперсионное уравнение $q^2 = k_0^2 E^*(q)$, (19)

где $E^*(q)$ — спектр оператора E^*, тогда

$$E^*(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} E^*(z) e^{-iqz} dz \cdot \qquad (20)$$

Ядро $E^*(z)$ оператора E^* выражается через корреляционную функцию $R_{EE}(z)$ следующим образом $E^*(z) = -k_0^2 R_{EE}(z) G(z), \quad z = x - x_1 \cdot$ (21)

Из (21) имеем $R_{EE}(z) = -k_0^2 E^*(z) G^{-1}(z) \cdot$ (22)

Таким образом, применяя обратное преобразование Фурье к (20), находим $E^*(z)$, а затем из (22) определяем $R_{EE}(z)$.

Итак, схема решения обратной задачи следующая:

1). Из измеренных в ходе эксперимента зависимостей $\delta(\omega)$ и $k(\omega)$ определяем $q^2 = (k + i\delta)^2$.

2). Из уравнения (20) находим $E^*(q)$.

3). Применяя обратное преобразование Фурье к $E^*(q)$, определяем ядро $E^*(z)$.

4). Из формулы (22) находим $R_{EE}(z)$, а затем $R_{EE}(q)$.

5). Из эксперимента определяем $R_{\Delta v \Delta v}$ *и* $R_{\Delta v \Delta v}(q)$.

6). Подставляя полученные $R_{EE}(q)$ *и* $R_{\Delta v \Delta v}(q)$ в формулу (14), определяем спектр оператора обращения $M(q)$.

7). Применяя к (14) обратное преобразование Фурье, определяем ядро *M(z)*.

8). Из формулы (16) определяем искомую функцию $E(x)$.

Представим неоднородность в слое в виде

$$\varepsilon'(x) = \sum_{m=-1}^{1} \varepsilon'_m \exp(-im\theta x), \quad \varepsilon'(0) = \varepsilon'(L) = 0, \quad L = \frac{2\pi}{\theta}\cdot \tag{23}$$

Пусть наблюдаемое поле имеет вид

$$\tilde{p}(y) = \sum_{m=-1}^{1} p(q - m\theta)\exp\left[-i\left(q - m\theta y\right)\right]\cdot \tag{24}$$

В первом приближении эффективной среды предположим, что ε'_{-1}, ε'_1 случайные независимые величины $\langle\varepsilon'_{-1}\rangle = \langle\varepsilon'_1\rangle = 0$, $\langle\varepsilon'_{-1}\varepsilon'_1\rangle = 0$, $\langle{\varepsilon'_{-1}}^2\rangle = \langle{\varepsilon'_1}^2\rangle = 2^{-1}D_{\varepsilon'}$ ·

Тогда $\langle\varepsilon\rangle = \varepsilon(0) = 0$,

$$\langle\varepsilon'(x)\varepsilon'(x+r)\rangle = \frac{1}{2}D_{\varepsilon'}\cos\theta r\cdot \tag{25}$$

Рассмотрим реконструкцию конкретной реализации $\varepsilon'(x)$. Для этого необходимо найти оператор обращения. Пусть корреляционная функция ошибок имеет вид

$$R_{\Delta v \Delta v}(z) = R_{\Delta v \Delta v}(0)\delta(z)\cdot \tag{26}$$

Спектральные плотности корреляционных функций (25) и (26) и функции Грина подставляем в формулу (14). Выполняя обратное преобразование Фурье, находим ядро $M(z)$ оператора M, а затем и реализацию $\varepsilon'(x)$

$$\varepsilon'(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-1}^{1} P_0' P\left(q - m\theta\right)M\left(q - m\theta\right)\exp\left(-im\theta x\right), \tag{27}$$

где $M\left(q - m\theta\right)$ спектр оператора M.

Сравнивая (23), (25), (27), получаем, что периодичность функции $\varepsilon'(x)$ восстанавливается точно при нахождении как интегральных, так и локальных оценок структуры. Погрешность имеет место при нахождении амплитудных значений $\varepsilon'(x)$.
Рассмотрим пример идентификации параметров слоистой среды. Во многих экспериментах по распространению волн в неоднородных средах, зависимость затухания волн от частоты в длинноволновой области носит линейный характер, а дисперсия скорости практически отсутствует. Предположим, что в результате эксперимента получено $k = A\omega, \quad \delta = B\omega$ · (28)

В этом случае для $R_{EE}(z)$ получим выражение

$$R_{EE}(z) = \frac{ABc_0^2 \sin kz}{\pi kz}. \tag{29}$$

При нахождении $R_{EE}(z)$ учтено, что R(z) — действительная четная функция.

Дисперсия $R_0 = AB\left(c_0^2\pi\right)^{-1}$, радиус корреляции a=k^{-1} порядка длины волны.

Таким образом, корреляционная функция имеет вид $R_{EE}(z) = E(0)\frac{\sin\frac{z}{a}}{z/a}$. (30)

Спектральная плотность для (30) имеет вид $R_{EE}(q) = const$. (31)

Спектральная плотность корреляционной функции $R_{\Delta\nu\Delta\nu}(z)$ примет вид

$$R_{\Delta\nu\Delta\nu}(q) = const. \tag{32}$$

Подставляем (31) и (32) в формулу для определения

$$M(q) = constR_{EE}(q). \tag{33}$$

Выполняя обратное преобразование Фурье для (33), получим

$$M(z) = constR_{EE}(z). \tag{34}$$

Таким образом, конкретная реализация $\varepsilon'(x)$ представляется разложением по функциям Котельникова вида $\frac{\sin\pi(2\Omega x - n)}{\pi(2\Omega x - n)}$

$$\varepsilon'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon\left(\frac{n}{2\Omega}\right)\frac{\sin\pi(2\Omega x - n)}{\pi(2\Omega x - n)},\ \text{где}\ \Omega = \max\left(l^{-1}\right). \tag{35}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967. — 549 с. 2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 286 с. 3. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т.1. — 280 с., Т.2. — 317 с. 4. Чигарев А.В. Метод осреднения в динамических задачах теории упругости структурно-неоднородных сред//ПММ. 1990. Т.54. Вып.2, — с. 258-266.