УДК 621.311

ГРАДИЕНТНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Вабищевич Н.А.
Научный руководитель – Волков А.А., м.т.н., старший преподаватель

Для расчета режима электрической сети необходимо составить и решить систему уравнений. Как правило, при этом используется система уравнений узловых напряжений. При задании нагрузок в токах эта система является системой линейных алгебраических уравнений, а при задании в мощностях – системой нелинейных алгебраических уравнений. Решение систем уравнений может проводиться различными методами.

Градиентные методы - методы решения задач математического программирования, основанные на поиске экстремума (максимума или минимума) функции путем последовательного перехода к нему с помощью градиента этой функции.

Градиент функции указывает направление ее наиболее быстрого возрастания в окрестности той точки, в которой он вычислен. Поэтому, если из некоторой текущей точки $x^{(0)}$ перемещаться в направлении вектора $\nabla f(x^{(1)})$ то функция f будет возрастать, по крайней мере, в некоторой окрестности $x^{(1)}$. Следовательно, для точки $x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha\cdot\nabla f(x^{(1)})$ лежащей в такой окрестности, справедливо неравенство $f(x^{(1)})\le f(x^{(2)})$. Продолжая этот процесс, мы постепенно будем приближаться к точке некоторого локального максимума. Однако как только определяется направление движения, сразу же встает вопрос о том, как далеко следует двигаться в этом направлении или, другими словами, возникает проблема выбора шага α:

$$x^{(p+1)}=x^{(p)}-\alpha_p Ч\nabla f(x^{(p)}) \quad (1)$$

задающего последовательность точек, стремящихся к точке максимума или минимума.

В зависимости от способа решения проблемы с выбором шага различают различные варианты градиентного метода.

Система уравнений представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} f_1=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j-b_1, \\ f_2=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j-b_2, \\ \dots \\ f_n=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j-b_n. \end{cases} \quad (2)$$

В матричной форме:

$$f = A\times x - b. \quad (3)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$f=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}; \qquad A=[a_{ij}]; \qquad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Рассмотрим наиболее известные варианты градиентного метода.

Градиентный метод наискорейшего спуска

В методе наискорейшего спуска решение ищут в виде [1]:

$$x^{(p+1)}=x^{(p)}-\alpha_p \text{Ч} r_p, \qquad (5)$$

где $x^{(p)}$ и $x^{(p+1)}$ - векторы неизвестных на p и p+1 шагах итераций; r_p - вектор невязок на p-ом шаге; α_p - длина шага вдоль направления градиента.

$$r_p=A\text{Ч}x^{(p)}-b, \qquad (6)$$

$$\alpha_p=\frac{(r_p,r_p)}{(Wr_p,r_p)},, \qquad (7)$$

где W - матрица Якоби, вычисленная на p-ом шаге; W' - транспонированная матрица Якоби, вычисленная на p-ом шаге. В формуле (7) используется скалярное произведение двух векторов, которое определяется следующей формулой:

$$\begin{gathered}(f(x),f(x))=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)f_i(x); \\ (f(x),f(x))=\sum_{i=1}^{n}[f_i(x)]^2. \end{gathered}, \qquad (8)$$

Матрица Якоби вектор – функции f(x) определяется как

$$W=\frac{df}{dx}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}., \qquad (9)$$

Для системы (3) матрица Якоби равна

$$W=\frac{df}{dx}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}., \qquad (10)$$

Алгоритм расчёта системы линейных уравнений (3) для метода наискорейшего спуска:

1) выбираем начальное приближение $x^{(p)}$;
2) находим r_p - вектор невязок на р-ом шаге по формуле (6);
3) определяем α_p - длину шага вдоль направления градиента по формуле (7);
4) подставляем α_p, r_p, $x^{(p)}$ в правую часть системы (5) и находим $x^{(p+1)}$;
5) далее проводим необходимое количество итерационных операций до достижения условия $\left|x^{(p+1)}-x^{(p)}\right|\le\varepsilon$.

Градиентный метод с минимальной невязкой

За основу возьмем матричную форму системы линейных уравнений $Ax=b$. Принимаем за начальное приближение $x^{(0)}$, следующее приближение $x^{(1)}$ ищется, так же как и в методе наискорейшего спуска, в виде $x^{(0)}+\mu_p Ч r_p$, но параметр μ_p подбирается так, чтобы минимизировалась длина вектора невязки $|r|$ или, что то же самое, $(r,r)=|r|^2$. После выполнения первого шага процесс повторяется [1].

Рабочими формулами метода будут

$$x^{(p+1)}=x^{(p)}-\mu_p Ч r_p, \tag{11}$$

$$r_p=AЧx^{(p)}-b,$$

$$\mu_p=\frac{(r_p,Wr_p)}{(Wr_p,Wr_p)}., \tag{12}$$

Алгоритм расчёта системы линейных уравнений для метода с минимальной невязкой:

1) выбираем начальное приближение $x^{(p)}$;
2) находим r_p - вектор невязок на р-ом шаге по формуле (6);
3) определяем μ_p - длину шага вдоль направления градиента по формуле (12).
4) подставляем α_p, r_p, $x^{(p)}$ в правую часть системы (11) и находим $x^{(p+1)}$
5) далее проводим необходимое количество итерационных операций до достижения условия $\left|x^{(p+1)}-x^{(p)}\right|\le\varepsilon$.

Градиентный метод сопряжённых элементов

Алгоритм сопряженных градиентов аналогичен алгоритму наискорейшего спуска, отличие только в выборе направления. Идея этого метода в том, чтобы на каждом шаге в качестве направления спуска использовать не антиградиент, а его линейную комбинацию с прежним направлением спуска. Обозначим через γ_p направление спуска на р-ом шаге.

Рабочими формулами метода будут:

$$x^{(p+1)}=x^{(p)}-\alpha_p Ч\gamma_p, \tag{13}$$

$$\gamma_{(p+1)} = r_p - \beta_p \text{Ч} \gamma_p\,, \tag{14}$$

$$\beta_p = \frac{r_{(p+1)}}{r_p}\,, \tag{15}$$

$$\alpha_p = \frac{(r_p, \gamma_p)}{(W\gamma_p, \gamma_p)}.\,, \tag{16}$$

В методе сопряженных градиентов новое и старое направления не ортогональны. В случае минимизации положительно определенной квадратичной формы с матрицей W все направления спуска γ_i оказываются – ортогональными, т.е. удовлетворяют условию $(\gamma_i, W\gamma_j)=0$ при любом $i \neq j$. Такие векторы называются сопряженными, из чего и происходит название метода.

Алгоритм расчёта системы линейных уравнений для метода с сопряженными элементами:

1) выбираем начальное приближение $x^{(p)}$;
2) находим r_p - вектор невязок на p-ом шаге по формуле (6);
3) $\gamma_p = r_p$, т.е. первый шаг делаем по антиградиенту;
4) определяем α_p - длину шага вдоль направления градиента по (16);
5) подставляем α_p, γ_p, $x^{(p)}$ в правую часть системы (13) и находим $x^{(p+1)}$;
6) находим $r_{(p+1)}$ - вектор невязок на $(p+1)$-ом шаге по формуле (6);
7) находим β_p по формуле (15);
8) находим $\gamma_{(p+1)}$ по формуле (16);
9) определяем $\alpha_{(p+1)}$ - длину шага вдоль направления градиента по (16);
10) проводим вычисления по примеру системы (13);
11) далее проводим необходимое количество итерационных операций до достижения условия $\left|x^{(p+1)} - x^{(p)}\right| \leq \varepsilon$.

По приведенным алгоритмам проведены расчеты режима тестовой электрической сети, состоящей из 6 узлов, один из которых балансирующий, 8 ветвей и 3 контуров.

Установлено, что задание начальных приближений влияет на количество итераций, поэтому для всех узлов и всех расчетов начальное приближение падений напряжения в узлах относительно балансирующего принято одинаковым.

Таблица 1 – Сравнительные результаты расчета

Метод	Количество итераций
Метод простой итерации	4
Метод ускоренной итерации	3
Метод наискорейшего спуска	5
Метод с минимальной невязкой	10
Метод сопряженных элементов	5

Главное достоинство градиентных методов – глобальная сходимость. Процесс градиентного спуска приводит к какой-либо точке минимума функции из любой начальной точки. При определенных условиях найденная точка минимума будет искомым решением исходной системы.

Главный недостаток – медленная сходимость. Сходимость этих методов – лишь линейная, причем, если для многих методов, таких как метод Ньютона, характерно ускорение сходимости при приближении к решению, то здесь имеет место скорее обратное. Поэтому есть смысл в построении гибридных алгоритмов, которые начинали бы поиск искомой точки – решения данной нелинейной системы, - глобально сходящимся градиентным методом, а затем производили уточнение каким-то быстросходящимся методом, например, тем же методом Ньютона.

Литература

1 Вычислительные методы линейной алгебры. Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. - М.:Физматгиз, 1960.- 655 с.

2 Численные методы на базе MathCAD. С.В. Поршнев, И.В. Беленкова. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 464 с.

3 Линейная алгебра. А.Н. Канатиков, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002.- 336 с.