https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-3-224-230

УДК 517.958:519.633

Приближенное решение с помощью элементарных функций смешанной задачи с краевыми условиями второго рода для одномерного волнового уравнения

Канд. физ.-мат. наук, доц. П. Г. Ласый[1)]

[1)]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. В статье рассматривается смешанная задача с краевыми условиями второго рода для одномерного волнового уравнения. Решение этой задачи записывается в интегральной форме с помощью функции Грина. Для практического использования это решение малопригодно, так как, во-первых, функция Грина представляет собой тригонометрический ряд и, следовательно, ее вычисление представляет определенные трудности, во-вторых, приходится приближенно вычислять пять интегралов с функцией Грина, входящих в решение задачи, и, в-третьих, крайне затруднительно оценить погрешность приближенного вычисления решения. В настоящей работе преодолены эти трудности, а именно, для функции Грина найдено простое выражение через периодическую кусочно-линейную функцию, интегралы, входящие в приближенное решение, вычисляются с помощью периодических кусочно-линейной, кусочно-квадратичной и кусочно-кубической функций, и, наконец, получена простая и эффективная оценка погрешности аппроксимации. Оценка погрешности линейна по шагам сеток задачи и в любой фиксированный момент времени равномерна по пространственной переменной. Таким образом, приближенное решение задачи со сколь угодно малой погрешностью эффективно выражается через элементарные функции. Приведен пример решения задачи предложенным методом, а также построены графики точного и приближенного решений.

Ключевые слова: волновое уравнение, смешанная задача, краевое условие второго рода, приближенное решение, функция Грина, оценка погрешности

Для цитирования: Ласый, П. Г. Приближенное решение с помощью элементарных функций смешанной задачи с краевыми условиями второго рода для одномерного волнового уравнения / П. Г. Ласый // *Наука и техника.* 2023. Т. 22, № 3. С. 224–230. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-3-224-230

Approximate Solution Using Elementary Functions of Mixed Problem with Boundary Conditions of the Second Kind for One-Dimensional Wave Equation

Lasy P. G.

[1)]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper considers a mixed problem with boundary conditions of the second kind for a one-dimensional wave equation. The solution to this problem is written in integral form using the Green’s function. For practical use, this solution is of little use, since, firstly, the Green’s function is a trigonometric series and, therefore, its calculation presents certain difficulties,

Адрес для переписки
Ласый Петр Григорьевич
Белорусский национальный технический университет
ул. Б. Хмельницкого, 9,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by

Address for correspondence
Lasy Peter G.
Belarusian National Technical University
9, B. Khmelnitskogo str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by

secondly, it is necessary to calculate approximately the five integrals with the Green's function included in the solution of the problem, and, thirdly, it is extremely difficult to estimate the error of the approximate calculation of the solution. In this work, these difficulties are overcome, namely, simple expression for the Green's function is found in terms of a periodic piecewise linear function, the integrals included in the approximate solution are calculated using periodic piecewise linear, piecewise quadratic and piecewise cubic functions, and, finally, a simple and efficient estimate of the approximation error is obtained. The error estimate is linear in the grid steps of the problem and uniform in the spatial variable at any fixed point in time. Thus, an approximate solution of the problem with an arbitrarily small error is effectively expressed in terms of elementary functions. An example of solving the problem by the proposed method is given, and graphs of the exact and approximate solutions are plotted.

Keywords: wave equation, mixed problem, boundary condition of the second kind, approximate solution, Green's function, error estimate

For citation: Lasy P. G. (2023) Approximate Solution Using Elementary Functions of Mixed Problem with Boundary Conditions of the Second Kind for One-Dimensional Wave Equation. *Science and Technique*. 22 (3), 224–230. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-3-224-230 (in Russian)

Введение

Смешанная задача с краевыми условиями второго рода для одномерного волнового уравнения может возникнуть, например, при изучении малых продольных или крутильных колебаний стержня конечной длины с заданной динамической нагрузкой на его концах. Постановки такого рода задач и обсуждение методов их решения можно найти в [1–4]. Другим примером могут служить колебания силы тока или напряжения, возникающие в прямолинейном проводнике конечной длины. Телеграфное уравнение, описывающее эти колебания, переходит в волновое в случае линии без искажений. В [5, 6] приведены примеры использования этих уравнений в электротехнике и электросвязи. В работах [7–9] найдены точные и приближенные решения с помощью специальных функций волнового и телеграфного уравнений в случае краевых условий первого рода.

Основная часть

Рассмотрим смешанную краевую задачу с краевыми условиями второго рода для одномерного волнового уравнения

$$\partial_{tt}u = a^2\partial_{xx}u + q(x,t) \tag{1}$$

в полосе

$$\Pi_{l\infty} = \{(x,t) \mid x \in [0,l],\ t \in [0,+\infty)\}$$

при заданных начальных

$$u(x,0) = f(x),\ \partial_t u(x,0) = F(x),\ x \in [0,l] \tag{2}$$

и краевых условиях второго рода

$$\partial_x u(0,t) = \varphi_0(t),\ \partial_x u(l,t) = \varphi_l(t),\ t \in [0,+\infty), \tag{3}$$

где функцию $f(x)$ мы будем предполагать дифференцируемой, а ее производную – удовлетворяющей условию Липшица с константой $L_{f'}$ на отрезке [0, l], функции $F(x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t)$ будем считать удовлетворяющими условию Липшица с константами L_F, L_{φ_0}, L_{φ_l} на соответствующих промежутках. Заметим здесь, что для функции $f(x)$ также будет выполнено условие Липшица с константой $L_f = \max\limits_{x\in[0,l]} |f'(x)|$. Предположим также, что и функция $q(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L_q в полосе $\Pi_{l\infty}$.

Известно [10], что точное решение задачи (1)–(3) представляется в виде

$$u(x,t) = \partial_t \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)d\xi + \int_0^l F(\xi)G(x,\xi,t)d\xi - a^2\int_0^t \varphi_0(t-s)G(x,0,s)ds + a^2\int_0^t \varphi_l(t-s)G(x,l,s)ds + \iint_{\Pi_{lt}} q(\xi,t-s)G(x,\xi,s)d\xi ds.$$

Здесь $G(x,\xi,t) = \dfrac{t}{l} + \dfrac{2}{a\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cos\omega nx\cos\omega n\xi \times \sin a\omega nt$, $\omega = \dfrac{\pi}{l}$ – функция Грина этой задачи, $\Pi_{lt} = \{(\xi,s) \mid \xi \in [0,l],\ s \in [0,t]\}$.

Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n}=\frac{1}{2}(\pi-z),\ z\in(0,\pi],$$

то после несложных преобразований функция Грина приводится к виду

$$G(x,\xi,t)=\frac{t}{l}+\frac{1}{2\pi a}G^1(x,\xi,t),$$

где $G^1(x,\xi,t)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=0}^{2}g_1(\omega((-1)^{\alpha_1}x+(-1)^{\alpha_2}\xi+at))$

и $g_1(z)$ – 2π-периодическая функция, которая задана выражением

$$g_1(z)=\frac{\operatorname{sgn} z}{2}(\pi-|z|),\ z\in[-\pi,\pi]. \tag{4}$$

Таким образом, функция Грина задачи выражается через кусочно-линейную функцию $g_1(z)$.

Заметим здесь попутно для дальнейшего, что первообразной функции $g_1(z)$ на всей числовой оси, исключая точки, кратные 2π, является 2π-периодическая функция

$$g_2(z)=-\frac{1}{4}(\pi-|z|)^2,\ z\in[-\pi,\pi], \tag{5}$$

а первообразной последней на всей оси служит также 2π-периодическая функция

$$g_3(z)=\frac{1}{12}z(|z|-\pi)(2\pi-|z|),\ z\in[-\pi,\pi]. \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$u(f,x,t)=\partial_t\int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)d\xi,\ u(F,x,t)=$$

$$=\int_0^l F(\xi)G(x,\xi,t)d\xi,\ u(\varphi_0,x,t)=$$

$$=-a^2\int_0^t\varphi_0(t-s)G(x,0,s)ds,\ u(\varphi_l,x,t)=$$

$$=a^2\int_0^t\varphi_l(t-s)G(x,l,s)ds,\ u(q,x,t)=$$

$$=\iint_{\Pi_{lt}}q(\xi,t-s)G(x,\xi,s)d\xi ds.$$

Значит:

$$u(x,t)=u(f,x,t)+u(F,x,t)+u(\varphi_0,x,t)+$$
$$+u(\varphi_l,x,t)+u(q,x,t). \tag{7}$$

Найдем приближенные выражения для каждой функции в правой части (7). Первую из них сначала преобразуем. Первообразная функции $G^1(x,\ \xi,\ t)$ по переменной ξ равна $\frac{1}{\omega}G_\xi^2(x,\xi,t)$, где

$$G_\xi^2(x,\ \xi,\ t)=$$

$$=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=0}^{2}(-1)^{\alpha_2}g_2(\omega((-1)^{\alpha_1}x+(-1)^{\alpha_2}\xi+at)).$$

Тогда после интегрирования по частям получим:

$$\int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)d\xi=\int_0^l f(\xi)\left(\frac{t}{l}+\frac{1}{2\pi a}G^1(x,\xi,t)\right)d\xi=$$

$$=\frac{t}{l}\int_0^l f(\xi)d\xi+\frac{1}{2\pi a\omega}\times$$

$$\times\left(f(\xi)G_\xi^2(x,\xi,t)\Big|_0^l-\int_0^l f'(\xi)G_\xi^2(x,\xi,t)d\xi\right).$$

Отсюда

$$u(f,x,t)=\frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)d\xi+\frac{1}{2\pi}\times$$
$$\times\left(f(\xi)\tilde{G}^1(x,\xi,t)\Big|_0^l-\int_0^l f'(\xi)\tilde{G}^1(x,\xi,t)d\xi\right), \tag{8}$$

где $\tilde{G}^1(x,\xi,t)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=0}^{2}(-1)^{\alpha_2}g_1(\omega((-1)^{\alpha_1}x+(-1)^{\alpha_2}\times$ $\times\xi+at))$. Возьмем на отрезке $[0,l]$ равномерную сетку с узлами в точках $x_k = kh_l$, $k=\overline{0,n_l}$, где $h_l=\frac{l}{n_l}$ – шаг сетки и заменим под знаком каждого интеграла в правой части формулы (8) на каждом из частичных отрезков $[x_{k-1},x_k]$, $k=\overline{1,n_l}$ функции $f(\xi)$ и $f'(\xi)$ их значениями в средней точке $x_{k-0,5}=x_{k-1}+0,5h_l$ отрезка. Тогда, учитывая, что первообразная функции $\tilde{G}^1(x,\ \xi,\ t)$ по переменной ξ равна $\frac{1}{\omega}G_t^2(x,\ \xi,\ t)$, где

$$G_t^2(x,\xi,t)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=0}^{2} g_2(\omega((-1)^{\alpha_1}x+(-1)^{\alpha_2}\xi+at)),$$

мы находим приближенное представление для функции (8):

$$u_{n_l}(f,x,t)=\frac{1}{n_l}\sum_{k=1}^{n_l} f(x_{k-0,5})+\frac{1}{2\pi}\times$$
$$\times\left(f(\xi)\tilde{G}^1(x,\xi,t)\Big|_0^l-\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{n_l} f'(x_{k-0,5})\,G_t^2(x,\xi,t)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}\right). \quad (9)$$

Оценим погрешность приближенной формулы (9), принимая во внимание условие Липшица для функций $f(x)$ и $f'(x)$, а также ограниченность функции $\tilde{G}^1(x,\xi,t)$ по абсолютной величине числом 2π. Так как

$$u(f,x,t)-u_{n_l}(f,x,t)=\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n_l}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(\xi)-f(x_{k-0,5}))d\xi-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n_l}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f'(\xi)-f'(x_{k-0,5}))\tilde{G}^1(x,\xi,t)d\xi,$$

то

$$|u(f,x,t)-u_{n_l}(f,x,t)|\le\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n_l}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(\xi)-f(x_{k-0,5})|\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n_l}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f'(\xi)-f'(x_{k-0,5})|\,|\tilde{G}^1(x,\xi,t)|\,d\xi\le$$
$$\le\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n_l}\int_{x_{k-1}}^{x_k}L_f\,|\xi-x_{k-0,5}|\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n_l}\int_{x_{k-1}}^{x_k}L_{f'}\,|\xi-x_{k-0,5}|\,2\pi\,d\xi\le\left(\frac{L_f}{l}+L_{f'}\right)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{n_l}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{h_l}{2}d\xi=\frac{1}{2}(L_f+lL_{f'})h_l.$$

Аналогично находится аппроксимация и оценивается ее погрешность для функции

$$u(F,x,t)=\int_0^l F(\xi)\left(\frac{t}{l}+\frac{1}{2\pi a}G^1(x,\xi,t)\right)d\xi \quad (10)$$

на той же сетке. Здесь аппроксимирующая функция равна

$$u_{n_l}(F,x,t)=\sum_{k=1}^{n_l}F(x_{k-0,5})\times$$
$$\times\left(\frac{h_l t}{l}+\frac{1}{2\pi a\omega}G_\xi^2(x,\ \xi,\ t)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}\right) \quad (11)$$

и ошибка аппроксимации имеет оценку

$$|u(F,x,t)-u_{n_l}(F,x,t)|\le\frac{1}{2}L_F\left(t+\frac{l}{a}\right)h_l.$$

Займемся теперь функцией

$$u(\varphi_0,x,t)=-a^2\int_0^t\varphi_0(t-s)\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{2\pi a}G^1(x,0,s)\right)ds. \quad (12)$$

Здесь для аппроксимации мы будем пользоваться временной сеткой с узлами в точках $t_k=kh_t$, $k=\overline{0,n_t}$, где $h_t=\dfrac{t}{n_t}$ – шаг сетки. В интеграле в правой части формулы (12) на каждом из частичных отрезков $[t_{k-1},t_k]$, $k=\overline{1,n_t}$ заменим функцию $\varphi_0(t-s)$ ее значением в средней точке $t_{k-0,5}=t_{k-1}+0,5h_t$ отрезка. В результате, учитывая, что первообразная для функции $G^1(x,\xi,t)$ по переменной t равна $\dfrac{1}{a\omega}G_t^2(x,\xi,t)$, получим

$$u_{n_t}(\varphi_0,\ x,\ t)=-\frac{a^2}{2}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{n_t}\varphi_0(t-t_{k-0,5})\left(\frac{2k-1}{l}h_t^2+\frac{1}{\pi a^2\omega}G_t^2(x,0,s)\Big|_{t_{k-1}}^{t_k}\right). \quad (13)$$

Оценим погрешность вычисления функции (12) по формуле (13). Поскольку функция $\varphi_0(t)$ удовлетворяет условию Липшица и $|G^1(x,\xi,t)|\le 2\pi$ при всех $x,\xi,t,$ то из равенства

$$u(\varphi_0,x,t)-u_{n_t}(\varphi_0,x,t)=$$
$$=-a^2\sum_{k=1}^{n_t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(\varphi_0(t-s)-\varphi_0(t-t_{k-0,5}))\times$$
$$\times\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{2\pi a}G^1(x,0,s)\right)ds$$

следует, что

$$|u(\varphi_0,x,t)-u_{n_t}(\varphi_0,x,t)|\le a^2\sum_{k=1}^{n_t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|\varphi_0(t-s)-\varphi_0(t-t_{k-0,5})|\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{2\pi a}|G^1(x,0,s)|\right)ds\le$$

$$\le a^2\sum_{k=1}^{n_t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}L_{\varphi_0}|s-t_{k-0,5}|\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{a}\right)ds\le a^2L_{\varphi_0}\sum_{k=1}^{n_t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{h_t}{2}\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{a}\right)ds=$$

$$=\frac{1}{2}a^2L_{\varphi_0}h_t\sum_{k=1}^{n_t}\left(\frac{2k-1}{2l}h_t^2+\frac{h_t}{a}\right)=\frac{1}{2}a^2L_{\varphi_0}h_t\left(\frac{n_t^2h_t^2}{2l}+\frac{t}{a}\right)=\frac{1}{2}a^2L_{\varphi_0}\left(\frac{t^2}{2l}+\frac{t}{a}\right)h_t.$$

Для функции

$$u(\varphi_l,x,t)=a^2\int_0^t\varphi_l(t-s)\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{2\pi a}G^1(x,l,s)\right)ds, \quad (14)$$

пользуясь той же временной сеткой, мы получим аппроксимацию

$$u_{n_t}(\varphi_l,x,t)=\frac{a^2}{2}\sum_{k=1}^{n_t}\varphi_l(t-t_{k-0,5})\times$$
$$\times\left(\frac{2k-1}{l}h_t^2+\frac{1}{\pi a^2\omega}G_t^2(x,l,s)\Big|_{t_{k-1}}^{t_k}\right) \quad (15)$$

с оценкой погрешности

$$|u(\varphi_l,x,t)-u_{n_t}(\varphi_0,x,t)|\le\frac{1}{2}a^2L_{\varphi_l}\left(\frac{t^2}{2l}+\frac{t}{a}\right)h_t.$$

Найдем, наконец, приближенное представление для функции

$$u(q,x,t)=\iint_{\Pi_{lt}}q(\xi,t-s)\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{2\pi a}G^1(x,\xi,s\right)d\xi ds. \quad (16)$$

Набросим на прямоугольник Π_{lt} сетку с узлами в точках (x_i,t_j), где x_i,t_j – те же узлы по переменным x и t соответственно, которые мы использовали выше. Заменим, далее, в (16) под знаком двойного интеграла в каждом из n_ln_t прямоугольников $\Pi_{ij}=\{(\xi,s)\,|\,x_{i-1}\le\xi\le x_i,$ $t_{j-1}\le s\le t_j\}$ функцию $q(\xi,t-s)$ ее значением в средней точке $(x_{i-0,5},t_{j-0,5})$. Тогда, учитывая, что первообразная по переменным ξ и t функции $G^1(x,\xi,t)$ равна $\frac{1}{a\omega^2}G^3_{\xi t}(x,\xi,t)$, где

$$G^3_{\xi t}(x,\xi,t)=$$

$$=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=0}^{2}(-1)^{\alpha_2}g_3(\omega((-1)^{\alpha_1}x+(-1)^{\alpha_2}\xi+at)),$$

получим следующее приближенное выражение для функции $u(q,x,t)$:

$$u_{n_ln_t}(q,x,t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}q(x_{i-0,5},t-t_{j-0,5})\times$$
$$\times\left(\frac{2j-1}{l}h_lh_t^2+\frac{1}{\pi a^2\omega^2}G^3_{\xi t}(x,\xi,s)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}\Big|_{t_{j-1}}^{t_j}\right). \quad (17)$$

Учитывая, далее, что

$$u(q,x,t)-u_{n_ln_t}(q,x,t)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}\iint_{\Pi_{ij}}(q(\xi,t-s)-q(x_{i-0,5},t-t_{j-0,5}))\times$$
$$\times\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{2\pi a}G^1(x,\xi,s\right)d\xi ds,$$

находим

$$|u(q,x,t)-u_{n_ln_t}(q,x,t)|\le\sum_{i=1}^{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}\iint_{\Pi_{ij}}|q(\xi,t-s)-$$
$$-q(x_{i-0,5},t-t_{j-0,5})|\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{2\pi a}|G^1(x,\xi,s|\right)d\xi ds\le$$
$$\le\frac{1}{2}L_q(h_l+h_t)\sum_{i=1}^{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}\iint_{\Pi_{ij}}\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{a}\right)d\xi ds=\frac{1}{2}L_q(h_l+h_t)\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}\left(\frac{2j-1}{2l}h_t^2h_l+\frac{h_th_l}{a}\right)=\frac{1}{2}L_q\left(\frac{t^2}{2}+\frac{lt}{a}\right)(h_l+h_t).$$

Сформулируем теперь результат наших изысканий в виде следующего утверждения.

Теорема. *При сформулированных выше предположениях на функции* $q(x,t)$, $f(x)$, $F(x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t)$ *точное решение задачи* (1)–(3) *при любом* $x\in[0,l]$ *и любом фиксированном* $t>0$ *находится по формулам* (7), (8), (10), (12), (14), (16), *а приближенное – по формуле*

$$u_{n_l n_t}(x,t) = u_{n_l}(f,x,t) + u_{n_l}(F,x,t) + \\ + u_{n_t}(\varphi_0,x,t) + u_{n_t}(\varphi_l,x,t) + u_{n_l n_t}(q,x,t), \quad (18)$$

где функции в правой части имеют соответственно выражения (9), (11), (13), (15), (17). *Суммарная абсолютная погрешность аппроксимации имеет оценку*

$$|u(x,t) - u_{n_l n_t}(x,t)| \le \frac{1}{2}\left(L_f + lL_{f'} + L_F\left(t + \frac{l}{a}\right)\right)h_l + \\ + \frac{1}{2}a^2(L_{\varphi_0} + L_{\varphi_l})\left(\frac{t^2}{2l} + \frac{t}{a}\right)h_t + \\ + \frac{1}{2}L_q\left(\frac{t^2}{2} + \frac{lt}{a}\right)(h_l + h_t),$$

т. е. погрешность линейна относительно шагов сеток по каждой переменной и равномерна по переменной x.

Заметим, что формулы (9), (11), (13), (15) и (17) являются эффективными, так как для вычисления функций $\tilde{G}^1(x, \xi, t)$, $G^2_\xi(x, \xi, t)$, $G^2_t(x, \xi, t)$, $G^3_{\xi t}(x, \xi, t)$ используются 2π-периодические функции $g_1(z)$, $g_2(z)$ и $g_3(z)$, заданные формулами (4), (5) и (6) соответственно. Первая из них кусочно-линейная, вторая – кусочно-квадратичная, третья – кусочно-кубическая. Они заданы на отрезке $[-\pi, \pi]$. Для вычисления значений этих функций в произвольной точке $z \in \mathrm{R}$ следует, учитывая их периодичность, заменить в их выражениях z на $\gamma(z)$, где

$$\gamma(z) = \mathrm{sgn}(z)\left(|z| - 2\pi\left[\frac{|z|}{2\pi}\right]\right).$$

Пример. *Найти точное и приближенное решение следующей смешанной задачи для волнового уравнения*

$$\partial_{tt}u = 4\partial_{xx}u + \pi^2(16\sin 2\pi x - 9\cos 3\pi t),$$

$$u(x,0) = 1 + x^2 + \sin 2x + \sin 2\pi x, \ \partial_t u(x,0) = \\ = -4x + 4\cos 2x, \ x \in [0,1],$$

$$\partial_x u(0,t) = 2\pi - 4t + 2\cos 4t, \ \partial_x u(1,t) = \\ = 2\pi + 2(1-2t) + 2\cos 2(1+2t), \ t \in [0,+\infty).$$

Точным решением этой задачи является функция

$$u(x,t) = (x-2t)^2 + \sin 2(x+2t) + \\ + \sin 2\pi x + \cos 3\pi t,$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Вычисление приближенного решения задачи по формуле (18) в квадрате $\{(x,t) \mid x \in [0,1], t \in [0,1]\}$ при $n_l = n_t = 50$ дает максимальную погрешность, не превышающую 0,0046, что является вполне приемлемым для сеток задачи с суммой шагов $h_l + h_t = 0{,}04$. Графики точного и приближенного решений задачи имеют вид:

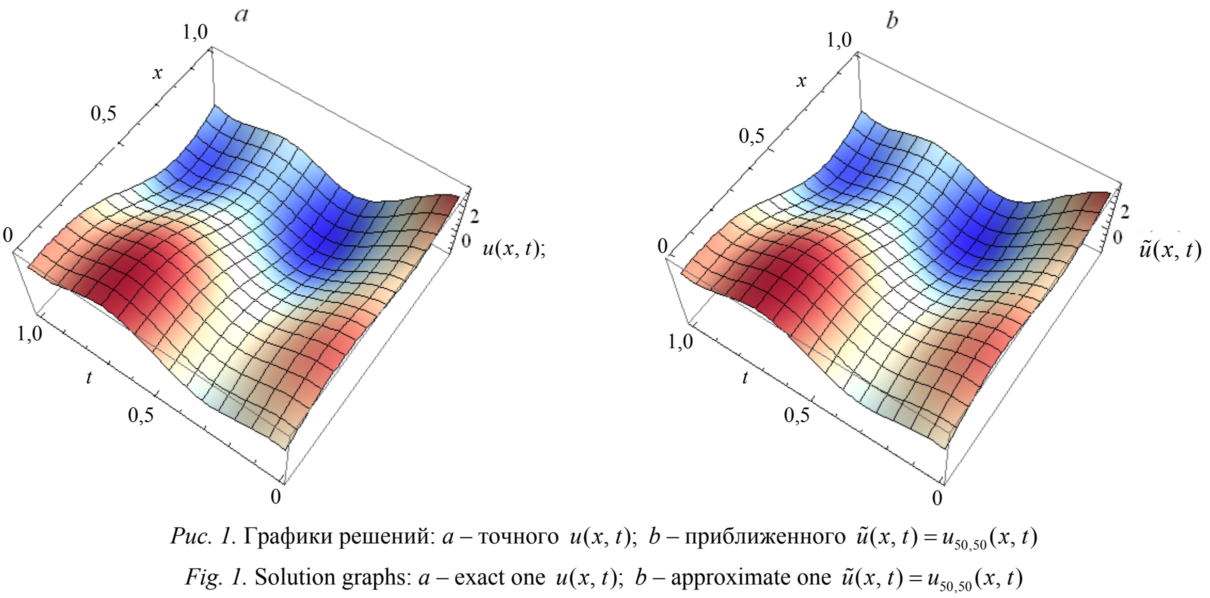

Рис. 1. Графики решений: a – точного $u(x, t)$; b – приближенного $\tilde{u}(x, t) = u_{50,50}(x, t)$

Fig. 1. Solution graphs: a – exact one $u(x, t)$; b – approximate one $\tilde{u}(x, t) = u_{50,50}(x, t)$

ВЫВОД

В работе найдено точное и приближенное решения смешанной задачи с краевыми условиями второго рода для одномерного волнового уравнения. Эти решения эффективно вычисляются через три 2π-периодические функции, одна из которых является кусочно-линейной, вторая – кусочно-квадратичной, а третья – кусочно-кубической. Получена оценка погрешности приближенного решения, линейная относительно шагов сеток по каждой переменной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошляков, Н. С. Дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. М.: ГИФМЛ, 1962. 767 с.
2. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики: учеб. / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. М.: Физматлит, 2000. 400 с.
3. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 2004. 798 с.
4. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. СПб.: Лань, 2007. 688 с.
5. Остапенко, В. Телеграфное уравнение. Краевые задачи / В. Остапенко. Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Pub, 2012. 272 с.
6. Дубнищев, Ю. Н. Колебания и волны / Ю. Н. Дубнищев. СПб.: Лань, 2011. 384 с.
7. Ласый, П. Г. Приближенное решение одной задачи об электрических колебаниях в проводах с помощью полилогарифмов / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2017. Т. 60, № 4. С. 334–340. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340.
8. Ласый, П. Г. Применение полилогарифмов к приближенному решению неоднородного телеграфного уравнения для линии без искажений / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2019. Т. 62, № 5. С. 413–421. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-5-413-421.
9. Ласый, П. Г. Приближенное решение смешанной задачи для телеграфного уравнения с однородными краевыми условиями первого рода с помощью специальных функций / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2021. Т. 64, № 2. С. 152–163. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2021-64-2-152-163.
10. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

Поступила 10.01.2023
Подписана к печати 14.03.2023
Опубликована онлайн 31.05.2023

REFERENCES

1. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. (1962) *Differential Equations of Mathematical Physics.* Moscow, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 767 (in Russian).
2. Vladimirov V. S., Zharinov V. V. (2000) *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Fizmatlit Publ, 400 (in Russian).
3. Tikhonov A. N. Samarsky A. A. (2004) *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ, 798 (in Russian).
4. Myshkis A. D. (2007) *Lectures on Higher Mathematics*. Saint-Petersburg, Lan Publ, 688 (in Russian).
5. Ostapenko V. (2012) *Telegraph Equation. Boundary Problems.* Saabrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 272 (in Russian).
6. Dubnishchev Yu. N. (2011) *Vibrations and Waves*. Saint-Petersburg, Lan Publ, 384 (in Russian).
7. Lasy P. G., Meleshko I. N. (2017) Approximate Solution of One Problem on Electrical Oscillations in Wires with the Use of Polylogarithms. *Energetika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edenenii SNG = Energetika. Proceedings of the CIS Higher Educational Institutions and Power Engineering Associations*, 60 (4), 334–340. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340 (in Russian).
8. Lasy P. G., Meleshko I. N. (2019) Application of Polylogarithms to the Approximate Solution of the Inhomogeneous Telegraph Equation for the Distortionless Line. *Energetika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edenenii SNG = Energetika. Proceedings of the CIS Higher Educational Institutions and Power Engineering Associations,* 62 (5), 413–421. https://doi. org/10.21122/1029-7448-2019-62-5-413-421 (in Russian).
9. Lasy P. G., Meleshko I. N. (2021) Approximate Solution of Mixed Problem for Telegrapher Equation with Homogeneous Boundary Conditions of First Kind Using Special Functions. *Energetika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edenenii SNG = Energetika. Proceedings of the CIS Higher Educational Institutions and Power Engineering Associations*, 64 (2), 152–163. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2021-64-2-152-163 (in Russian).
10. Polyanin A. D. (2001) *Handbook of Linear Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Fizmatlit Publ, 576 (in Russian).

Received: 10.01.2023
Accepted: 14.03.2023
Published online: 31.05.2023