

**БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**  
**Машиностроительный факультет**  
Кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»

**НИРС МСФ-2023**

*Сборник материалов 79-й студенческой  
научно-технической конференции БНТУ*

*Секции:*

*«Теоретическая механика»,*

*«Механика материалов и конструкций»*

28 апреля 2023 г.

Электронное издание

Минск, 2023

УДК [531+621.01:531.8]

ББК 22.21я43

30.12я43

Редакционная коллегия:

Ю.В. Василевич, А.И. Дудяк, Л.Н. Беяцкая, С.В. Гончарова,  
Ж.Г. Дикан, Т.Н. Микулик, М.В. Мышковец, В.М. Хвасько, В.А. Чигарев

С о с т а в и т е л и:

Л.Н. Беяцкая, Т.Н. Микулик

Издание включает материалы 79-й студенческой научно-технической конференции, прошедшей на базе кафедры «Теоретическая механика и механика материалов» МСФ БНТУ.

© Белорусский национальный  
технический университет, 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>СЕКЦИЯ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» .....</b>	<b>5</b>
Ю.В. Артемьев, А.А. Дятел, гр. 10903121. РАСЧЕТ МЕХАНИЗМА ВЕРТИКАЛЬНОГО ПОДЪЕМНИКА НА ОСНОВЕ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ. <i>Научный руководитель – ст. преп. Хвасько В.М.</i> .....	5
А.О. Иванцевич., Д.А. Буян, гр. 10903121. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ПРУЖИНОЙ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ И ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. <i>Научный руководитель – ст. преп. Хвасько В.М.</i> .....	9
М.А. Цыбульский, гр.10305221. МЕТОДИКА РАСЧЁТА СПОСОБА ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНСТРУКЦИИ С ЗАДАННОЙ ОЦЕНКОЙ РЕАКЦИИ ОПОР. <i>Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, профессор Василевич Ю.В.</i> .....	13
М.А. Цыбульский, гр. 10305221. РАСЧЁТ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТВЁРДЫХ ТЕЛ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ. <i>Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, профессор Василевич Ю.В.</i> .....	17
И.А. Алейников, гр. 10305221. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ. <i>Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, профессор Василевич Ю.В.</i> .....	20
А.А. Антоненко, гр. 11502122. РАСЧЕТ СИЛЫ ТЯГИ НА ВЕДУЩИХ КОЛЕСАХ КОЛЕСНОГО ДВИЖИТЕЛЯ МАШИН ИНЖЕНЕРНОГО ВООРУЖЕНИЯ. <i>Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Чигарев В. А.</i> .....	22
Е.А. Гончарова, гр. 11001122. О СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ. <i>Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Беляцкая Л. Н.</i> .....	25
Р.А. Цыганков, гр. 11502122. ИЗДЕЛИЕ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА И РАСЧЕТ МДКЗ. <i>Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Чигарев В. А.</i> .....	28
Н.Я. Шпилевский , гр. 11001122. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЯХ И ПРИ ИХ СТРОИТЕЛЬСТВЕ. <i>Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Микулик Т.Н.</i> .....	31
А.В. Помелов , гр. 10112121. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ СОПРОТИВЛЕНИЯ. <i>Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Микулик Т. Н.</i> .....	35

А.С. Чепелев, гр. 11201422; ТС.Мышковец, гр. 9 ДЭиВИ. ПОДЪЁМ ОПОРЫ С ПОМОЩЬЮ ПАДАЮЩЕЙ СТРЕЛЫ. <i>Научный руководитель – ст. преп. Мышковец М.В.</i> .....	37
С.В. Сацута , гр.11201322; ТС.Мышковец, гр. 9 ДЭиВИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ В ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКЕ. <i>Научный руководитель – ст. преп. Мышковец М.В.</i> .....	42
<b>СЕКЦИЯ «МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ»</b> .....	45
И.Г. Костюк, гр. 10301122. МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ. <i>Научный руководитель – ст. преп. Дикан Ж.Г.</i> .....	45
Е. Стельмах, гр.10301122. ДЕФОРМАЦИЯ СДВИГА В МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ. <i>Научный руководитель – ст. преп. Дикан Ж.Г.</i> .....	49
З.С. Сергеев, И.А.Тавгень, гр. 10111121. РАСЧЕТ НА ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ. <i>Научный руководитель – д-р техн. наук, профессор Дудяк А. И.</i> .....	52
Н.А. Махнач, А.М.Мезенцев, гр. 11006121. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ–СЖАТИИ. <i>Научный руководитель – ст. преп. Гончарова С. В.</i> .....	55
А.А. Скачко, С.И.Охремчик, гр.11006121. ПРИМЕНЕНИЕ ФЕРМ В СУДОСТРОЕНИИ. <i>Научный руководитель – ст. преподаватель Гончарова С. В.</i> .....	59

## СЕКЦИЯ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

УДК 531.32

### РАСЧЕТ МЕХАНИЗМА ВЕРТИКАЛЬНОГО ПОДЪЕМНИКА НА ОСНОВЕ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Студенты гр. 10903121 Ю.В. Артемьев, А.А. Дятел  
Научный руководитель – ст. преподаватель Хвасько В.М.  
Белорусский национальный технический университет  
Минск, Республика Беларусь

Вертикальный подъемник представляет собой простейший механизм, с помощью которого поднимают и опускают различные грузы с помощью троса, наматываемого на барабан. Расчет подобных механизмов можно проводить на основе дифференциального уравнения динамики точки, принимая за материальную точку груз и пренебрегая весом троса и барабана. Такие расчеты применяют для проектирования и анализа различных технических систем, где перемещаются грузы, например, при проектировании грузовых лифтов для высотных зданий, систем транспортировки грузов в промышленности, где необходимо рассчитывать максимальную скорость подъема грузов, максимальную нагрузку на этаж и время подъема.

Дифференциальное уравнение движения точки записывают в виде [1]

$$m \bar{a} = \sum \bar{F}_k, \quad (1)$$

где  $m$  – масса материальной точки;

$\bar{a}$  – ускорение точки;

$\sum \bar{F}_k$  – сумма всех действующих на точку внешних сил.

Решение основного уравнения динамики точки сводится к проецированию уравнения (1) на ось, вдоль которой движется материальная точка, и последующему его решению. При этом решение проводят как решение первой (прямой) задачи динамики точки, определяя проекцию ускорения точки путем последовательного дифференцирования координаты точки (или закона движения) [1].

Кроме этого, движение груза вдоль стержня можно рассмотреть как сложное движение по отношению к двум системам отсчета (подвижной и неподвижной), определив таким образом абсолютную скорость груза [2]:

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r, \quad (2)$$

где  $\bar{v}_e$  – скорость груза по отношению к неподвижной системе отсчета;

$\overline{v}_r$  – скорость груза по отношению к подвижной системе отсчета.

Затем находят абсолютное ускорение груза [2]:

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_c, \quad (3)$$

где  $\overline{a}_e$  – ускорение груза по отношению к неподвижной системе отсчета;

$\overline{a}_r$  – ускорение груза по отношению к подвижной системе отсчета;

$\overline{a}_c$  – кориолисово ускорение груза.

Рассмотрим применение изложенной методики на следующем примере механизма, состоящего из груза  $A$  массой  $m = 3$  кг, который опускается по гладкому вертикальному стержню с помощью невесомого нерастяжимого троса, сматываемого с барабана  $D$  с постоянной скоростью  $u = 2$  м/с. Трос перекинут через блок  $B$  малых размеров, отстоящий от стержня на расстоянии  $l = 4$  м (рисунок 1). Требуется рассчитать силу натяжения троса при  $h = l$  [3].

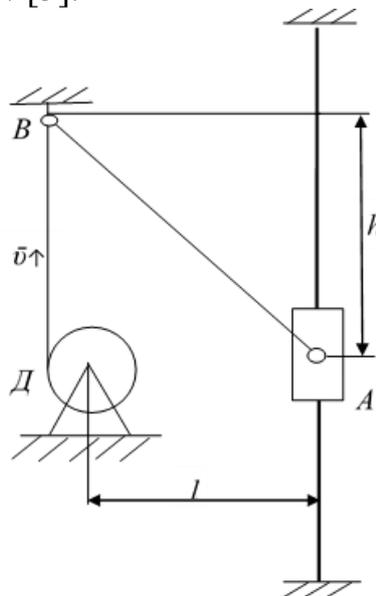


Рисунок 1

Выберем ось  $x$  с положительным направлением вниз и началом координат на уровне блока  $B$ . Дополним схему действующими силами: силой груза  $m\vec{g}$ , силой натяжения троса  $\vec{T}$  и нормальной реакцией  $\vec{N}$  (рисунок 2).

Запишем дифференциальное уравнение движения груза  $A$  в векторной форме:

$$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{T} + \overline{N}.$$

Спроецируем уравнение (1) на ось  $x$ :

$$ma_x = mg - T \sin \alpha.$$

Откуда 
$$T = \frac{m(g - a_x)}{\sin \alpha}.$$

Проекцию ускорения  $a_x$  можно найти двумя способами.

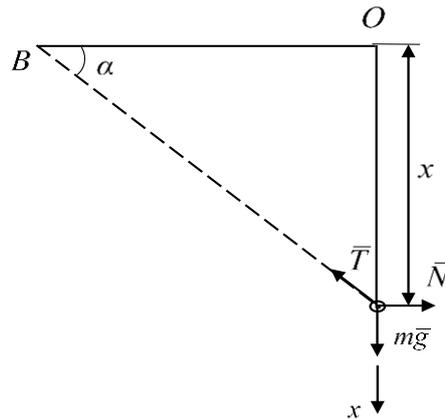


Рисунок 2

**1-й способ.** Запишем из геометрии уравнение связи:

$$(AB)^2 = l^2 + x^2. \quad (4)$$

Продифференцируем уравнение (4) по времени:

$$2AB \frac{d(AB)}{dt} = 2x x' \text{ или } AB u = x \cdot x',$$

откуда

$$v_x = x' = u \frac{AB}{x}. \quad (5)$$

Продифференцировав уравнение (5) по времени, получим выражение для проекции ускорения

$$a_x = \frac{u}{x^2} \left( x \frac{d(AB)}{dt} - AB x' \right) = \frac{u}{x^2} \left( x u - (AB)^2 \frac{u}{x} \right) = -\frac{u^2 l^2}{x^3}.$$

В заданном положении при  $x = l$

$$a_x = -\frac{u^2}{l} = -\frac{4}{4} = -1 \text{ м/с}.$$

**2-й способ.** Будем рассматривать движение точки  $A$  как сложное по отношению к двум системам отсчёта: неподвижной, связанной со стержнем, и подвижной, связанной с ветвью  $AB$  (рисунок 3).

Абсолютная скорость точки  $A$  согласно уравнению (2)

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r,$$

где  $\bar{v}_e$  – переносная скорость ( $\bar{v}_e \perp AB$ ),

$\bar{v}_r$  – относительная скорость ( $\bar{v}_r \parallel AB$ ), причем  $v_r = u$ , а  $\bar{v} \parallel Ox$ .

Спроецируем векторное уравнение (2) на ось  $y$ :

$$0 = v_e \sin \alpha + v_r \cos \alpha,$$

откуда  $v_e = v_r \operatorname{ctg} \alpha = u \operatorname{ctg} \alpha = \omega_e AB$ ,

где  $\omega_e$  – угловая скорость вращения ветви  $AB$  троса, и в заданном

положении при  $\alpha = 45^\circ$   $AB = l\sqrt{2} \Rightarrow \omega_e = \frac{u}{l\sqrt{2}}$ .

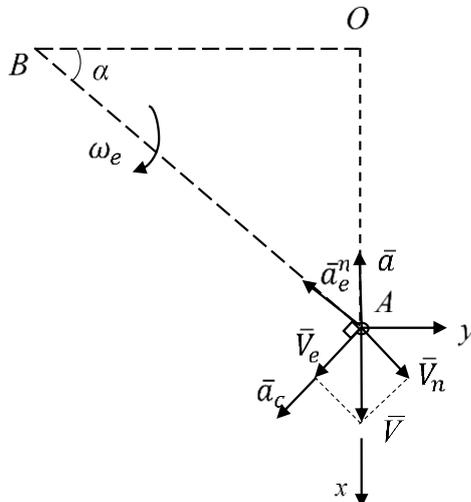


Рисунок 3

Абсолютное ускорение точки  $A$  согласно уравнению (3)

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c,$$

где  $a_r$  – относительное ускорение, причем  $a_r = 0$ , так как  $v_r = u = \text{const}$ ;

$a_e^n$  – центростремительное ускорение переносного движения, причем

$$a_e^n = \omega_e^2 AB = \frac{u^2}{l\sqrt{2}} \quad (\bar{a}_e^n \text{ направлен от т. } A \text{ к т. } B);$$

$a_c$  – кориолисово ускорение, причем  $a_c = 2\omega_e v_r = 2 \frac{u}{l\sqrt{2}} u = \frac{u^2 \sqrt{2}}{l}$

(вектор  $\bar{a}_c$  совпадает с вектором  $\bar{v}_e$  согласно правилу Жуковского [1]).

Вектор  $\bar{a} \parallel Ox$ .

Проецируем уравнение (3) на прямую  $AB$ :

$$a = a_e^n \sqrt{2} = \frac{u^2}{l\sqrt{2}} \sqrt{2} = \frac{u^2}{l}, \text{ а проекция } a_x = -a = -\frac{u^2}{l}.$$

Тогда вычислим силу натяжения троса:

$$T = \frac{m(g - a_x)}{\sin \alpha} = \frac{3(9,8 + 1)}{0,7} = 46,29 \text{ Н.}$$

Таким образом, простейшие механизмы можно успешно рассчитывать с помощью дифференциальных зависимостей динамики точки, а также используя теоремы о сложении скоростей и ускорений из кинематики сложного движения точки [2].

## Литература

1. Горбач, Н.И. Теоретическая механика. Динамика: учебное пособие / Н.И. Горбач. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2012. – 320 с.
2. Мышковец, М.В. Теоретическая механика. Кинематика [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения / М.В. Мышковец, В.Д. Тульев; БНТУ, Кафедра "Теоретическая механика". – Минск: БНТУ, 2016. Режим доступа: <https://rep.bntu.by/handle/data/26770>.
3. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

УДК 531.21

### **РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ПРУЖИНОЙ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ И ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Студенты гр. 10903121 А.О. Иванцевич, Д.А. Буян  
*Научный руководитель – ст. преподаватель Хвасько В.М.*

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Республика Беларусь

Стержневая система — это инженерная конструкция, состоящая из нескольких стержней, связанных между собой соединительными элементами (например, шарнирами). Применение пружины в таких системах позволяет изменять жесткость системы, а также компенсировать деформации, возникающие в результате действия на систему внешних сил [1]. Стержневые системы с пружинами широко применяются в различных областях, включая машиностроение, авиацию, строительство и другие инженерные отрасли.

Расчет стержневых систем является важным этапом в проектировании инженерных конструкций, однако статический расчет подобных систем ограничивается определением реакций связей, возникающих под действием внешних сил, то есть заданной нагрузки и собственного веса однородных стержней. Для системы стержней, находящейся в равновесии, можно составлять уравнения статики для каждого стержня в отдельности, комбинации двух связанных стержней, а также для всей составной конструкции в целом. При этом необходимо учитывать внутренние силы, с которыми стержни системы действуют друг на друга [2].

В качестве уравнений равновесия для плоской стержневой системы можно использовать следующие три уравнения [1]:  $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$  – суммы проекций действующих сил на оси координат  $x$  и  $y$  и  $\sum M = 0$  – сумма моментов всех сил относительно выбранной точки. Количество и комбинация уравнений зависят от конкретной задачи.

Расчет стержневых систем с помощью принципа возможных перемещений позволяет оценить линейные и угловые перемещения отдельных стержней и соединительных элементов в системе и определить реакции связей из уравнения возможных работ, которое можно записать в виде [3]

$$\sum \delta \bar{A}_i = \sum m_z(\bar{F}_i) \delta \varphi = 0,$$

где  $m_z(\bar{F}_i)$  – момент силы  $F_i$  относительно оси вращения  $z$  стержня;

$\delta \varphi$  – возможный угол поворота стержня.

Рассмотрим применение уравнений равновесия статики и принципа возможных перемещений на примере стержневой системы с пружиной, расположенной в вертикальной плоскости таким образом, что  $AC = OC = 5$  м (рисунок 1). Будем считать, что стержни 1 и 2 однородны и имеют вес  $P_1 = 10$  Н и  $P_2 = 12$  Н соответственно. Требуется определить силу натяжения пружины, если в положении системы, изображенном на рисунке 1,  $\angle ABO = 90^\circ$ ,  $\angle OAB = \alpha = 30^\circ$ , а точки  $O$ ,  $C$  и  $A$  лежат на одной прямой [4].

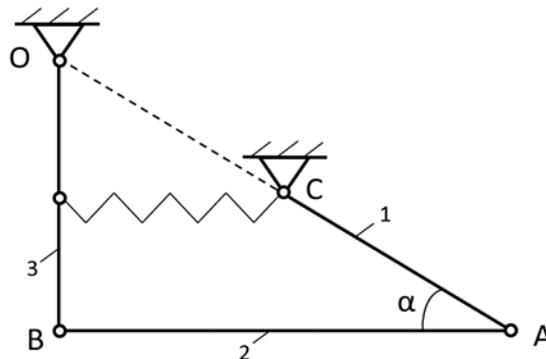


Рисунок 1

### 1-й способ. Решение с помощью уравнений статики.

При изучении равновесия составных конструкций (системы тел) можно рассматривать равновесие каждой составной части в отдельности, а также комбинацию составных частей [1].

Рассмотрим равновесие стержня  $AB$ . При этом внутренние силы взаимодействия между составными частями конструкции учтем в виде неизвестных реакций в шарнирах  $A$  и  $B$  –  $\overline{X}_A$ ,  $\overline{Y}_A$  и  $\overline{X}_B$ ,  $\overline{Y}_B$  (рисунок 2, а).

Запишем уравнение равновесия – сумму моментов относительно шарнира  $A$ :

$$\sum M_A = 0; \quad P_2 \frac{AB}{2} - Y_B AB = 0. \quad (1)$$

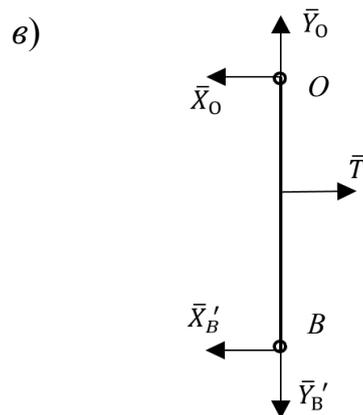
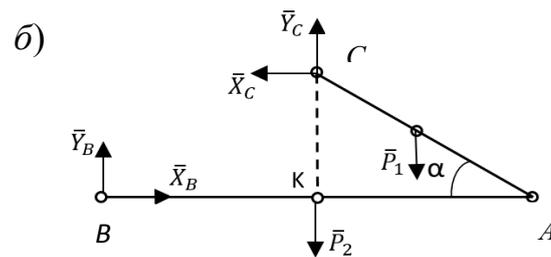
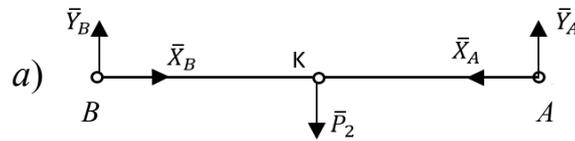


Рисунок 2

Откуда  $Y_B = \frac{P_2}{2} = 6$  Н.

Рассмотрим равновесие системы двух стержней  $CAB$ .

Здесь также учтем силы взаимодействия между составными частями в виде реакций шарнира  $B$  и покажем реакции шарнирно-неподвижной опоры  $C$   $\overline{X_C}$  и  $\overline{Y_C}$  (рисунок 2, б).

Из геометрии очевидно, что  $\cos \alpha = \frac{AB}{2l} \Rightarrow AB = 2l \cos \alpha = 8,66$  м,

$\sin \alpha = \frac{CK}{l} \Rightarrow CK = l \sin \alpha = 2,5$  м.

Для системы стержней  $CAB$  запишем сумму моментов относительно точки  $C$ :

$$\sum M_C = 0; -P_1 \frac{l}{2} \cos \alpha + X_B l \sin \alpha - Y_B l \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Находим, что  $X_B = \frac{\frac{P_1}{2} \cos \alpha + Y_B \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{P_1 + P_2}{2} \operatorname{ctg} \alpha = 19,05 \text{ Н.}$

Рассмотрим равновесие стержня  $OB$ . Покажем реакции шарнира  $B$ :  $\overline{X'_B}$  и  $\overline{Y'_B}$  (причем  $|\overline{X_B}| = |\overline{X'_B}|, |\overline{Y_B}| = |\overline{Y'_B}|$ ) как силы взаимодействия между составными частями, реакции неподвижной опоры  $O$ ;  $\overline{X_0}, \overline{Y_0}$ , а также горизонтальную силу  $T$  натяжения пружины (рисунок 2, в).

Запишем уравнение статики – сумму моментов относительно опоры  $O$ :

$$\sum M_O = 0; T \cdot \frac{OB}{2} - X'_B OB = 0. \quad (3)$$

$$T = 2X'_B = 2X_B = (P_1 + P_2) \operatorname{ctg} \alpha = 38,1 \text{ Н.}$$

**2-й способ. Решение с помощью принципа возможных перемещений.**

Возможными перемещениями стержневой системы будут угловые перемещения  $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3$  соответственно (рисунок 3).

Установим взаимосвязь между ними:

$$\delta S_A = \delta\varphi_1 \text{ (стержень } AC \text{ совершает вращательное движение);}$$

$\delta S_B = \delta\varphi_3 OB = \delta\varphi_3 2l \sin \alpha$  (стержень  $OB$  совершает вращательное движение).

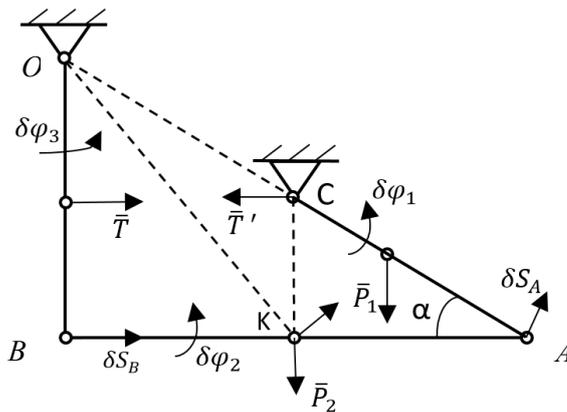


Рисунок 3

Проекции возможных перемещений точек  $A$  и  $B$  на прямую  $AB$  равны (стержень  $AB$  совершает плоское движение). Тогда  $\delta S_B = \delta S_A \sin \alpha$  или  $\delta\varphi_3 2l \sin \alpha = \delta\varphi_1 l \sin \alpha$ .

То есть  $2\delta\varphi_3 = \delta\varphi_1$ . Так как шарнир  $O$  является мгновенным центром перемещений для стержней  $AB$  и  $OB$ , то  $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_3$ .

Запишем уравнение возможных работ для системы стержней:

$$\sum \delta A_i = -P_1 \frac{l}{2} \cos \alpha \cdot \delta\varphi_1 - P_2 l \cos \alpha \cdot \delta\varphi_2 + T l \sin \alpha \cdot \delta\varphi_3 = 0$$

или 
$$-P_1 \frac{l}{2} \cos \alpha \cdot 2\delta\varphi_3 - P_2 l \cos \alpha \cdot \delta\varphi_3 + T l \sin \alpha \cdot \delta\varphi_3 = 0.$$

Разделив уравнение на  $\delta\varphi_3 \neq 0$ , находим, что

$$T = \frac{(P_1 + P_2)\cos\alpha}{\sin\alpha} = (P_1 + P_2)\operatorname{ctg}\alpha = 38,1 \text{ Н.}$$

Таким образом, реакции связей в составных конструкциях можно равнозначно находить с помощью уравнений равновесия статики и с помощью принципа возможных перемещений.

### *Литература*

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С.М.Тарг. – 12-изд., стер. – М.: Высшая школа, 2002. – 416 с.
2. Тульев В.Д. Теоретическая механика. Статика [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения / В.Д. Тульев, М.В. Мышковец; БНТУ, Кафедра "Теоретическая механика". – Минск: БНТУ, 2013. – Режим доступа: <https://rep.bntu.by/handle/data/5030>.
3. Кудина, Л.И. Определение реакций опор составной конструкции с помощью принципа возможных перемещений: методические указания / Л.И. Кудина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2013. – 34 с.
4. Сборник олимпиадных задач по теоретической механике: в 3 ч. / А.И. Попов [и др.]– Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. Ч. 1. Статика. – 96 с.

### *УДК 531.2*

## **МЕТОДИКА РАСЧЁТА СПОСОБА ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНСТРУКЦИИ С ЗАДАННОЙ ОЦЕНКОЙ РЕАКЦИИ ОПОР**

Студент гр.10305221 М.А. Цыбульский

*Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, профессор Василевич Ю.В.*

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Республика Беларусь

Исследуемая схема конструкции изображена на рисунке 1, а исходные данные содержатся в таблице 1.

Определение реакций опор твердого тела ( $C_1$ ).

Таблица 1 – Исходные данные

$P$ , кН	$M$ , кН·м	$q$ , кН/м	Исследуемая реакция
25	-	1	$M_A$

Необходимо определить реакции опор для того способа закрепления, при котором реакция  $M_A$  в заделке имеет наименьшее числовое значение.

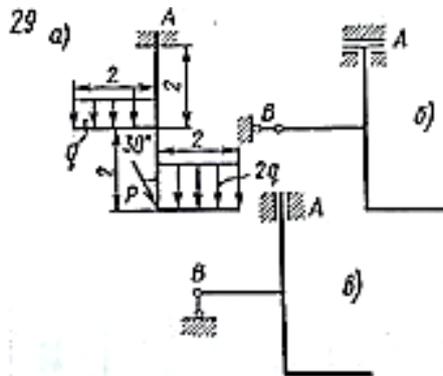


Рисунок 1. – Исследуемая схема

Рассмотрим систему уравнивающихся сил, приложенных к конструкции. Действие связей на конструкцию заменяем их реакциями (рисунки 2, 3, 4): в схеме *a* –  $M_A$ , в схеме *б* –  $X_B$ ,  $M'_A$ , в схеме *в* –  $X_A$ ,  $Y_B$ ,  $M''_A$ . Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью  $q$  заменяем равнодействующей:

$$Q_1 = q \cdot 2 = 2 \text{ кН};$$

$$Q_2 = 2q \cdot 2 = 4 \text{ кН}.$$

Чтобы выяснить, в каком случае момент в заделке является наименьшим, найдем его для всех трех схем, не определяя пока остальных реакций.

Для схемы *a*:

$$\sum M_{iA} = 0; \quad Q_1 + P \sin 30^\circ \cdot AD - Q_2 - M_A = 0;$$

$$M_A = Q_1 + P \sin 30^\circ - Q_2 = 2 - 4 + 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для схемы *б*

$$\sum X_{iB} = 0; \quad -X_B + P \sin 30^\circ = 0;$$

$$X_B = P \sin 30^\circ = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_i = 0; \quad -X_B AC + Q_1 + P \sin 30^\circ AD - Q_2 + M'_A = 0;$$

$$\sum M_i = 0; \quad -X_B AC + Q_1 + P \sin 30^\circ AD - Q_2 + M'_A = 0;$$

$$M'_A = X_B AC - Q_1 - P \sin 30^\circ AD + Q_2 = 12,5 \cdot 2 - 2 - 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = \\ = -23 \text{ кН} \cdot \text{м} - \text{min}.$$

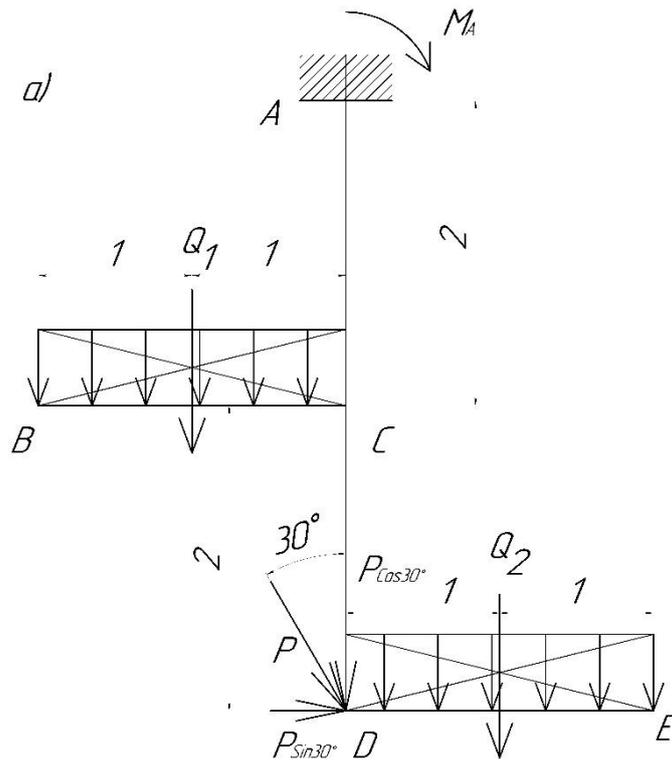


Рисунок 2. – Схема а рисунка 1

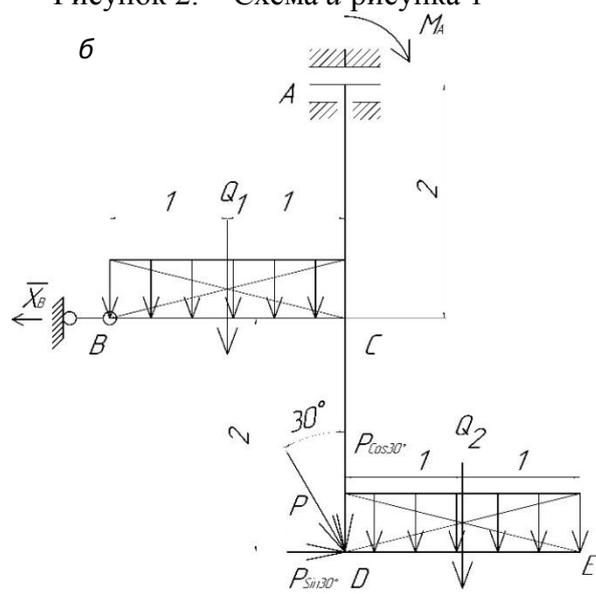


Рисунок 3. – Схема б рисунка 1

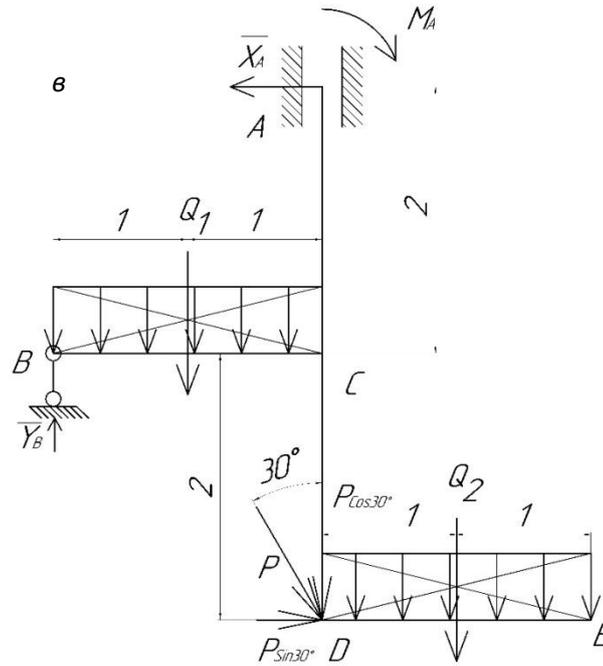


Рисунок 4. – Схема в рисунка 1

Для схемы в

$$\sum Y_i = 0; Y_B - Q_1 - Q_2 - P \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_B = Q_1 + Q_2 + P \cos 30^\circ = 2 + 4 + \frac{25\sqrt{3}}{2} = +27,65 \text{ кН};$$

$$\sum M_{iA} = 0; Q_1 - P \sin 30^\circ \cdot AD - Q_2 - Y_B \cdot BC + M''_A = 0;$$

$$M''_A = -Q_1 + P \sin 30^\circ \cdot AD + Q_2 + Y_B \cdot BC =$$

$$= -2 + \frac{25}{2} \cdot 4 + 4 + 27,65 \cdot 2 = 107,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, наименьший момент в заделке получается при закреплении бруса по схеме б).

Определим остальные опорные реакции для этой схемы:

$$\sum X_i = 0; -X_A + P \sin 30^\circ;$$

$$X_A = P \cdot \sin 30^\circ = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ кН}.$$

Результаты расчета приведены в таблице 2.

Таблица 2

Схемы	M <sub>A</sub> , кН	Силы, кН		
		X <sub>A</sub>	Y <sub>B</sub>	X <sub>B</sub>
а)	48	-	-	-
б)	-23	-	-	12,5
в)	107,3	12,5	-27,65	-

## Литература

1. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
2. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов. / С.М.Тарг. – 12-изд., стер. – М.: Высшая школа, 2002. – 416 с.
3. Тульев, В.Д. Теоретическая механика. Статика [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения / В.Д. Тульев, М.В. Мышковец; БНТУ, Кафедра "Теоретическая механика". – Минск: БНТУ, 2013. – Режим доступа: <https://rep.bntu.by/handle/data/5030>.

УДК 531.1

### РАСЧЁТ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТВЁРДЫХ ТЕЛ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ

Студент гр. 10305221 М.А. Цыбульский.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, профессор Василевич Ю.В.

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Республика Беларусь

Движение груза  $1$  (рисунок 1) должно описываться уравнением

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $c$ ,  $c_{0-2}$  – некоторые постоянные.

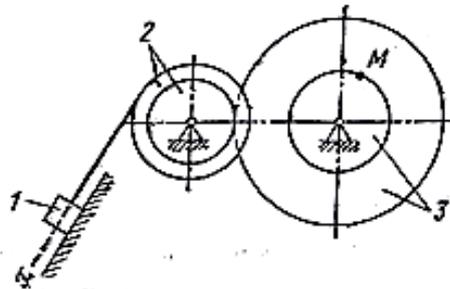


Рисунок 1. – Схема механизма

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) координата груза должна быть  $x_0$ , а его скорость –  $v_0$ .

Кроме того, необходимо, чтобы координата груза в момент времени  $t = t_2$  была равна  $x_2$ .

Определить коэффициенты  $c_0$ ,  $c_1$  и  $c_2$ , при которых осуществляется требуемое движение груза, также в момент времени  $t = t_1$  определить скорость и ускорение груза и точки  $M$  одного из колес механизма.

Необходимые данные представлены в таблице 1.

Таблица 1. – Исходные данные

Радиусы, см				Координаты и скорости груза			Расчетные моменты времени, с	
$R_2$	$r_2$	$R_3$	$r_3$	$x_0$ , см	$v_0$ , см/с	$x_2$ , см	$t_2$	$t_1$
225	220	550	225	4	6	32	2	1

Коэффициенты  $c_0$ ,  $c_1$  и  $c_2$  могут быть определены из следующих условий:

$$\text{при } t = 0 \quad x_0 = 4 \text{ см, } \dot{x}_0 = 6 \text{ см/с;} \quad (2)$$

$$\text{при } t_2 = 2 \text{ с } \quad x_2 = 32 \text{ см.} \quad (3)$$

Скорость груза  $l$

$$v = \dot{x} = 2c_2t + c_1. \quad (4)$$

Подставляя (2) и (3) в формулы (1) и (4), находим коэффициенты:

$$c_0 = 4 \text{ см, } c_1 = 6 \text{ см/с, } c_2 = 4 \text{ см/с}^2.$$

Таким образом, уравнение движения груза

$$x = 4t^2 + 6t + 4.$$

Скорость груза

$$v = \dot{x} = 8t + 6. \quad (5)$$

Ускорение груза

$$a = \ddot{x} = 8 \text{ см/с}^2.$$

Для определения скорости и ускорения точки  $M$  запишем уравнения, связывающие скорость груза  $v$  и угловые скорости колес  $\omega_2$  и  $\omega_3$ .

В соответствии со схемой механизма

$$\left. \begin{aligned} v &= R_2\omega_2; \\ r_2\omega_2 &= R_3\omega_3 \end{aligned} \right\};$$

$$\omega_2 = \frac{v}{R_2}; \quad \omega_3 = \omega_2 \frac{r_2}{R_3};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2}; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2 \frac{r_2}{R_3},$$

откуда

$$\omega_3 = \frac{v}{R_2} \cdot \frac{r_2}{R_3}.$$

Или с учетом (5) после подстановки данных

$$\omega_3 = \frac{8t + 6}{25} \cdot \frac{20}{50} = \frac{16t + 12}{125}.$$

Угловое ускорение колеса

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \frac{16}{125} = 0,128 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Скорость точки  $M$ , ее вращательное, центростремительное и полное ускорения определяются по формулам

$$v_M = r_3 \omega_3; a_M^B = r_3 \varepsilon_3; a_M^Ц = r_3 \omega_3^2; a_M = \sqrt{(a_M^Ц)^2 + (a_M^B)^2}.$$

Результаты вычислений для заданного момента времени  $t_1 = 1\text{с}$  приведены в таблице 2.

Таблица 2. – Результаты вычислений

$v$ , см/с	$a$ , см/с <sup>2</sup>	$\omega_3$ , 1/с	$\varepsilon_3$ , 1/с <sup>2</sup>	$v_M$ , см/с	$a_M^Ц$ , см/с <sup>2</sup>	$a_M^B$ , см/с <sup>2</sup>	$a_M$ , см/с <sup>2</sup>
14	8	0,224	0,128	11,2	2,51	6,4	6,88

Скорости и ускорения тела и точки  $M$  показаны на рисунке 2.

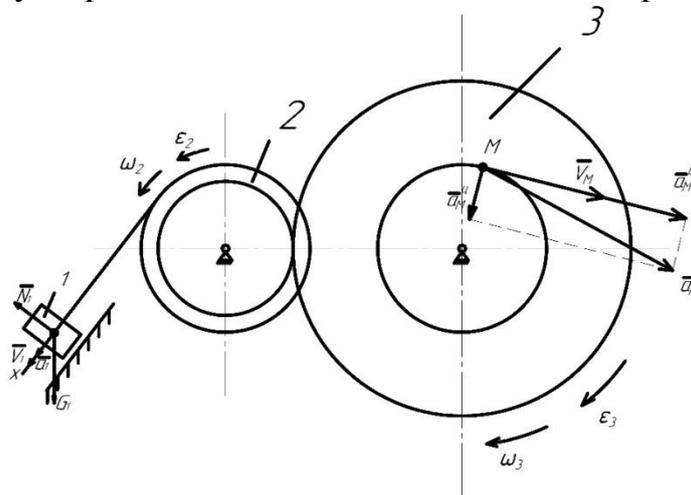


Рисунок 2

### Литература

1. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

2. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов. / С.М.Тарг. – 12-изд., стер. – М.: Высшая школа, 2002. – 416 с.

3. Мышковец, М.В. Теоретическая механика. Кинематика [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения / М.В. Мышковец, В.Д. Тульев; БНТУ, Кафедра "Теоретическая механика". – Минск: БНТУ, 2016. Режим доступа: <https://rep.bntu.by/handle/data/26770>.

УДК 531.1

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ

Студент гр. 10305221 И.А. Алейников

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, профессор Василевич Ю.В.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Определить коэффициенты  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ , при которых осуществляется требуемое движение груза (рисунок 1).

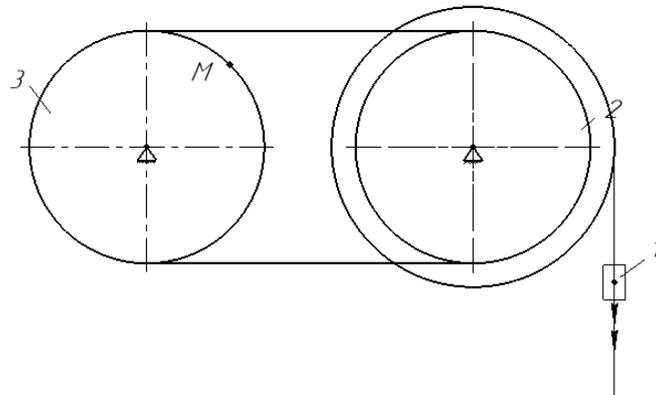


Рисунок 1. – Исходная схема

Исходные данные для расчёта даны в таблице 1.

Таблица 1. Исходные данные

Радиусы, см				Координаты и скорости груза			Расчетные моменты времени, с	
$R_2$	$R_2$	$R_3$	$r_3$	$x_0$ , см	$v_0$ , см/с	$x_2$ , см	$t_2$	$t_1$
20	30	20	-	11	8	44	3	2

Движение груза 1 описывается уравнениями

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0;$$

$$\dot{x} = 2c_2 t + c_1.$$

Определяем коэффициенты  $c_0$ ,  $c_1$ , и  $c_2$ . Также в момент времени  $t_2$  необходимо определить скорость и ускорение груза и точки  $M$ .

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) положение груза определяется координатой  $x_0 = c_0 = 11$  см и будет иметь скорость  $\dot{x} = c_1 = v_0 = 8$  м/с, отсюда  $x$

$$x = c_2 t^2 + 8t + 11.$$

На основании исходных данных  $x_2 = 44$  и  $t_2 = 3$ , тогда  $c_2$ :

$$x_2 = c_2 3^2 + 8 \cdot 3 + 11 = c_2 9 + 35 = 44 \text{ см.}$$

Отсюда находим  $c_2$  :

$$c_2 = \frac{44 - 35}{9} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Уравнение движения груза  $I$

$$x = t^2 + 8t + 11, \text{ см.}$$

1. Скорость и ускорение движения груза  $I$ :

$$v = \dot{x} = 2c_2 t + c_1 = 2t + 8 \text{ см/с}; \quad v_1 = 2 \cdot 2 + 8 = 12 \text{ см/с};$$

$$a = \ddot{x} = 2c_2 = 2 \cdot 1 = 2 \text{ см/с}^2; \quad a_1 = 2 \text{ см/с}^2.$$

2. Угловые скорости и ускорения

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{12}{30} = 0,4 \frac{1}{\text{с}} \quad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2} = \frac{2}{30} = 0,07 \frac{1}{\text{с}^2};$$

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3} = 0,4 \frac{30}{20} = 0,6 \frac{1}{\text{с}}; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2 \frac{R_2}{R_3} = 0,07 \frac{30}{20} = 0,1 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

3. Скорость и ускорение точки  $M$

$$v_M = \omega_3 R_3 = 0,6 \cdot 20 = 12 \text{ см/с};$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^{\text{н}} + \bar{a}_M^{\text{в}}.$$

$\bar{a}_M^{\text{н}} = \omega_3^2 R_3 = 0,6^2 \cdot 20 = 7,2 \text{ см/с}^2$  – центростремительное (нормальное) ускорение;

$\bar{a}_M^{\text{в}} = \varepsilon_3 R_3 = 0,1 \cdot 20 = 2 \text{ см/с}^2$  – вращательное (касательное) ускорение .

$$\bar{a}_M = \sqrt{\bar{a}_M^{\text{н}^2} + \bar{a}_M^{\text{в}^2}} = \sqrt{7,2^2 + 2^2} = 7,47 \text{ см/с}^2 .$$

### Литература

1. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

2. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов. / С.М.Тарг. – 12-изд., стер. – М.: Высшая школа, 2002. – 416 с.

3. Мышковец, М.В. Теоретическая механика. Кинематика [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения / М.В. Мышковец, В.Д. Тульев; БНТУ, Кафедра "Теоретическая механика". – Минск: БНТУ, 2016. Режим доступа: <https://rep.bntu.by/handle/data/26770>.

## РАСЧЕТ СИЛЫ ТЯГИ НА ВЕДУЩИХ КОЛЕСАХ КОЛЕСНОГО ДВИЖИТЕЛЯ МАШИН ИНЖЕНЕРНОГО ВООРУЖЕНИЯ

Студент гр. 11502122 А.А. Антоненко

*Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Чигарев В.А.*

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

### Общие сведения

Самоходные машины инженерного вооружения состоят из следующих основных элементов:

- 1) системы электрооборудования, наблюдения, защиты, связи;
- 2) трансмиссии, передающей поток энергии от двигателя ко всем рабочим механизмам;
- 3) силовой установки, предназначенной для получения механической энергии;
- 4) системы управления рабочими органами и ходовой частью;
- 5) рабочего оборудования – комплекта составных элементов машины, выполняющих рабочие операции для функционального назначения;
- 6) остова – части машины, воспринимающей основные нагрузки и предназначенной для закрепления всех элементов и систем машины;
- 7) ходовой части – комплекса узлов, обеспечивающих перемещение машины по местности. Ходовая часть машин инженерного назначения состоит из движителя и подвески.

В данной работе рассмотрим ходовую часть машин инженерного вооружения, в частности колесный движитель.

Движитель – это механизм, с помощью которого машина опирается на поверхность, а крутящий момент, передаваемый от двигателя, реализуется в нем в силу тяги, позволяя машине преодолевать различные естественные и искусственные препятствия и сопротивления, возникающие на рабочем органе.

Машины инженерного вооружения, как правило, имеют гусеничный или колесный движитель.

### Расчет силы тяги на ведущих колесах колесного движителя машин инженерного вооружения

Сила тяги  $P_T$  на ведущих колесах может быть определена, как отношение крутящего момента  $M_T$ , подводимого к колесам, к их радиусу  $r$ :

$$P_T = M_T / r.$$

При этом в данной формуле не учитываются затраты энергии на деформацию дорожного покрытия, трение внутри шины и силы инерции, обусловленные ускорением вращающихся масс колес и деталей трансмиссии в случае неравномерного движения.

Следует учитывать, что радиус колеса вследствие эластичности шины является переменной величиной.

Различают следующие радиусы автомобильных колес:

1) статический радиус колеса  $r_{ст}$  – расстояние от поверхности дороги до оси неподвижного колеса, воспринимающего вертикальную нагрузку, обусловленную силой тяжести, действующей на автомобиль (его весом  $G$ );

2) динамический радиус колеса  $r_{д}$  – расстояние от поверхности дороги до оси катящегося колеса. Динамический радиус колеса во время движения может превышать его статический радиус, поскольку в результате нагрева шины давление внутри нее увеличивается. Кроме того, под действием центробежных сил с возрастанием скорости автомобиля шина растягивается в радиальном направлении, в результате чего динамический радиус увеличивается. Динамический радиус также зависит от величины вертикальной нагрузки  $P_z$ ;

3) радиус качения колеса  $r_{к}$  – радиус условного недеформирующегося катящегося без скольжения колеса, которое с данным эластичным колесом имеет одинаковую угловую и линейную скорости.

Радиус качения колеса определяется по формуле

$$r_{к} = S / (2\pi n_{к}),$$

где  $S$  – путь, пройденный колесом;  $n_{к}$  – число оборотов колеса на пути  $S$ .

Если проскальзывание колеса относительно дороги отсутствует, что характерно для ведомого колеса, то радиусы  $r_{д}$  и  $r_{к}$  почти равны между собой. В случае полного буксования колеса его пройденный путь будет равен нулю. Согласно приведенной выше формуле, радиус качения колеса тоже будет равен нулю (рисунки 1 и 2).

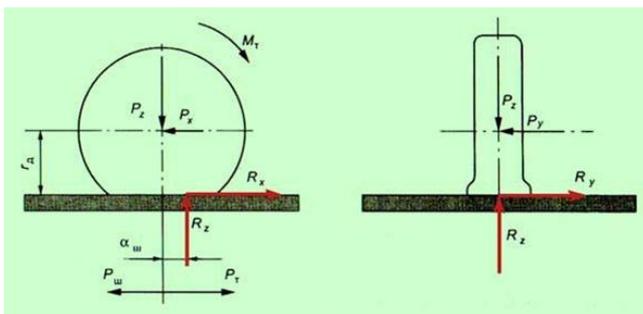


Рисунок 1. – Силы, действующие на ведущее колесо автомобиля

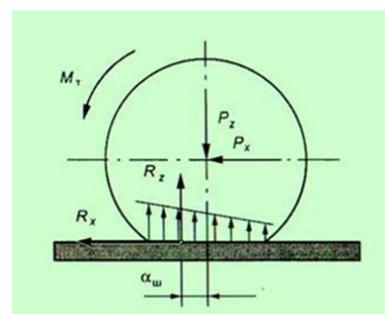


Рисунок 2. – Сопротивление, качению вызванное эластичностью шины

При движении колеса юзом (скольжение без вращения) число оборотов будет равно нулю и радиус качения  $r_{к}$  будет стремиться к бесконечности.

Также различают свободный радиус колеса  $r_{св}$ , который равен половине диаметра ненагруженного колеса при отсутствии его контакта с опорной поверхностью.

При движении на дорогах с сухим покрытием скольжение ведущих колес и изменение радиуса будут незначительны. Поэтому радиусы статический  $r_{ст}$ , динамический  $r_{д}$  и качения  $r_{к}$  при расчетах считаются одинаковыми и обозначаются буквой  $r$ .

Крутящий момент на ведущих колесах зависит от величины момента, развиваемого двигателем на коленчатом валу, передаточного числа  $i_{тр}$  трансмиссии и ее КПД –  $\eta_{тр}$  :

$$M_{т} = M_{к} i_{тр} \eta_{тр}.$$

### **Пример расчета**

Необходимо определить силу тяги на ведущих колесах на примере автомобиля КамАЗ 43269 на дорогах с сухим покрытием.

Расчет силы тяги проведем по вышеописанным формулам.

Принимаем следующие исходные данные для расчета:

1. Крутящий момент двигателя на коленчатом валу  $M_{к} = 932$  кгс · м ;
2. Передаточное число трансмиссии  $i_{тр} = 1,45$  ;
3. КПД трансмиссии  $\eta_{тр} = 0,95$  ;
4. Радиус колеса  $r = 0,63$  м.

Для определения силы тяги предварительно найдем крутящий момент на ведущих колесах:

$$M_{т} = M_{к} i_{тр} \eta_{тр} = 932 \cdot 1,45 \cdot 0,95 = 1283,83 \text{ кгс} \cdot \text{м}.$$

После определения крутящего момента определяем силу тяги на ведущих колесах:

$$P_{т} = M_{т} / r = \frac{1283,83}{0,63} = 2037,83 \text{ кгс}.$$

Таким образом, сила тяги на ведущих колесах автомобиля КамАЗ 43269 равна 2037,83 кгс.

### *Литература*

1. Олышанский, О.А. Машины инженерного вооружения: в 3 ч. – Ч. 1 / – М.: Военное изд-во, 1986. – 472 с. [Электронный ресурс]- режим доступа: [http://sptechnika.ru/wp-content/uploads/woocommerce\\_uploads/mashiny-ingener-vooruzhenie.pdf](http://sptechnika.ru/wp-content/uploads/woocommerce_uploads/mashiny-ingener-vooruzhenie.pdf)

2. Силы и моменты, действующие на ведущие колеса [Электронный ресурс] - режим доступа:

[http://k-a-t.ru/PM.01\\_mdk.01.01/7\\_teorija\\_avto\\_3/index.shtml](http://k-a-t.ru/PM.01_mdk.01.01/7_teorija_avto_3/index.shtml).

УДК 531.2

## О СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

Студент группы 11001122 Е.А. Гончарова

*Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Беляцкая Л.Н.*

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Для любой системы сил, действующих на твердое тело в одной плоскости, имеются только три независимых уравнения равновесия, каждое из которых не является следствием двух других.

Следовательно, для произвольной плоской системы сил из уравнений равновесия можно найти не более трех неизвестных величин (сил, моментов, углов, расстояний и т. д.); аналогично для произвольной пространственной системы сил – не более шести [1].

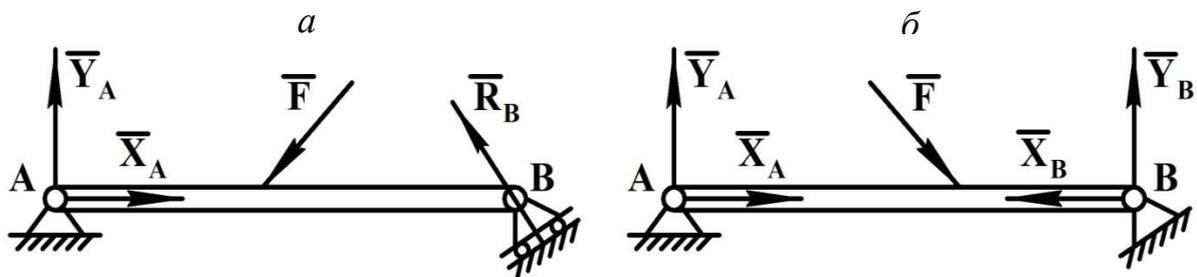
Если в какой-либо задаче число неизвестных окажется больше числа независимых уравнений равновесия, соответствующих действующей на тело системе сил, то такую задачу нельзя решить методами статики без рассмотрения деформаций тела, то есть без отказа от гипотезы абсолютно твердого тела.

Задачи, в которых число неизвестных равно или меньше числа независимых уравнений равновесия для данной системы сил, приложенных к твердому телу, называют статически определенными, а соответствующие им конструкции – статически определимыми. В противном случае задача становится статически неопределенной, а конструкция – статически неопределимой [2].

Например, на рисунке 1, *а* изображена невесомая балка, на которую действует заданная сила  $F$ , по аксиоме связей отбрасываем связи в точках  $A$  и  $B$  и заменяем их неизвестными реакциями связей:  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{R}_B$ . Получилось, что на балку  $AB$  действует плоская произвольная система сил и для нее необходимо составить три уравнения равновесия. Таким образом имеем три неизвестные и три уравнения равновесия, значит, задача статически определенная, а конструкция статически определимая. На рисунке 1, *б* соответственно мы имеем четыре неизвестные и три уравнения равновесия, следовательно, задача статически неопределенная, а конструкция неопределимая.

Однако при рассмотрении некоторых задач могут встретиться ситуации такого рода: число уравнений равновесия равно числу неизвестных, но при решении системы уравнений оказывается, что ей либо удовлетворяет бесконечно большое количество значений, либо таких значений нет вовсе.

### ПРИМЕР



*a* – статически определимая конструкция;  
*b* – статически неопределимая конструкция  
 Рисунок 1. – Схемы конструкций

Попытаемся рассчитать, например, реакции связей конструкции, изображенной на рисунке 2, особенность которой состоит в том, что линия действия силы  $\bar{S}$  проходит через ось шарнира *A*.

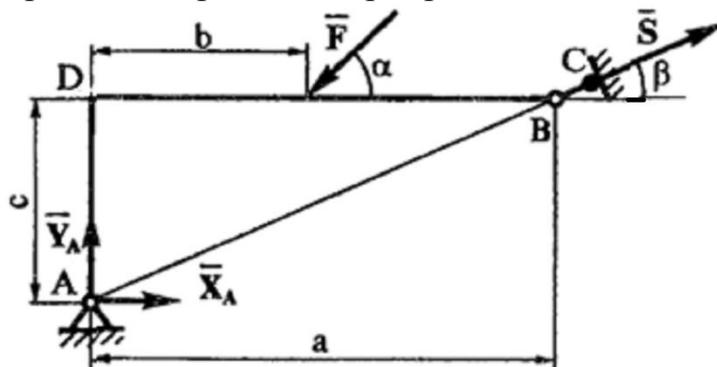


Рисунок 2. – Схема конструкции, линии действия реакций которой пересекаются в одной точке

На конструкцию действует произвольная плоская система сил, поэтому составляем три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A - F \cos \alpha - S \cos \beta = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - F \sin \alpha + S \sin \beta = 0;$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -F b \sin \alpha + F c \cos \alpha + S a \sin \beta - S c \cos \beta = 0.$$

Из уравнения моментов находим:

$$-F (b \sin \alpha - c \cos \alpha) + S (a \sin \beta - c \cos \beta) = 0. \quad (1)$$

Соответственно

$$S = F \cdot \frac{b \sin \alpha - c \cos \alpha}{a \sin \beta - c \cos \beta}. \quad (2)$$

Рассматривая треугольник  $ABD$ , получаем  $\operatorname{tg} \beta = \frac{c}{a}$ . Отсюда следует, что  $a \sin \beta - c \cos \beta = 0$ . Из данного факта могут вытекать два следующих варианта.

1. Если числитель формулы (2) не равен нулю, то величина силы  $\bar{S}$  стремится к бесконечно большому значению. Такая сила должна была бы разрушить конструкцию, однако на практике этого не происходит. Следовательно, представленный теоретический расчет, основанный на применении гипотезы об абсолютно твердом теле, оказывается здесь неприемлемым, а для определения величины силы  $\bar{S}$  надо допустить возможность деформирования как рассчитываемого тела, так и наложенных на него связей. Методы подобных расчетов разработаны в иных науках (сопротивлении материалов, строительной механике и др.).

Величины деформаций элементов конструкции здесь не могут считаться пренебрежимо малыми, так как они существенно влияют на ее геометрические параметры. Расчет реакций связей в рассматриваемом случае неразрывно связан с определением значений деформаций. Причем в положении равновесия конструкция лишается той особенности, о которой речь шла в начале расчета. Видно (рисунок 3), что линия действия силы  $\bar{S}$  уже не проходит через точку  $A$  (положение равновесия показано штрихпунктирной линией). Конструкции с такими свойствами называют мгновенно изменяемыми [3].

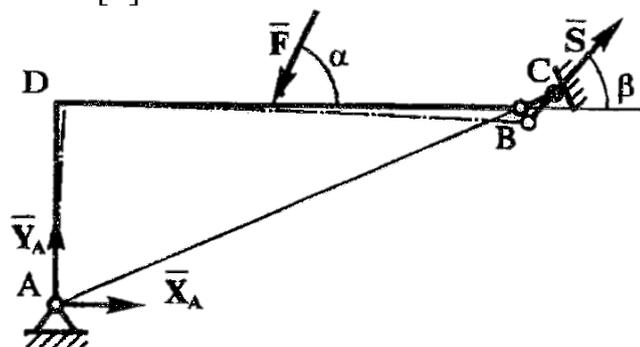


Рисунок 3. – Схема конструкции, линии действия реакций которой не пересекаются в одной точке

2. Если же в выражении (2) и числитель и знаменатель равны нулю, то величина силы  $\bar{S}$  описывается неопределенностью вида  $\frac{0}{0}$  (это может иметь место при  $\operatorname{tg} \alpha = c / b$ , то есть если линия действия силы  $\bar{F}$  проходит через точку  $A$ ).

При этом из уравнения (1) следует, что  $S$  может принимать любые значения. Соответственно и величины сил  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$  могут оказаться разными, так как они выражаются через  $S$ . То есть равновесное состояние

тела может иметь место при различных наборах значений сил реакций связей. Такая неопределенность решения задачи вызвана тем, что действующие на конструкцию силы оказались сходящимися при трех неизвестных силах. А равновесие тела в этом случае описывается только двумя независимыми уравнениями. Конструкция из мгновенно изменяемой превратилась в статически неопределимую.

Из рассмотренных вариантов видно, что уйти от статической неопределенности и получить однозначное решение задачи можно лишь в результате изменения угла наклона стержня  $BC$  и с ним – линии действия силы  $\bar{S}$ . Причем положение векторов заданных активных сил не оказывает влияния на возможность решения задачи методами статики абсолютно твердого тела. Она определяется видом и расположением механических связей.

Следовательно, при анализе статической определимости конструкции важно учитывать расположение не столько всех сил, сколько реакций связей и неизвестных активных сил.

### *Литература*

1. Курс теоретической механики / В.И. Дронг [и др.]; под общ. ред. К.С. Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 736 с.
2. Шимановский, А.О. Теоретическая маханика: учебное пособие в 2 ч.: / А.О.Шимановский. – Гомель: БелГУТ, 1998. – Ч.1: Статика. – 72 с.
3. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник для строит. спец. вузов / А.В.Дарков, Н.Н.Шапошников. – М.: Высшая школа, 1986, – 607 с.

*УДК 531.2*

## **ИЗДЕЛИЕ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА И РАСЧЕТ МДКЗ**

Студент гр. 11502122 Р.А. Цыганков

*Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Чигарев В.А.*

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Республика Беларусь

### **Общие сведения**

В пояснительной записке приведена транспортная характеристика изделия МДКЗ, закрепленного на железнодорожной платформе, при перевозке со скоростью до 100 км/ч (рисунок 1).

Устойчивость груза и прочность его закрепления на платформе подтверждаются расчетом.

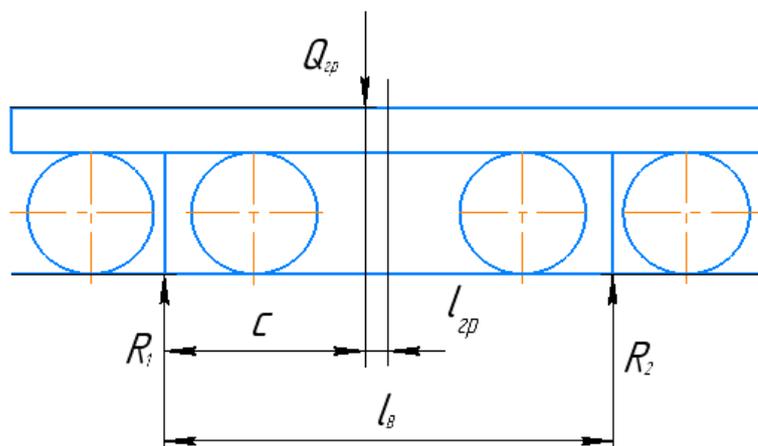


Рисунок 1. – Изделие МДКЗ, закрепленное на железнодорожной платформе  
Изделие МДК-3, погруженное на железнодорожную платформу, имеет боковую негабаритность нулевой степени до высоты 1250 мм от поверхности платформы.

*Транспортная характеристика изделия в положении транспортирования:*

масса 37,35 т; дорожный просвет 400 мм; колея 2730 мм; ширина гусеничной цепи 540 мм; длина 11865 мм; ширина 3300 мм; высота 3340 мм.

Положение центра массы:

по высоте от пола платформы 1143 мм;

по длине от оси направляющего колеса 2514 мм;

по ширине 13 мм от продольной оси изделия.

### **Расчет прочности крепления и устойчивости изделия на железнодорожной платформе**

*Исходные данные:*

$Q_{гр} = 37,35$  т – масса груза на платформе;

$l_{в} = 9,72$  м – база вагона;

$l_{гр} = 0,314$  м – расстояние от центра массы груза до вертикальной плоскости, проходящей через поперечную ось вагона;

$C = 4,546$  м – расстояние от центра массы груза до оси ближайшей к нему тележки четырехосной платформы.

Нагрузка на тележки

$$R_1 = \frac{Q_{гр}(L + C)}{L} = 19,58 \text{ тс} = 19,58 \text{ тс};$$

$$R_2 = \frac{Q_{гр}C}{L} = 17,47 \text{ тс}.$$

Допускаемая нагрузка на одну тележку  $R_{доп} = 32$  тс.

*Определение нагрузок, действующих на машину.*

Первое расчетное сочетание нагрузок соответствует соударению вагонов при маневрах, роспуске с сортировочных горок, трогании, осаживании и торможении поезда.

Продольная инерционная сила

$$F_{\text{пр}} = Q_{\text{пр}} Q_{\text{гр}} = 40375 \text{ кгс};$$
$$Q_{\text{пр}} = Q_{22} - \frac{Q_{\text{гр}} (Q_{22} Q_{85})}{63} = 1081 \text{ кгс/т},$$

где  $Q_{22} = 1200$  кгс/т,  $Q_{85} = 1000$  кгс/т – удельные величины продольной инерционной силы при массе брутто вагонов соответственно 22 и 85 т.

Сила трения  $F_{\text{тр}} = Q_{\text{гр}} M = 11,2$  тс,  $M = 0,3$  – коэффициент трения.

Суммарная нагрузка на элементы крепления груза на платформе

$$F_{\text{пр}} = F_{\text{пр}} - F_{\text{тр}} = 40,4 - 11,2 = 29,2 \text{ тс} .$$

### **Силы, действующие во втором расчетном сочетании нагрузок**

Второе расчетное сочетание нагрузок соответствует движению поезда с наибольшей допускаемой на сети ж/д скоростью 100 км/ч.

Поперечная горизонтальная инерционная сила с учетом действия центробежной силы

$$F_{\text{п}} = a_{\text{п}} Q_{\text{гр}} = 344 \cdot 37,35 = 12850 \text{ кгс} = 12,85 \text{ тс},$$

где  $a_{\text{п}}$  – удельная величина поперечной инерционной силы, кгс на 1 т массы груза.

Вертикальная инерционная сила

$$F_{\text{в}} = a_{\text{в}} Q_{\text{гр}} = 309 \cdot 37,35 = 11540 \text{ кгс} = 11,54 \text{ тс},$$

где  $a_{\text{в}}$  – удельная величина вертикальной силы на 1 т массы груза.

Ветровая нагрузка принимается нормальной к поверхности груза:

$$W_{\text{п}} = 50 S_n = 50 \cdot 22,5 = 1125 \text{ кгс} = 1,125 \text{ тс}.$$

Сила трения

$$F_{\text{тр}} = Q_{\text{гр}} M (1000 - a_{\text{в}}) = 7,74 \text{ тс}.$$

Суммарная нагрузка на элементы крепления груза на платформе 13,22 тс.

Величина продольного усилия, воспринимаемого брусками подклинки гусениц:

$$F_{\text{пр}}^{\text{б}} = R_{\text{гб}} \Pi_{\text{б}}^{\text{пр}} \Pi_{\text{гв}}^{\text{пр}} = 108 \cdot 4 \cdot 12 = 5185 \text{ кгс}.$$

Коэффициент запаса устойчивости груза от опрокидывания вдоль вагона

$$\xi_{\text{пр}} = \frac{l_{\text{пр}}}{h_{\text{цт}} - h_{\text{у}}^{\text{пр}}} = 3,4 > h = 1,25.$$

### **Второе расчетное сочетание нагрузок**

Величина поперечного усилия, воспринимаемого брусками:

$$F_n^6 = R_{\text{гб}} \left( \Pi_{\text{гб}_1}^{\text{п}} \Pi_{\text{гб}_1}^{\text{п}} + \Pi_{\text{гб}_2}^{\text{п}} \Pi_{\text{гб}_2}^{\text{п}} \right) = 5180 \text{ кгс},$$

где  $\Pi_{\text{гб}_1}^{\text{п}} = 6$ ,  $\Pi_{\text{гб}_2}^{\text{п}} = 6$  – количество гвоздей диаметром 6 мм для крепления одного бруска.

Коэффициент запаса устойчивости изделия от опрокидывания поперек вагона

$$\xi_{\text{п}} = \frac{Q_{\text{гр}} \cdot b_{\text{п}}^0}{F_{\text{п}}(h_{\text{цт}} - h_{\text{г}}^{\text{п}}) + W_{\text{п}}(h_{\text{нп}}^{\text{п}} - h_{\text{г}}^{\text{п}})} = 3,23 > h_1 = 1,5.$$

В результате произведенного расчета установлено, что наибольшее усилие в растяжке равно 2460 кгс. Машина закрепляется растяжками на восемь нитей проволоки диаметром 6 мм. На такую растяжку допускается нагрузка 2480 кгс.

Таким образом, размещение изделия МДКЗ на платформе обеспечивает выполнение требований ТУ в части нагружения тележек и положения центра массы груза относительно продольной и поперечной осей платформы. Изделие МДКЗ может транспортироваться по железной дороге со скоростью до 100 км/ч включительно.

#### *Литература*

1. Ольшанский, О.А. Машины инженерного вооружения: в 3 ч. – Ч. 1: Общая характеристика. Машины для преодоления разрушений и механизации земляных работ / А.В. Ольшанский. – М.: Военное изд-во, 1986. – 472 с. [Электронный ресурс]- режим доступа: [http://sptechnika.ru/wp-content/uploads/woocommerce\\_uploads/mashiny-ingener-vooruzhenie.pdf](http://sptechnika.ru/wp-content/uploads/woocommerce_uploads/mashiny-ingener-vooruzhenie.pdf)

УДК 531.3

### **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЯХ И ПРИ ИХ СТРОИТЕЛЬСТВЕ**

Студент гр. 11001122 Н.Я. Шпилевский

*Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Микулик Т.Н.*

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Гидротехника (в переводе с древнегреческого означает водное мастерство) – это наука и отрасль техники. Как наука гидротехника занимается изучением водных ресурсов, методов использования их для различных хозяйственных целей и борьбы с вредными проявлениями водной стихии. После всего изучения данной науки было определено, что

гидротехнические сооружения по добыче электроэнергии, задействованные в такой науке, как гидротехника, например различные виды электростанций построенных на воде, являются самыми «чистыми» и экологичными по сравнению с иными отраслями энергетической промышленности, которые направлены на добычу электроэнергии с помощью других способов, так как гидротехнические сооружения в процессе эксплуатации работают без какой-либо переработки вредных веществ и в дальнейшем не производят выбросов в природу. Ещё одно основное отличие гидротехнических сооружений от других промышленных и гражданских зданий и сооружений заключается в том, что первые эксплуатируются, постоянно находясь в воде, которая оказывает различные виды воздействий. И для того, чтобы рассматривать различные виды воздействий на гидротехнические сооружения и сами процессы, происходящие при работе этих сооружений, гидротехника как прикладная наука тесно связана и базируется на ряде научно-технических дисциплин, основными из которых являются: теоретическая механика, строительная механика, гидравлика и гидромеханика, гидрология, гидрометрия, геология, сопротивление материалов и теория упругости.

Рассмотрим работу определённых рабочих установок или строительство самих сооружений, предназначенных для гидротехники со стороны такой науки, как теоретическая механика.

**Теоретическая механика** — наука, изучающая законы движения, равновесия и механических взаимодействий материальных тел.

Курс теоретической механики состоит из трёх разделов: кинематики, статики и динамики. Каждый из этих разделов подробно рассматривает ту или иную часть механики, на применении законов которых завязана работа различных установок, на рассматриваемых нами гидротехнических сооружениях и при непосредственном их строительстве. Дисциплина «Теоретическая механика» опирается на такие базовые дисциплины, как «Математика» и «Физика», но в свою очередь является «фундаментом» для изучения таких дисциплин, как «Сопротивление материалов» и «Строительная механика».

Механика позволяет инженеру взглянуть на работу конструкций и сооружений как на единое целое, несмотря на то, что они состоят из различных элементов, воспринимающих всевозможные внешние воздействия. Поэтому инженер должен уметь распределять внешние силы между совместно работающими элементами так, чтобы последние обладали достаточной прочностью, жесткостью, устойчивостью, экономичностью и надежностью в эксплуатации. Рассчитываемые конструкции могут быть статически определяемыми и статически неопределимыми, подверженные действию как статических, так и динамических (в том числе подвижных) нагрузок. Кроме того,

немаловажное значение для инженера имеет умение определять неизменяемость строительных конструкций.

Для того, чтобы убедиться в применении механики в гидротехническом строительстве, рассмотрим работу некоторых установок на ГЭС. С применением механики, при рассмотрении работы гидротехнических сооружений, можно с лёгкостью посчитать такие параметры:

1. Разгонная скорость вращения турбины;
2. Определение номинального диаметра рабочего колеса;
3. Определение номинальной скорости вращения рабочего колеса;
4. Определение угловой скорости вращения колеса гидротурбины и многие другие.

Но остановимся на процессе строительства и рассмотрим его более детально со стороны механики.

В начале обучения по данной специальности, когда студент не имеет особого представления о технических задачах, которые ему предстоит решать, у будущего инженера-строителя возникает вопрос, зачем ему необходимо изучать такие разделы, как «Кинематика» и «Динамика» в теоретической механике или «Динамические задачи» сопротивления материалов, ведь здания и сооружения — условно неподвижные конструкции. С таким же непониманием студенты относятся к изучению характеристик движения, изучению плоского и сферического движения, тем более — законов динамики. Поэтому очень важно показать необходимость изучения данных разделов применительно к строительным конструкциям, продемонстрировать примеры применения законов динамики, возможности упрощения решения задач с их использованием, а подчас и единственный возможный способ решения. Нельзя пренебрегать простейшим и наглядными примерами необходимости учета законов кинематики и динамики в строительных конструкциях, как, например, возникновение дополнительных нагрузок на трос, удерживающий груз. Будет наглядным провести сравнение реакции, возникающей в тросе, в трех случаях, демонстрирующих сравнение задач статики и динамики (рисунок 1, а)

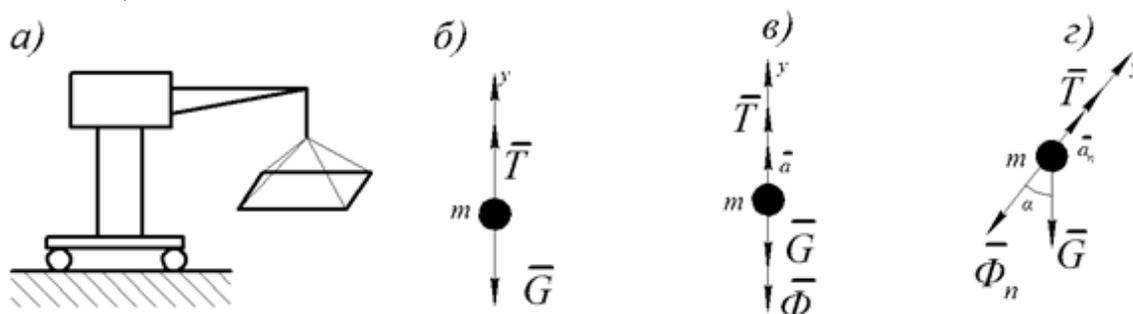


Рисунок 1

### 1. Статическая задача.

Груз массой  $m$  подвешен к неподвижному тросу или груз поднимается и опускается с постоянной скоростью (рисунок 1, б).  $v = \text{const}$ . Составляем уравнение равновесия:

$$\sum F_{iy} = T - G = 0;$$
$$T = G.$$

### 2. Динамическая задача 1.

Момент начала подъема. Подъемный механизм создает ускорение, необходимое для достижения постоянной рабочей скорости.

В соответствии с принципом Даламбера, для того, чтобы можно было составить уравнение равновесия, необходимо приложить силу инерции в сторону, обратную ускорению (рисунок 1, в).

$$0 \rightarrow v, a \neq 0, \Phi = ma.$$

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum F_{iy} = T - G - \Phi = 0;$$
$$T = G + \Phi;$$
$$T = G + aG / g.$$

### 3. Динамическая задача 2.

Сильный порыв ветра. Груз начинает раскачиваться по кривой. Возникает центростремительное ускорение (рисунок 1, г).  $a_n = v^2 / R$ .

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum F_{iy} = T - \Phi_n - G \cos \alpha = 0;$$
$$T = G \cos \alpha + G v^2 / R g.$$

Подстановка численных значений и сравнение реальных перегрузок, возникающих в тросе, наглядно демонстрируют важность учета динамических процессов при расчетах, объясняют причины возможных поломок при запуске грузоподъемных механизмов. При объяснении решения важно подчеркнуть, что без принципа Даламбера решение подобных задач вообще невозможно.

Таким образом, рассмотрев на данном примере применение теоретической механики в строительстве, можно убедиться в необходимости её изучения по данной специальности и заинтересовать студентов, начинающих курс изучения теоретической механики, или в более подробном изучении заинтересовать тех студентов, которые уже изучают данную дисциплину.

### *Литература*

1. Гидротехнические сооружения комплексных гидроузлов: учебное пособие / П.М. Богославчик [и др.]: под ред. Г.Г. Круглова. – Минск: БНТУ, 2006. – 585 с.

2. Каверина, Э. В. Применение методов динамики к расчету строительных конструкций / Э. В. Каверина, Е. А. Татаркина. — Текст: непосредственный // Педагогическое мастерство: материалы VI Междунар. науч. конф. (г. Москва, июнь 2015 г.). — М.: Буки-Веди, 2015. — С. 175-178. — URL: <https://moluch.ru/conf/ped/archive/151/8209/>.

УДК 531.3

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Студент группы 10112121 А.В. Помелов

Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Микулик Т. Н.

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Республика Беларусь

Физическое явление называется колебательным, если его протекание во времени характеризуется определенной периодичностью, повторяемостью. Свободные колебания – это такие колебания, которые происходят под действием только внутренних сил системы.

Предположим, что на материальную точку  $M$  (рисунок 1) действует только восстанавливающая сила; сила сопротивления и возмущающая сила равны нулю. Пусть начальная скорость точки  $M$  направлена по прямой  $MO$  или равна нулю. В таком случае точка  $M$  будет двигаться по прямой  $OM$  (по оси  $Ox$ ), дифференциальное и кинематическое уравнения ее движения

$$x + k^2 x = 0;$$

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t) + \frac{h \sin(pt - \delta)}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}.$$

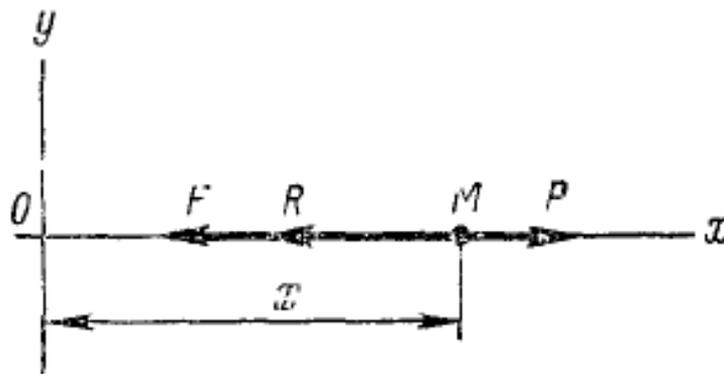


Рисунок 1. – Схема сил

Если сила сопротивления  $R=0$ , то  $a=0$ , так как  $R=-ax$  и  $x$  переменная величина. Если же  $a=0$ , то равно нулю и  $n$ , так как  $n = \frac{a}{2m}$ .

Равенство нулю возмущающей силы означает, что равны нулю  $H$  и  $h$ . В таком случае уравнение принимает вид

$$x + k^2 x = 0,$$

а его интеграл

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Этому уравнению придадим более удобный вид, для чего выразим постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  через две другие постоянные величины  $A$  и  $\beta$ , однозначно связанные с  $C_1$  и  $C_2$  соотношениями

$$C_1 = A \sin \beta \text{ и } C_2 = A \cos \beta.$$

Тогда

$$x = A \sin(kt + \beta).$$

Это уравнение является одним из важнейших уравнений в теории колебаний и описывает наиболее простое колебательное движение, называемое гармоническим. Еще в древности было известно, что если некоторая точка  $M'$  (рисунок 2) равномерно движется по окружности радиуса  $O'M'$  со скоростью  $A_k$ , то проекция  $M$  этой точки на какую-либо ось  $Ox$ , лежащую в плоскости окружности, совершает гармонические колебания.

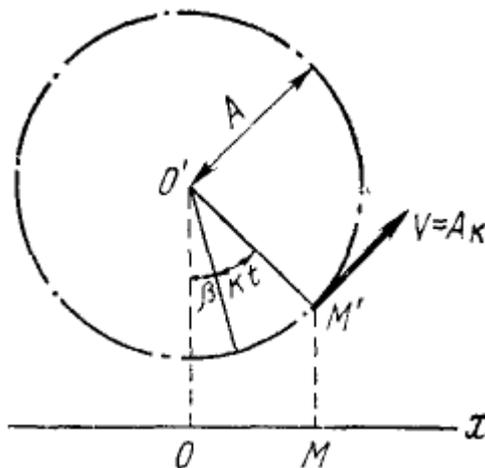


Рисунок 2. – Схема сил на окружности

Если точка  $M'$  опишет полную окружность, то она совершит одно полное колебание. Время одного полного колебания точки  $M'$  называют периодом колебаний  $\tau_0$ .

Угловая скорость  $k$ , с которой поворачивается радиус-вектор  $\overline{O'M'}$  при равномерном движении точки  $M'$ , равна циклической, круговой или угловой частоте колебаний точки  $M$ . Эту величину обычно коротко называют частотой, хотя, как будет видно из дальнейшего, оба понятия не вполне идентичны.

Период и угловая частота связаны простым соотношением, которое становится очевидным, если учесть, что  $\tau_0$  – это время, в течение которого  $\overline{O'M'}$ , вращаясь с угловой скоростью  $k$ , поворачивается на  $2\pi$ :

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{k} \text{ и } k = \frac{2\pi}{\tau_0} \text{ или } \tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

### *Литература*

1. [www.evkova.org](http://www.evkova.org)
2. <https://www.youtube.com/watch?v=ohBrDbVGhYg>
3. Теоретическая механика в вопросах и ответах: УМП для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения: электронный учебный материал в 3 ч. Минск, БНТУ, 2014. – Ч. 2: Кинематика.

УДК 531.2

## **ПОДЪЁМ ОПОРЫ С ПОМОЩЬЮ ПАДАЮЩЕЙ СТРЕЛЫ**

Студент гр. 11201422 А.С. Чепелев

Белорусский национальный технический университет

Студент гр. 9 ДЭиВИ Т.С. Мышковец

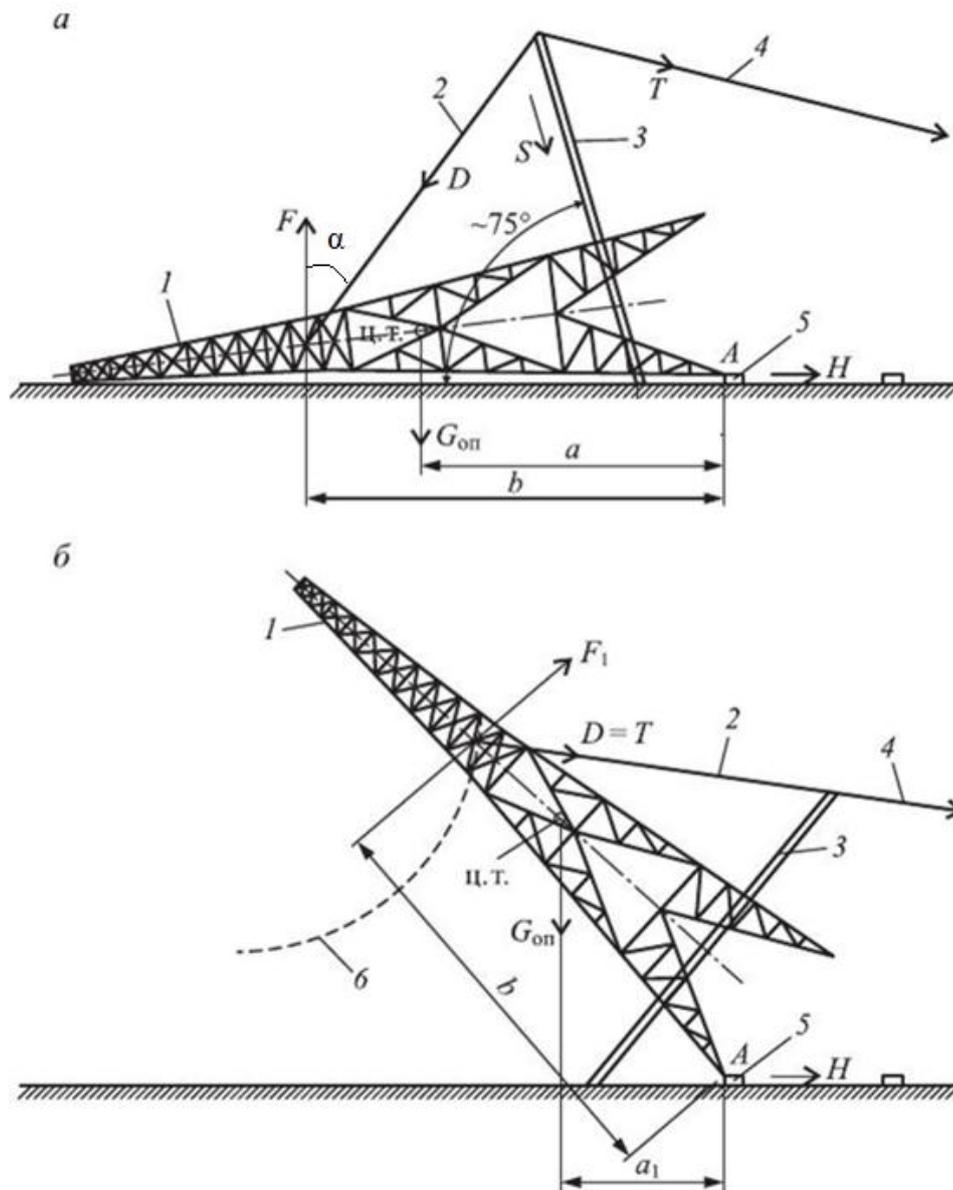
Белорусский государственный технологический университет

Минск, Республика Беларусь

*Научный руководитель – ст. преподаватель Мышковец М.В.*

Подъем опор с помощью падающей стрелы наиболее эффективен при больших массе и высоте опор, в условиях пересеченной и труднопроходимой трассы линии, при отсутствии кранов необходимой грузоподъемности, проходимости или длины вылета стрелы.

Падающая стрела (рисунок 1), высота которой составляет 40–60 % от высоты опоры, устанавливается с наклоном под углом 65–75° в сторону поднимаемой опоры. Она выполняет роль рычага, обеспечивающего снижение требуемой силы  $F$  по сравнению с весом опоры  $C$ . Вершина падающей стрелы тросом с одной стороны присоединяется к поднимаемой опоре, а с другой – к тяговому механизму. Участок троса от падающей стрелы до опоры называется подъемным тросом, а от падающей стрелы до тягового механизма – тяговым тросом.



$a$  – начальный момент подъема;  $b$  – положение опоры при выходе стрелы из работы;  
 $1$  – опора;  $2$  – подъемный трос;  $3$  – падающая стрела;  $4$  – тяговый трос;  
 $5$  – подножник;  $6$  – тормозной трос; ц.т. – центр тяжести опоры  
 Рисунок 1. – Подъем опоры с помощью падающей стрелы

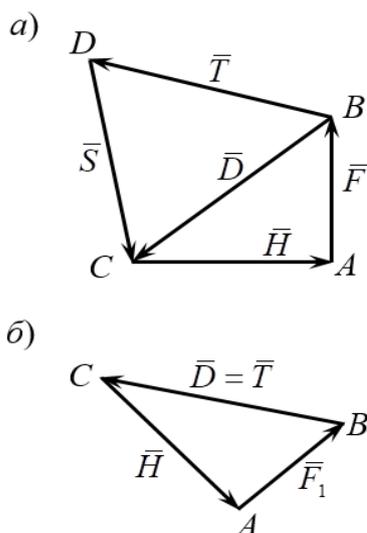
При создании тяговым механизмом усилия на тяговый и соответственно подъемный тросы верх опоры начинает двигаться вверх, а падающая стрела – поворачиваться вокруг собственной оси до тех пор, пока тяговый и подъемный тросы не окажутся на одной прямой. Этот момент соответствует выходу стрелы из работы, равенству усилий по подъемному и тяговому участкам троса и отсутствию осевого усилия на падающую стрелу. От падения на землю стрелу предохраняет специальный трос, соединяющий ее вершину с траверсой и низом опоры (или якорем).

Для выбора или проверки такелажных средств (тросов, канатов, блоков, полиспастов, шарниров, падающих стрел) необходимо знать усилия, возникающие при подъеме опор. Эти усилия непостоянны и изменяются в процессе подъема опоры.

При установке опор падающей стрелой максимальное усилие в тяговом тросе возникает в начальный момент подъема. Затем оно постепенно уменьшается, а когда опора принимает вертикальное положение – исчезает. Аналогично изменяется усилие в падающей стреле и подъемном тросе, соединяющим ее со стволом опоры. Это является достоинством способа установки опор падающей стрелой, поскольку выявленные в начале подъема неисправности такелажа могут быть легко устранены.

Нагрузки, действующие на шарнир и фундаменты при подъеме опоры, могут увеличиваться и достигать максимальных значений при углах ее наклона 30–50°.

По результатам расчетов производят (если требуется) усиление опор за счет установки дополнительных временных элементов (распорок, раскосов, стяжек), а также подбирают необходимые такелажные средства (рисунок 2).



*a* – в начальный момент подъема; *б* – при выходе падающей стрелы из работы  
Рисунок 2. – Усилия на такелажные приспособления и падающую стрелу

Определить усилия  $D$ ,  $T$ ,  $S$  (см. рисунок 1), возникающие в такелажных приспособлениях (подъемном и тяговом тросах, падающей стреле), а также горизонтальные усилия  $H$ , воздействующие на подножник опоры и стремящиеся сдвинуть его, наиболее удобно графическим методом (см. рисунок 2).

Требуемое значение вертикальной составляющей подъемной силы  $F$  находится из условия равновесия сил, приложенных к опоре (рисунок 1, *a*):

$$Fb = G_{\text{оп}} a ,$$

откуда

$$F = \frac{a}{b} G_{\text{оп}} ,$$

где  $a$  – расстояние от центра тяжести опоры до оси вращения (подножника);  $b$  – расстояние от места прикрепления подъемного троса к опоре до оси вращения (подножника). Поскольку  $a < b$ , то  $F < G_{\text{оп}}$ .

Снижения подъемной силы  $F$  можно достичь увеличением расстояния  $b$ .

Положение центра тяжести опоры (расстояние  $a$  на рисунке 1,  $a$ ) определяют по результатам расчета, исходя из веса отдельных секций опоры ( $q_1, \dots, q_n$ ) и расстояния от их центра тяжести до оси вращения ( $l_1, \dots, l_n$ ). В опоре, показанной на рисунке 1, можно выделить следующие секции: опорные, среднюю, верхнюю, а также тросостойку и траверсы.

Расстояние  $a$  вычисляется по формуле

$$a = \frac{\sum q_i l_i}{\sum q_i} .$$

Непосредственно на пикете положение центра тяжести опоры можно определить так называемым «вывешиванием» опоры с помощью грузоподъемных механизмов.

Для нахождения усилий в такелажных приспособлениях, падающей стреле, подножнике (см. рисунок 2,  $a, б$ ) рассмотрим начальный момент подъема опоры (см. рисунок 2,  $a$ ). В этот момент в тросах и падающей стреле возникают максимальные усилия. Требуемое значение подъемной силы  $F$  откладываем в масштабе от точки  $A$  по ее направлению (см. рисунок 1,  $a$ ). Из конца вектора  $F$  (точка  $B$ ) проводим прямую, параллельную подъемному тросу, до пересечения ее в точке  $C$  с горизонтальной прямой, проведенной через точку  $A$ .

Векторы  $CA$  и  $BC$  представляют собой силы  $H$  и  $D$ , действующие соответственно на фундамент и подъемный трос. Из точки  $C$  проводим прямую  $CD$ , параллельную падающей стреле, до пересечения в точке  $D$  с прямой, проведенной из точки  $B$  параллельно тяговому тросу. Зависимость усилий  $H, D, T, S$  от известной подъемной силы  $F$  и разном угле  $\alpha$  (см. рисунок 1) приведены в таблице.

Зависимость усилий от известной подъемной силы  $F$ .

Угол $\alpha$	$T$	$D$	$H$	$S$
$60^\circ$	$2 F$	$2 F$	$1,73 F$	$1,03 F$
$50^\circ$	$1,56 F$	$1,56 F$	$1,19 F$	$1,32 F$
$45^\circ$	$1,41 F$	$1,41 F$	$F$	$1,41 F$
$40^\circ$	$1,31 F$	$1,31 F$	$0,84 F$	$1,49 F$
$30^\circ$	$1,15 F$	$1,15 F$	$0,58 F$	$1,69 F$

В момент выхода падающей стрелы из работы (см. рисунок 1, б) усилие на саму стрелу равно нулю. Усилия в подъемном и тяговых тросах находятся следующим образом.

Усилие

$$F_1 = \frac{a_1}{b} G_{\text{оп}} ,$$

где  $a_1$  – проекция на горизонтальную ось расстояния от центра тяжести опоры до оси вращения.

Поскольку  $a_1 < a$ , то и подъемная сила  $F_1 < F$ .

Усилие  $F_1$  в масштабе откладываем по его направлению. Из конца вектора  $F_1$  (точка  $B$ ) проводим прямую, параллельную подъемному и тяговому тросам, направление которых в рассматриваемый момент совпадает, до пересечения в точке  $C$  с прямой  $AC$ , проведенной параллельно положению продольной оси опоры. Векторы  $CA$  и  $BC$  представляют собой силы  $H$  и  $T=D$ , действующие соответственно на фундамент и такелажный трос (см. рисунок 1, б). Из рисунка 2 следует, что  $F_1 < F$ , а усилия  $H$  и  $T$  остаются примерно одинаковыми.

Определенные по рисунку 2 значения усилий умножаются на коэффициент динамичности, учитывающий возможные рывки тяговых механизмов и принимаемый 1,1; 1,2 – при подъеме опоры лебедкой через полиспаст или напрямую соответственно; 1,3; 1,4 – при подъеме опоры тяговым механизмом (трактором либо автомашиной) через полиспаст или напрямую соответственно.

По полученным усилиям  $T$ ,  $D$  подбирают площадь поперечного сечения каната  $F$ .

Прочность заделки фундамента в грунте и прочность верхней части самого фундамента должны противостоять воздействию усилию  $H$ , имеющему место при подъеме опоры, поэтому подножки предохраняют от сдвига во время подъема опоры. По усилию  $S$ , действующему на падающую стрелу, а также проекции усилия  $T$  (см. рисунок 2, а) определяют сумму моментов сил относительно оси вращения падающей стрелы и далее – размеры деревянной или металлической падающей стрелы.

В условиях эксплуатации в качестве неподвижной стрелы можно использовать опору, подлежащую замене.

### *Литература*

1. Определение усилий, возникающих в такелажных приспособлениях при подъеме опоры с помощью падающей стрелы: ozlib.com [Электронный ресурс].
2. опора-лэп.рф [Электронный ресурс]: А-образная падающая стрела.

3. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М.Тарг. – М.: Высшая школа, 2006. – 415 с.

4. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: Интегралпресс, 2006. – 603 с.

УДК 531.3

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ В ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКЕ

Студент гр.11201322 С.В. Сацута

Белорусский национальный технический университет

Студент гр. 9 ДЭиВИ Т.С. Мышковец

Белорусский государственный технологический университет

Научный руководитель – ст. преподаватель Мышковец М.В.

Кран опирается на рельсы, укрепленные на двух горизонтальных двухпролетных балках с промежуточными шарнирами. Кран несет груз  $P_1$ , силы тяжести крана  $P$ . Определить момент реактивной пары в заделке в положении крана, указанном на рисунке 1.

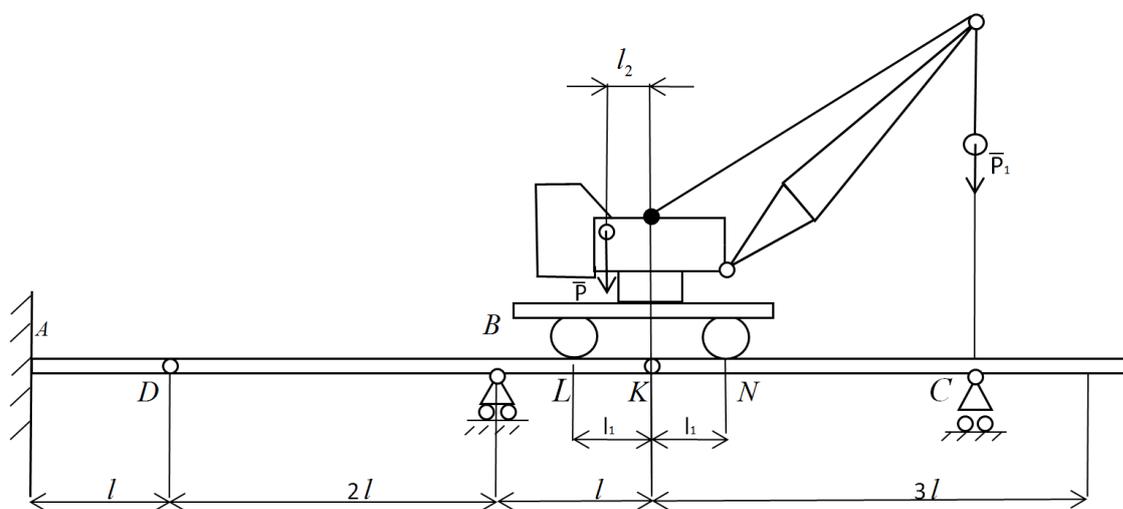


Рисунок 1. – Схема крана

#### Решение

Определим давление крана на рельсы (рисунок 2). Составим уравнения моментов всех сил относительно точек  $L$  и  $N$ .

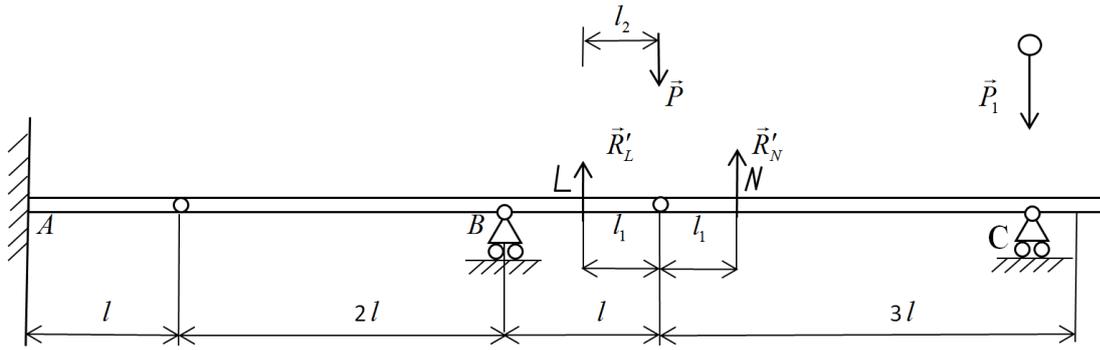


Рисунок 2. – Определение давления крана на рельсы

$$\sum M_L(\vec{F}_k) = 0;$$

$$-Pl_2 + R'_N 2l_1 - P_1(2l + l_1) = 0;$$

$$\sum M_N(\vec{F}_k) = 0;$$

$$-R'_L 2l_1 + P(2l_1 - l_2) - P_1(3l - l_1) = 0;$$

$$R'_N = \frac{Pl_2 + P_1(3l + l_1)}{2l_1}; \quad R'_L = \frac{P(2l_1 - l_2) - P_1(3l - l_1)}{2l_1}.$$

Для определения момента жесткой заделки (рисунок 3) применим принцип возможных перемещений.

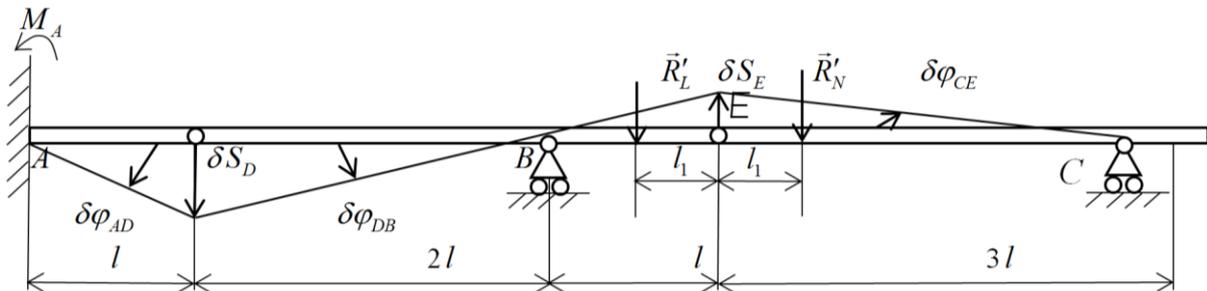


Рисунок 3. – Определение момента жесткой заделки

$$M_A \delta\varphi_{AA} - R'_L(l - l_1)\delta\varphi_{DB} - R'_N \delta\varphi_{CE}(3l - l_1) = 0;$$

$$\delta S_D = \delta\varphi_{AD}l = \delta\varphi_{DB} 2l \Rightarrow \delta S_D = 2\delta\varphi_{DB};$$

$$\delta S_E = \delta\varphi_{DB}l = \delta\varphi_{CE} 2l \Rightarrow \delta S_E = 2\delta\varphi_{CE};$$

$$\delta\varphi_{AD} = 6\delta\varphi_{CE};$$

$$\delta\varphi_{CE}(3(6M_A - R'_L(l - l_1)) - R'_N(3l - l_1)) = 0;$$

$$M_A = \frac{3(l - l_1)R'_L + R'_N(3l - l_1)}{6}.$$

Для определения вертикальной составляющей жесткой заделки (рисунок 4) применим принцип возможных перемещений.

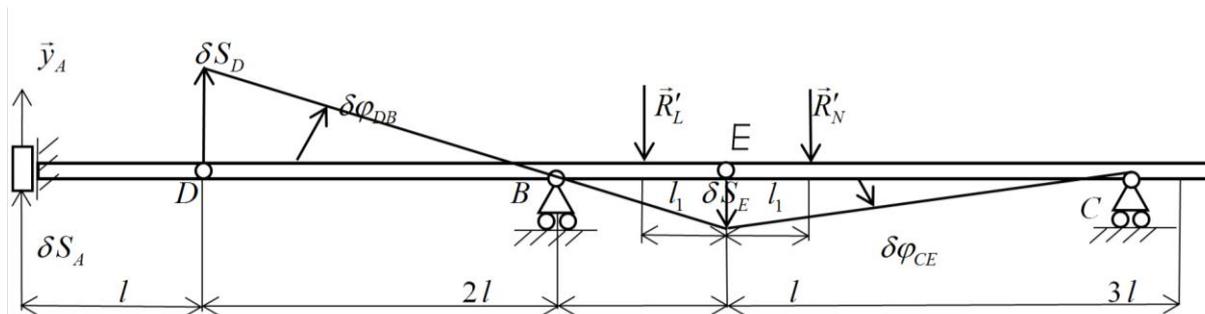


Рисунок 4. – Определение вертикальной составляющей жесткой заделки

$$y_A \delta S_A + R'_L (l - l_1) \delta \varphi_{DB} + R'_N (3l - l_1) \delta \varphi_{CE} = 0;$$

$$\delta S_A = \delta S_D = \delta \varphi_{DB} DB = \delta \varphi_{DB} 2l;$$

$$\delta S_E = \delta \varphi_{DB} l = \delta \varphi_{CE} 3l \Rightarrow \delta \varphi_{DB} = 3 \delta \varphi_{CE};$$

$$\delta S_A = 6l \delta \varphi_{CE};$$

$$\delta \varphi_{CE} (6ly_A + R'_L (l - l_1) 3 + R'_N (3l - l_1)) = 0;$$

$$y_A = \frac{-(3R'_L (l - l_1) + R'_N (3l - l_1))}{6l}.$$

Для определения горизонтальной составляющей жесткой заделки (рисунок 5) применим принцип возможных перемещений.

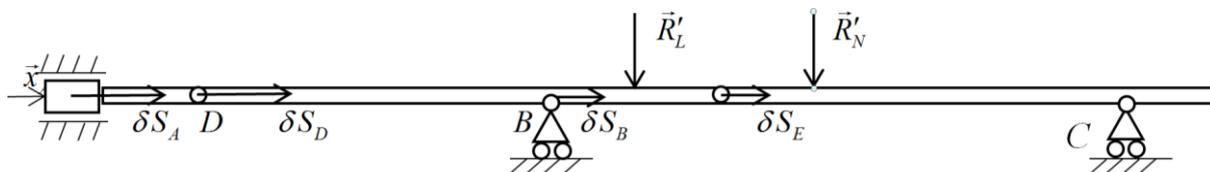


Рисунок 5. – Определение горизонтальной составляющей жесткой заделки

$$x_A \delta S_A = 0 \Rightarrow x_A = 0.$$

$$\text{Реакция жесткой заделки } R_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = |y_A|.$$

Реакция  $R_A$  направлена вниз.

### Литература

1. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

2. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 2006. – 415 с.

3. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: Интегралпрсс, 2006. – 603 с.

## СЕКЦИЯ «МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ»

УДК 539.

### МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ

Студент гр. 10301122 И.Г. Костюк.

*Научный руководитель – ст. преподаватель Дикан Ж.Г.*

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Республика Беларусь

Балки с лишними связями называются статически неопределимыми, поскольку реакции таких балок невозможно определить только при помощи уравнений статики. Степень статической неопределимости балки определяется разностью между числом неизвестных реакций и числом независимых уравнений статики.

Наиболее широко применяемым в машиностроении общим методом раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем является метод сил. Данный метод раскрытия статической неопределимости системы заключается в том, что заданная система освобождается от дополнительных связей, как внешних, так и взаимных, а их действие заменяется силами и моментами, превращаясь в статически определимую, которая называется основной системой. Таким образом, при указанном способе раскрытия статической неопределимости неизвестными оказываются силы. Отсюда и название «метод сил».

В методе сил при выборе основной системы необходимо принимать во внимание, что основная система должна быть статически определимой и кинематически неизменяемой. После отбрасывания лишних связей от статически неопределимой системы последняя загружается в направлении отброшенных связей силами и моментами. Задавая условия перемещений в направлении приложенных сил и моментов и решая указанные дополнительные уравнения, определяют ранее отброшенные лишние связи.

Данные уравнения перемещений могут быть записаны в каноническом виде:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0, \end{cases}$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – неизвестные силы и моменты, приложенные в направлении отброшенных связей;

$\delta_{in}$  ( $\delta_{ni}$ ) – коэффициенты, представляющие собой перемещения в основной системе от действия единичных сил, приложенных вместо лишних неизвестных, называемые главными коэффициентами (перемещения от единичной силы по ее направлению; могут иметь только знак «плюс»);

$\delta_{12}, \delta_{21}, \dots, \delta_{1n}, \delta_{n1}$  – побочные коэффициенты (перемещения от одной единичной силы по направлению другой; имеют знак «плюс», «минус» и могут быть равны нулю);

$\Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \dots, \Delta_{np}$  – свободные члены уравнений или грузовые коэффициенты (перемещения в направлении отброшенных связей от внешней заданной нагрузки; имеют знаки «плюс», «минус» и могут быть равны нулю).

Коэффициенты и свободные члены в свою очередь определяются по интегралам Мора:

$$\delta_{ik} = \sum \int_l \frac{M_i M_k dz}{EI}; \quad \Delta_i = \sum \int_l \frac{M_i M_p dz}{EI}.$$

Из теоремы о взаимности перемещений следует, что  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ . Если балка состоит из прямых участков постоянной жесткости, то интегралы Мора можно вычислять по способу Верещагина путем перемножения соответствующих эпюр:

$$\sum \int_l M_i M_k dz = \omega_i y_k.$$

По способу Верещагина интеграл Мора равен произведению площади одной эпюры (криволинейной) на ординату второй эпюры (линейной), взятой под центром тяжести первой. Если обе эпюры линейны, операция перемножения обладает свойством коммутативности. В этом случае безразлично, умножается ли площадь первой на ординату второй или наоборот.

Эпюры  $M_1, M_2, \dots, M_n$  и  $M_p$  строятся для основной системы от нагружения ее силами  $X_1=1, X_2=1, \dots, X_n=1$  и внешней нагрузкой в отдельности.

При перемножении сложные эпюры можно разбить на простые фигуры: прямоугольник, треугольник, параболический треугольник и параболический сегмент, для которых величины площади  $\omega$  и положение центра тяжести известны.

**Пример.**

Балка является один раз статически неопределимой, так как число неизвестных реакций равно четырем, а уравнений статики можно составить три.

Выбираем основную систему: отбрасываем шарнирно-подвижную опору, заменяя её неизвестной силой  $X_1$ . Основную систему загружаем заданной нагрузкой и получаем эквивалентную систему (рисунок 1). Записываем одно каноническое уравнение, так как система один раз статически неопределима:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

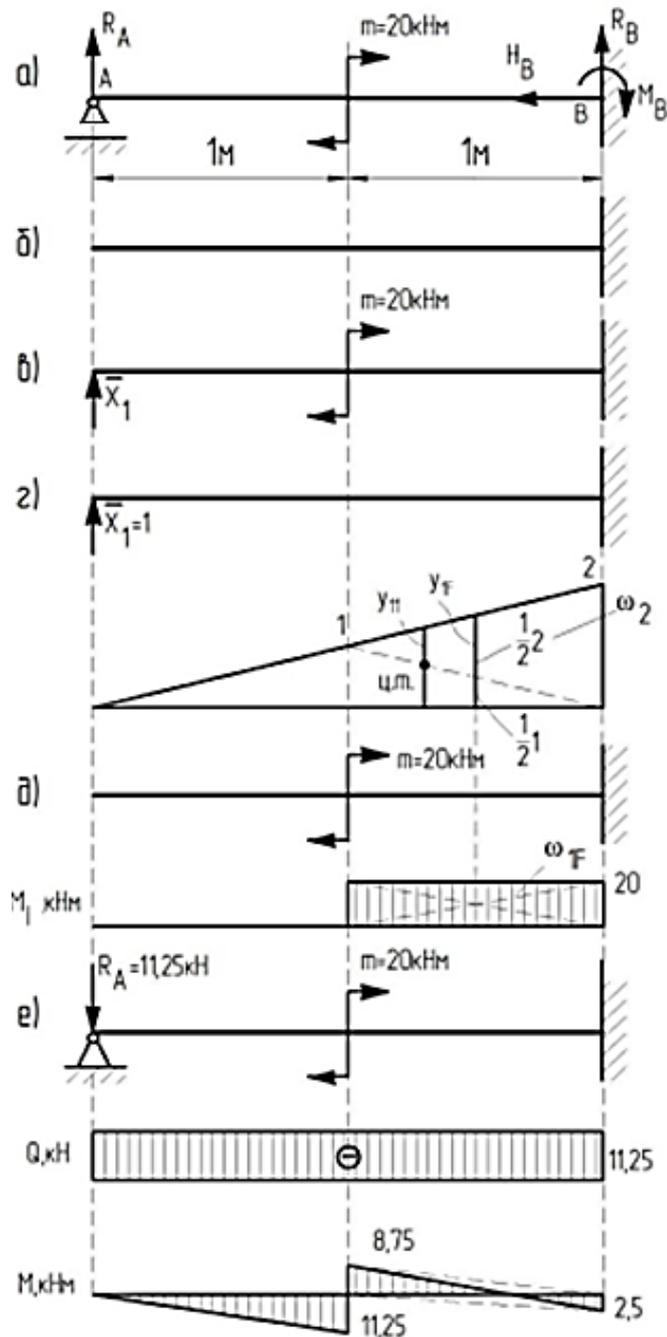


Рисунок 1. – Статически неопределимая балка

Для нахождения коэффициентов уравнения используем метод Мора–Верещагина. Загружаем эквивалентную систему силой  $X_1 = 1$  и строим

единичную эпюру  $M_1$ , затем загружаем основную систему заданной нагрузкой и строим грузовую эпюру моментов  $M_F$  (см. рисунок 1).

Умножая эпюру  $M_1$  саму на себя, находим

$$b_{11} = \frac{1}{EI} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{\omega_{11} y_{11}}{EI} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI} = \frac{8}{3EI}.$$

Перемножаем эпюры  $\bar{M}_1$  и  $M_F$ , получим

$$\Delta_{1F} = \frac{(\bar{M}_1 M_F)}{EI} = \frac{\omega_{1F} y_{1F}}{EI} = \frac{20 \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right)}{EI} = \frac{30}{EI}.$$

Произведение имеет знак плюс, так как эпюры  $\bar{M}_1$  и  $M_F$  находятся по одну сторону от оси эпюры.

Подставляем полученные значения коэффициентов в каноническое уравнение и находим  $X_1$ .

Найденное усилие  $X_1$  является искомой реакцией:

$$X_1 = R_A = -11,25 \text{ кН}.$$

Для балки с известной реакцией  $R_A$  строим окончательные эпюры внутренних сил (рисунок 1, e).

Сделаем проверку правильности определения величины  $X_1$ .

Перемножим окончательную эпюру моментов  $M_{F_{ок}}$  и единичную эпюру  $\bar{M}_1$ :

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \frac{1}{EI} (M_{F_{ок}} \bar{M}_1) = \frac{\omega_{1F_{ок}} y_{1F}}{EI} = \\ &= \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} \cdot 11,25 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 8,75 \cdot 1 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{EI} (-3,75 + 5,83 - 2,08) = 0. \end{aligned}$$

### Литература

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. В.И. Баумана, 1999. – 592 с.

2. Механика материалов. Расчет статически неопределимых балок [Электронный ресурс]: электронное учебное пособие / Министерство образования Республики Беларусь; Белорусский национальный технический университет; кафедра «Теоретическая механика и механика

материалов»; сост. С.В. Гончарова, В.М. Хвасько. – Электрон. дан. Минск: БНТУ, 2019.

3. Механика материалов [Электронный ресурс]: Электронное учебное пособие/ Министерство образования Республики Беларусь Белорусский национальный технический университет; кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»; сост. Ю.В. Василевич, Л.Е. Реут.– Электрон. дан. –Минск: БНТУ, 2022.

УДК 539.

## ДЕФОРМАЦИЯ СДВИГА В МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Студент гр.10301122 Е. Стельмах

*Научный руководитель – ст. преподаватель Дикан Ж.Г.*

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Республика Беларусь

Одной из распространенных форм деформации является сдвиг различных слоев изделия (рисунок 1). Сдвиг происходит сразу в двух направлениях: в вертикальном и горизонтальном. Изменение положения может вызывать постепенное или резкое изменение первоначальной формы конструкции или отдельной детали.

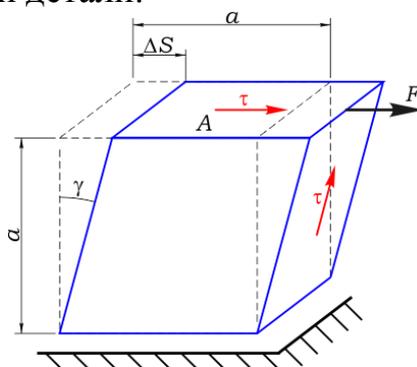


Рисунок 1. – Схема деформации сдвига

Главной особенностью этой деформации является сохранение постоянного объема. Причем независимо от того, в каком направлении действуют силовые факторы этот параметр остаётся неизменным.

Деформации сдвига наблюдаются при распиловке бруса, отрезании или рубке металла, в результате нарушения целостности крепления металлических или деревянных деталей, соединённых метизами, в местах крепления балки на опоре и скрепления мостовых пролётов, на перемычках соединения железнодорожных рельс.

На сдвиг работают заклепки, болты шарнирных соединений, цапфы крепления стоек шасси, пальцы соединения тяг, поршневые пальцы и другие элементы конструкций. Простейшим примером сдвига является резание ножницами. При сдвиге поперечные сечения бруса смещаются, оставаясь в параллельных плоскостях.

Экспериментально чистый сдвиг может быть осуществлён при кручении тонкостенной трубы (рисунок 2, а).

Рассмотрим элемент  $abcd$ , вырезанный из тонкостенной трубы (рисунок 2, б).

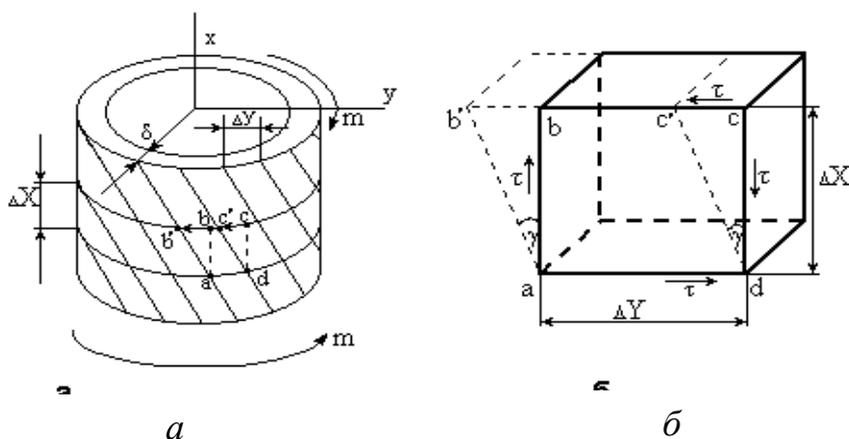


Рисунок 2. – Элемент тонкостенной трубы

При возникновении касательных напряжений элемент перекашивается. Если считать грань  $ad$  закреплённой, то грань  $bc$  сдвинется в положение  $b'c'$ . Все прямые углы между гранями изменятся на одну и ту же величину  $\gamma$ . Угол  $\gamma$ , представляющий изменение первоначального прямого угла между гранями элементарного параллелепипеда, называется углом сдвига.

Опыты показывают, что при сдвиге справедлив закон Гука, т. е.

$$\tau = G\gamma,$$

где  $G$  – модуль упругости при сдвиге (модуль упругости второго рода); как и модуль продольной упругости  $E$ , имеет размерность  $\text{Н/мм}^2$ . Модуль упругости при сдвиге связан с модулем упругости при растяжении соотношением

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Для стали обычно принимают  $G = 0,4E$  при  $\mu = 0,25$ .

Напряжённое состояние прямоугольного параллелепипеда, на четырёх гранях которого действуют только одни касательные напряжения, называется чистым сдвигом.

Чистый сдвиг – это сдвиг, при котором на все четыре грани оказываются только напряжения, направленные по касательной к поверхности. В результате произойдет сдвиг всех слоев деталей от верхнего к нижнему. Тогда внешняя сила изменяет форму детали, а объем сохраняется.

Для оценки деформации сдвига определяются величина, направление и точка приложения действующей силы, модуль сдвига, угол изменения внешних граней изделия, тангенциальное напряжение и модуль кручения.

Условие прочности при сдвиге имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau],$$

где  $[\tau]$  – допускаемое напряжение.

Деформации при кручении определяются углом закручивания. Под полным понимают угол поворота свободного конца. Относительным считают значение для определенной длины вала. Данные параметры рассчитывают с учетом прочности и жесткости деталей.

Угол, приходящийся на единицу длины стержня, называется относительным углом закручивания  $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ , тогда  $\gamma = \rho\theta$ . По закону Гука при сдвиге касательное напряжение  $\tau = G\gamma = G\rho\theta$ .

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta = \frac{M_k}{GI_p} \leq [\theta].$$

**Пример.** Деталь  $A$  закреплена на валу  $B$  с помощью шпонки  $30 \times 8 \times 10$  ( $l \times n \times b$ ) (рисунок 3). Диаметр детали  $D = 100$  мм, вала  $d = 50$  мм, для шпонки  $[t_{\text{ср}}] = 80$  МПа,  $[\sigma_{\text{сМ}}] = 200$  МПа.

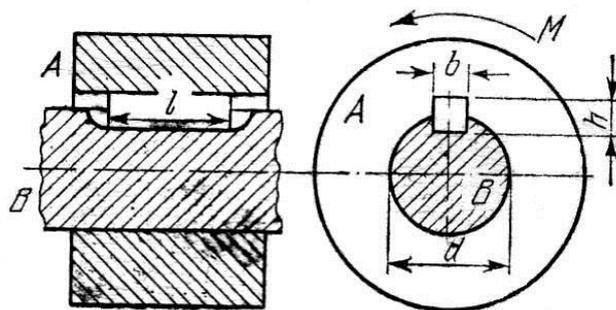


Рисунок 3

Определить допускаемый момент  $[M]$ , который с помощью шпонки можно передать от детали к валу.

**Решение.** Передаваемый момент  $M = Ph = P \frac{d}{2}$ , откуда  $P = \frac{M}{\frac{d}{2}}$  – сила

давления детали на шпонку через момент, приложенный к детали, но, с другой стороны,  $P$  – предельное значение силы на срез шпонки, т. е.  $[P_{\text{ср}}] = [t]bl = 8 \cdot 10^7 \text{ Па} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 24 \cdot 10^3 \text{ Н} = 24 \cdot 10^3 \text{ кН}$ .

С другой стороны, из условия прочности на смятие шпонки

$$[P_{\text{см}}] = [\sigma_{\text{см}}] \frac{h}{2} l = 2 \cdot 10^8 \text{ Па} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 24 \cdot 10^3 \text{ Н} = 24 \text{ кН}.$$

В данной задаче  $[P_{\text{ср}}] = [P_{\text{см}}]$  и  $M = P \frac{d}{2} = 24 \text{ кН} \cdot 25 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

### Литература

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов: учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 2-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2000. – 560 с.

2. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов: учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск: Высшэйшая школа, 2007. – 797 с.

УДК 539.

## РАСЧЕТ НА ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Студент гр. 10111121 З.С. Сергеев, И.А. Тавгень

Научный руководитель – д-р техн. наук, профессор Дудяк А.И.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

**Задача:** под каким углом  $\alpha$  следует приложить силу  $F$  к системе из двух стержней, чтобы узел  $A$  перемещался горизонтально влево (рисунок 1).

Из условия равновесия приведенной конструкции

$$\sum F(x) = 0: -F \sin \alpha + N_2 + N_1 \cos 60^\circ = 0.$$

Последнее уравнение предоставим в виде

$$N_2 = F \sin \alpha - N_1 \cos 60^\circ; \quad (1)$$

$$\sum F(y) = 0: -F \cos \alpha + N_1 \cos 30^\circ = 0,$$

откуда

$$N_1 = F \frac{\cos \alpha}{\sin 30^\circ}. \quad (2)$$

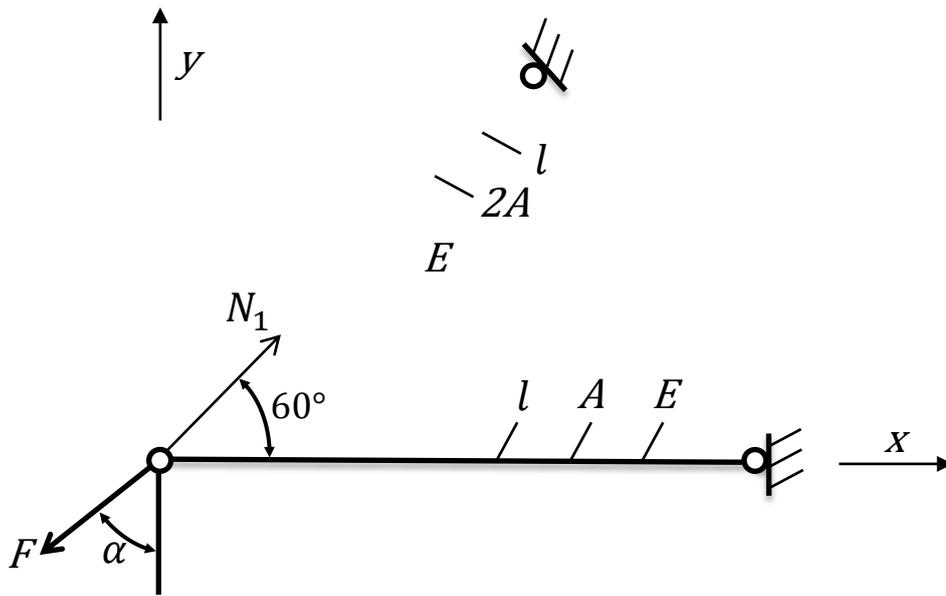


Рисунок 1. – Схема нагружения стержневой системы

Рассмотрим условие перемещения узла  $A$  с учетом удлинения стержней (рисунок 2).

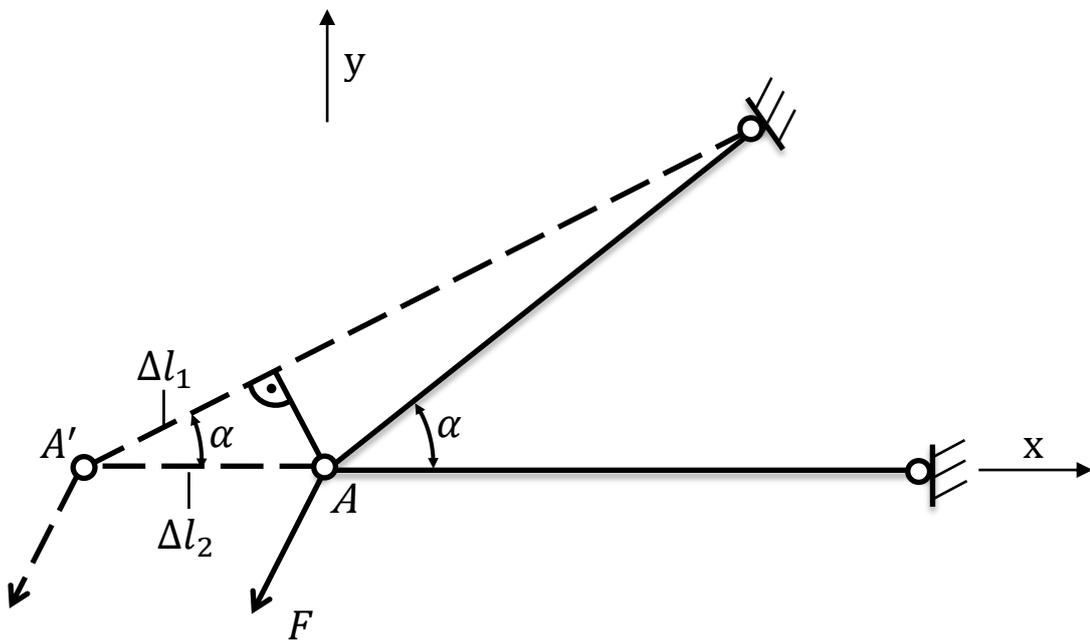


Рисунок 2. – Схема удлинения стержней под действием силы  $F$ .

В силу малости деформаций  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  можно считать, что угол  $\alpha$  при перемещении узла  $A$  в положение  $A'$  остается неизменным и равным  $60^\circ$ .

Соотношение между удлинениями стержней  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  можно получить из соотношения

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \cos 60^\circ; \quad \Delta l_1 = \frac{1}{2} \Delta l_2.$$

По закону Гука удлинения  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  равны:

$$\frac{N_1 l}{2EA} = \frac{1}{2} \frac{N_2 l}{EA} \quad \text{или} \quad N_1 = N_2. \quad (3)$$

Подставив в равенство (3) значения  $N_1$  и  $N_2$  из уравнений (1) и (2), получим

$$F \frac{\cos \alpha}{\sin 30^\circ} = F \sin \alpha - N_1 \cos 60^\circ.$$

Подставив в последнее равенство значения  $N_1$  из уравнения (2), получим

$$F \frac{\cos \alpha}{\sin 30^\circ} = F \sin \alpha - F \frac{\cos \alpha \cdot \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}. \quad (4)$$

Разделив левую и правую часть уравнения (4) на  $\cos \alpha$ , получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cos 30^\circ} + \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1 + 0.5}{0.866} = 1,7321.$$

Из последнего следует, что угол  $\alpha = 60^\circ$ .

*Заключение:* Узел  $A$  перемещается горизонтально влево, если силу приложить под углом  $\alpha = 60^\circ$  к вертикали.

### *Литература*

1. Феодосьев, В. И. Соппротивление материалов / В.И. Феодосьев. – 13-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. – 592 с.
2. Сакевич, В.Н. Механика материалов / В.Н. Сакевич. – Минск: Техноперспектива, 2009. – 239 с.

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Студенты гр. 11006121 Н.А. Махнач, А.М. Мезенцев  
*Научный руководитель – ст. преподаватель Гончарова С.В.*  
Белорусский национальный технический университет Минск,  
Республика Беларусь

Как известно из физики, нагрев или охлаждение элемента приводит к изменению его размеров – удлинению или укорочению соответственно. Если возникающие деформации происходят в нестесненных условиях, то это не вызывает появления внутренних сил и напряжений. В случае когда деформации элемента не могут развиваться свободно и ограничены, например, опорой или другими элементами, возникают внутренние силы и напряжения, называемые температурными напряжениями. Следует понимать правильно, что температурные напряжения являются результатом не самого факта нагрева или охлаждения как такового, а результатом взаимодействия элементов, не имеющих возможности свободно изменять свои размеры, поскольку внутреннюю силу может вызвать только внешняя сила. Рассмотрим, как влияет изменение температуры на состояние статически неопределимых систем.

В статически неопределимых системах изменение температуры всегда сопровождается появлением внутренних сил, и возникают они не от температуры непосредственно, а, как было сказано выше, от взаимодействия элементов, стесняющих деформации друг друга.

Рассмотрим задачу на температурные напряжения в статически неопределимой системе.

**ЗАДАЧА.** Жесткий брус  $BC$  опирается на шарнирную опору  $A$  и поддерживается двумя стальными стержнями, укрепленными по концам бруса. В процессе работы конструкция нагревается на  $\Delta t^\circ = 50^\circ\text{C}$  (рисунок 1). Определить температурные напряжения в стержнях. Принять значения:

$$A_1 = 6 \text{ см}^2; l_1 = 2,4 \text{ м}; A_2 = 4 \text{ см}^2; l_2 = 2 \text{ м}; a = 0,8 \text{ м}; b = 1,6 \text{ м};$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \alpha = 125 \cdot 10^{-7} \text{ градус}^{-1}.$$

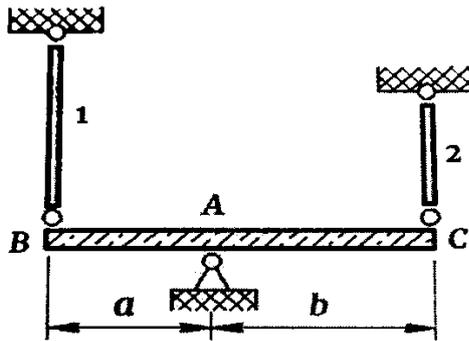


Рисунок 1. – Условие

**РЕШЕНИЕ.**

**1. Раскрываем статическую неопределимость.**

! Решение задачи удобнее начинать с физической стороны.

**1.1. Физическая сторона.**

а. Предположим, что конструкцию нагревают до сборки, когда жесткого бруса  $BC$  еще нет (его положение на рисунке условно указано пунктиром). Стержни свободно удлиняются: точка  $B$  перемещается в положение  $B_1$ , а точка  $C$  – в положение  $C_1$  (рисунок 2). Удлинения стержней соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_{1(t)} &= \alpha l_1 \Delta t = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 2,4 \cdot 10^3 \cdot 50 = 1,5 \text{ мм;} \\ \Delta l_{2(t)} &= \alpha l_2 \Delta t = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 2,0 \cdot 10^3 \cdot 50 = 1,25 \text{ мм.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

б. Теперь мысленно присоединяем брус и приводим конструкцию к заданному виду: укрепляем его на шарнирной опоре  $A$  и пытаемся присоединить к нему концы стержней  $B_1$  и  $C_1$ . Для этого необходимо приложить усилия, поджать стержни и укрепить их в заданных точках.

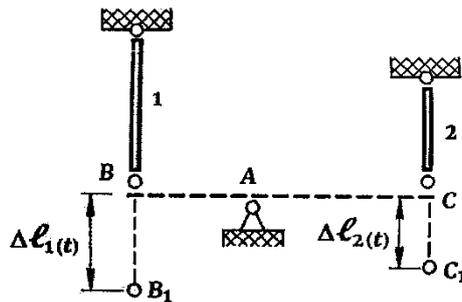


Рисунок 2. – Удлинение стержней

В результате такой сборки брус принимает некоторое промежуточное положение  $B_2 C_2$  и усилия, приложенные к стержням, вызывают появление в них продольных сил  $N_1$  и  $N_2$  (рисунок 3), деформация от которых по закону Гука равна:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_{1(N_1)} &= \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_1 \cdot 10^3 \cdot 2,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^2} = 0,02 N_1 \text{ мм}; \\ \Delta l_{2(N_2)} &= \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_2 \cdot 10^3 \cdot 2,0 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2} = 0,025 N_2 \text{ мм}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

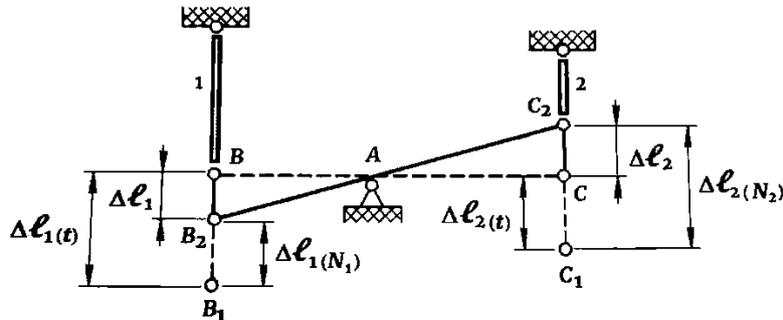


Рисунок 3. – Деформационная схема

в. Тогда полное изменение длины каждого стержня, как это видно из схемы деформаций, на основании (1) и (2)

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= \Delta l_{1(t^\circ)} - \Delta l_{1(N_1)} = 1,5 - 0,02 N_1; \\ \Delta l_2 &= \Delta l_{2(N_2)} - \Delta l_{2(t^\circ)} = 0,025 N_2 - 1,25. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Выражения (3) и являются физической стороной задачи, которая отражает суть примечания о том, что при температурных воздействиях конечное изменение длины элементов определяется двумя факторами – влиянием температуры и возникающих внутренних сил.

1.2. Геометрическая сторона:

$$\Delta ABB_2 \propto \Delta ACC_2 \rightarrow \frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{b} \rightarrow \Delta l_2 = \frac{1,6}{0,8} \Delta l_1 \rightarrow \Delta l_2 = 2 \Delta l_1. \quad (4)$$

1.3. Статическая сторона (рисунок 4):

$$\begin{aligned} \sum X = 0: H_A = 0; \quad \sum Y = 0: R_A - N_1 - N_2 = 0; \\ \sum M_A = 0: N_1 a - N_2 b = 0. \rightarrow 0,8 N_1 - 1,6 N_2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

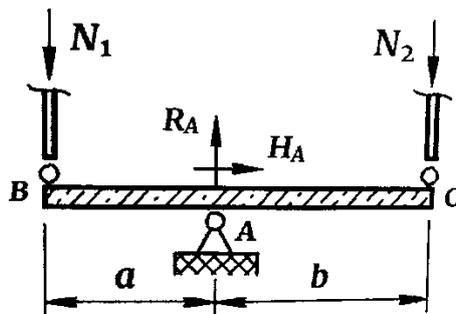


Рисунок 4. – Схема конструкции

Объединяем три стороны задачи.

Подставляем (3) в (4) и полученный результат объединяем с уравнением (5):  $0,025N_2 - 1,25 = 2(1,5 - 0,02N_1) \rightarrow 0,04N_1 + 0,025N_2 = 4,25$ .

$$\begin{cases} 0,8N_1 - 1,6N_2 = 0 \\ 0,04N_1 + 0,025N_2 = 4,25 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} N_1 = 80,95 \text{ кН;} \\ N_2 = 40,48 \text{ кН.} \end{matrix}$$

## 2. Температурные напряжения в стержнях

$$\sigma_{t(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{80,95 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^2} = 134,9 \text{ МПа (сжатие);}$$

$$\sigma_{t(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{40,48 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^2} = 101,2 \text{ МПа (сжатие).}$$

## 3. Определяем окончательные деформации стержней и уточняем деформационную схему:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= 1,5 \downarrow \text{вниз от нагрева} - 0,02N_1 \uparrow \text{вверх от стержня} = \\ &= 1,5 \downarrow - 0,02 \cdot 80,95 \uparrow = 1,5 \downarrow - 1,619 \uparrow = 0,119 \text{ мм} \uparrow \text{вверх (укорочение);} \\ \Delta l_2 &= 0,025N_2 \uparrow \text{вверх от стержня} - 1,25 \downarrow \text{вниз от нагрева} = \\ &= 0,025 \cdot 40,48 \uparrow - 1,25 \downarrow = 1,012 \uparrow - 1,25 \downarrow = 0,238 \text{ мм} \downarrow \text{вниз (удлинение).} \end{aligned}$$

### Выводы:

В стержне 1 укорочение от сжатия преобладает по сравнению с удлинением от нагрева, поэтому стержень в целом укорачивается и конечное перемещение точки «В» относительно начального положения произойдет вверх. В стержне 2, наоборот, преобладающим является удлинение от нагрева, поэтому стержень в целом удлиняется и точка «С» относительно начального положения получит перемещение вниз. Таким образом, результаты расчета показывают действительную форму конструкции, которую она принимает после нагрева (рисунок 5).

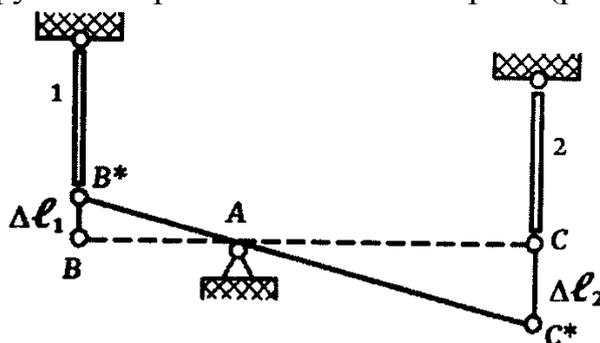


Рисунок 5. – Действительная форма конструкции

Проверкой правильности решения является соответствие отношения деформаций геометрическому уравнению (4)

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1 \rightarrow 0,238 \text{ мм} = 2 \cdot 0,119 \text{ мм.}$$

## *Литература*

1. Реут, Л.Е. Курс лекций и практических занятий по дисциплине «Механика материалов». Растяжение-сжатие: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2011. – 148 с.

2. Гончарова, С.В. Расчеты на растяжение-сжатие: пособие для студентов специальностей 1-38 01 04 «Микро- и наносистемная техника»; 1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»; 1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности» / С. В. Гончарова, В. М. Хвасько. – Минск: БНТУ, 2023. – 48 с.

УДК 539.3

### **ПРИМЕНЕНИЕ ФЕРМ В СУДОСТРОЕНИИ**

Студенты гр.11006121 А.А. Скачко, С.И. Охремчик

*Научный руководитель – ст. преподаватель Гончарова С.В.*

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Фермой в строительной механике называется система стержней, связанных в узлах шарнирно и работающих лишь на растяжение или сжатие. Считается, что нагрузка приложена в узлах фермы.

В корпусах судов применяют, как правило, фермы, все стержни которых размещаются в одной плоскости и включают балки рамного набора (карлингсы и кильсоны у продольной фермы, рамные бимсы и флоры у поперечной), пиллерсы и пересекающиеся раскосы. Такие фермы существенно увеличивают жесткость корпуса, создают опоры для балок рамного набора, воспринимают сосредоточенные усилия, например, при постановке судна в док, т. е. частично выполняют функции переборок. Поэтому Правилами Речного Регистра допускается устанавливать или фермы, или проницаемые переборки.

Фермы устанавливают преимущественно в корпусах судов-площадок и нефтеналивных барж, где они не мешают выполнению грузовых операций.

Раскосы, входящие в состав фермы, выполняют обычно из равнополочного угольника или сдвоенных неравнополочных угольников и располагают по возможности под углом  $45^\circ$  к горизонтали. Однако эту рекомендацию выполнить затруднительно, так как расстояние между пиллерсами зависит от расположения балок рамного набора.

В судостроении используются и так называемые безраскосные фермы, представляющие собой конструкции, состоящие из балок рамного набора и

часто поставленных пиллерсов. Такие конструкции обладают незначительной жесткостью при сдвиге и с точки зрения строительной механики не являются фермами.

**Пример.** Для фермы, изображенной на рисунке 1, требуется:

- вычислить усилия в стержнях;
- для наиболее нагруженного стержня подобрать сечение, если  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Размер стороны сечения округлить до миллиметров.

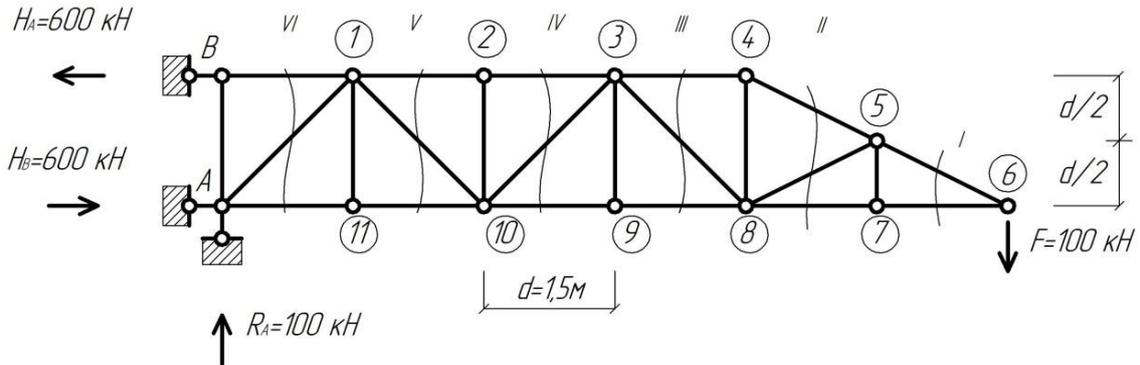


Рисунок 1. – Условие

**РЕШЕНИЕ:**

1. *Кинематический анализ:*

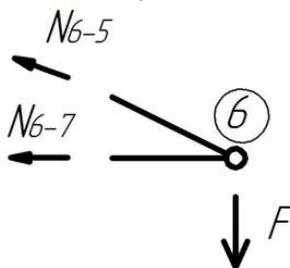
$$W = 2Y - C - C_0 = 2 \cdot 13 - 23 - 3 = 0.$$

Система статически определима, геометрически и мгновенно неизменяема.

2. *Определяем опорные реакции:*

$$\begin{cases} \sum M_A = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -H_B d + F 6d = 0, \\ -H_B + H_A = 0, \\ R_A - F = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_B = 600 \text{ кН}, \\ H_A = 100 \text{ кН}, \\ R_A = 100 \text{ кН}. \end{cases}$$

3. *Определяем усилие в стержнях:*

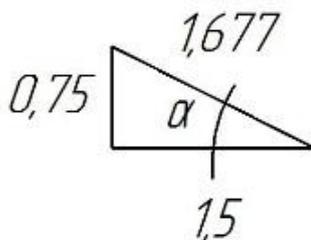


$$\sum Y = 0; N_{5-6} \sin \alpha = F;$$

$$N_{5-6} = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{100}{0,447} = 223,7 \text{ кН}$$

(стержень растянут).

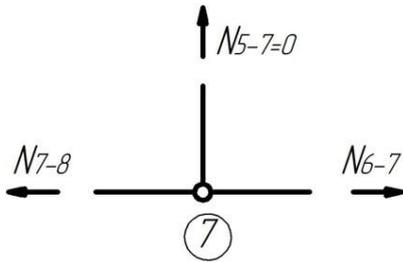
Рисунок 2. – Узел 6



$$\sin \alpha = \frac{0,75}{1,667} = 0,447.$$

$$\cos \alpha = \frac{1,5}{1,667} = 0,894.$$

Рисунок 3. – Узел 6



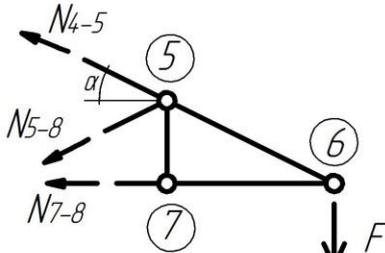
$$\sum X = 0; -N_{6-7} - N_{5-6} \cos \alpha = F;$$

$$N_{6-7} = -223,7 \cdot 0,894 = -200 \text{ кН}$$

(*стержень сжат*).

$$N_{6-7} = N_{7-8} = -200 \text{ кН.}$$

Рисунок 4. – Узел 7



$$\sum M_8 = 0; F \cdot 3 - N_{4-5} \cos \alpha \cdot 0,75 -$$

$$-N_{4-5} \sin \alpha \cdot 1,5 = 0.$$

$$N_{4-5} = 223,7 \text{ кН}$$

(*стержень растянут*).

Рисунок 5. – Сечение II

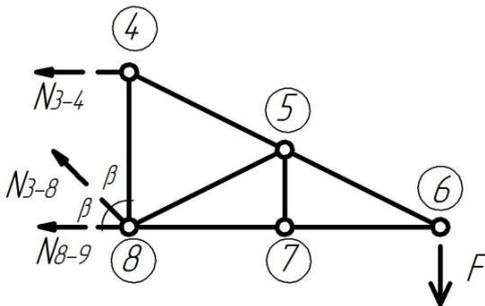


Рисунок 6. – Сечение III

$$\sum M_7 = 0; -N_{3-4} d + F 2d = 0.$$

$$N_{3-4} = 200 \text{ кН}$$

(*стержень растянут*).

$$\sum Y = 0; N_{3-8} \cos \beta - F = 0.$$

$$N_{3-8} = 141,4 \text{ кН}$$

(*стержень растянут*).

$$\sum X = 0; -N_{8-9} - N_{3-8} \cos \beta - N_{3-4} = 0.$$

$$N_{8-9} = -300 \text{ кН}$$

(*стержень сжат*).

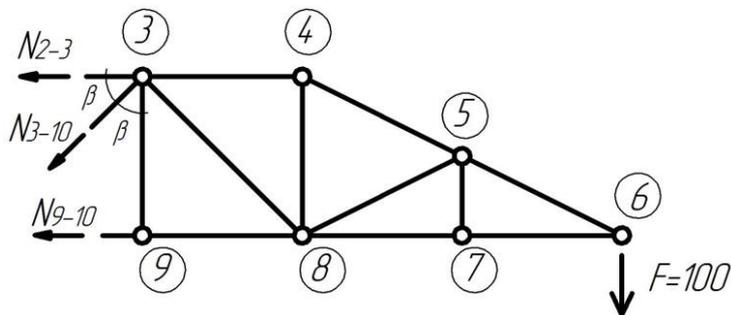


Рисунок 7. – Сечение IV

$$\begin{aligned} \sum M_3 &= 0; N_{3-4} d + F 3d = 0. \\ N_{9-10} &= -300 \text{ кН (стержень сжат)}. \\ \sum Y &= 0; -N_{3-10} \cos \beta - F = 0. \\ N_{3-10} &= -424,3 \text{ кН (стержень сжат)}. \\ \sum X &= 0; -N_{3-2} - N_{9-10} - N_{3-10} \cos \beta = 0. \\ N_{3-2} &= 600 \text{ кН (стержень растянут)}. \end{aligned}$$

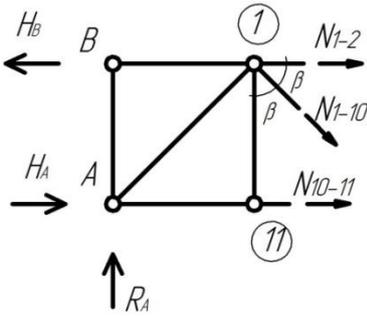


Рисунок 8. – Сечение V

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= 0; -N_{11-10} + R_A d - H_A d = 0. \\ N_{11-10} &= -750 \text{ кН (стержень сжат)}. \\ \sum Y &= 0; R_A - N_{1-10} \cos \beta = 0. \\ N_{1-10} &= 141,4 \text{ кН (стержень растянут)}. \\ \sum X &= 0; N_{11-10} + N_{1-2} + N_{1-10} \cdot \sin \beta + \\ &+ H_A - H_B = 0. \\ N_{1-2} &= 650 \text{ кН (стержень растянут)}. \end{aligned}$$

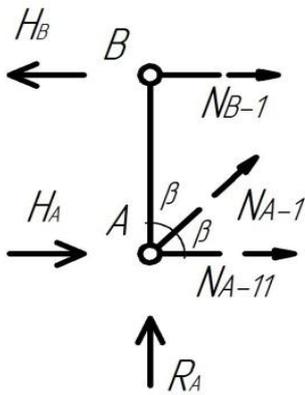


Рисунок 9 – Сечение VI

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0; N_{B-1} \cdot d - H_B \cdot d = 0. \\ N_{B-1} &= 600 \text{ кН} \\ &\text{(стержень растянут)}. \\ \sum Y &= 0; R_A - N_{A-1} \cdot \sin \beta = 0. \\ N_{A-1} &= -141,4 \text{ кН} \\ &\text{(стержень сжат)}. \\ \sum X &= 0; N_{A-11} + N_{A-1} \cdot \cos \beta + N_{B-1} = 0. \\ N_{A-11} &= 700 \text{ кН} \\ &\text{(стержень растянут)}. \end{aligned}$$

4. Подбираем сечение:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma];$$

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]} = \frac{750 \cdot 10^3}{160} = 4688 \text{ мм}^2 = 46,88 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 30245–2003. Профиль стальной гнутой замкнутой сварной квадратный:

$$180 \times 7,5 \quad A = 49,82 \text{ см}^2.$$

Или

по ГОСТ 8239–89 подбираем сечение двутавр:

$$\text{№}30a \quad A = 49,9 \text{ см}^2.$$

### *Литература*

1. Трепачко, В.М. Основы строительной механики: учебно-методическое пособие для студентов экономических специальностей в области строительства / В.М. Трепачко, Т.П. Зданович. – Минск: БНТУ, 2006. – 79 с.

2. Барабанов, Н.В. Конструкция корпуса морских судов / Н.В. Барабанов. – Л.: Судостроение, 1969. – 696 с.