

ТРИАНГУЛЯЦИЯ СФЕРЫ, ТОРА И ПЛОСКОСТИ

*Рак Иван Петрович, Верховец Павел Денисович, студенты 2-го курса
кафедры «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Хотомцева М. А., старший преподаватель)*

Триангуляция в математике означает деление поверхности на треугольники. Например, тетраэдр или октаэдр вырезается в сферу, которая затем проецируется на поверхность. Сфера делится на четыре-восемь треугольников, расположенных к низу, которые можно рассматривать как T -образные. Топологическое пространство – это множество, элементы которого предельны и примыкают друг к другу. Топологическое отображение, заданное многогранникам на этом множестве, таково, что каждый T -полиэдр переходит в множество T -поверхностей. Это множество так же можно назвать другим именем для "криволинейного" многогранника.

В геодезии триангуляция (в переводе с латинского - треугольник) – это метод создания сети геодезических опорных пунктов, а также сама сеть, построенная этим методом. Она может состоять из построения рядов или сетей, примыкающих друг к другу, и определения положения вершин в системе координат. В этом случае в каждом треугольнике измеряются три угла, а одно из ребер назначается из вычислительного пути решения предыдущего треугольника из полученного при измерении. Предположим, что одна из сторон треугольника получена измерением и называется опорной стороной T . Ранее в место опорной грани измерялась короткая линия, которая от нее проходила через специальную сеть треугольников к грани T путем тригонометрических вычислений. Эту грань обычно называют выходной гранью, а сеть - базовой гранью. Для улучшения контроля и точности большее количество базисов сторон измеряется в рядах или сетках T

Методы триангуляции сферы. Метод бисекции – Действие разделение начального треугольника на 4-е поколение назовём бисекцией, и название «бисекция» будет относиться к делению к сторонам пополам. Надо ввести в середины ребер значение вершин, которые связываются новыми ребрами, и образуют новые треугольники, и последующие получаются следующими бисекциями.

В терминах геометрии на сфере, тема вставки точке в стороны, решаются обратной и прямой геодезической задачи. В этом случае проще пользоваться

векторной алгеброй. Например, пусть концы сторон заданы векторами, a и b , тогда ср. точка f будет вычисляться по формуле:

$$f = \frac{a + b}{|a + b|}$$

Метод трисекции

Первоначально треугольники делят на девять треугольников и получают трисекции каждой стороны, которые делятся на три равных отрезка, и в концы которых вставляются вершины. Что в итоге получаем 6 новых вершин и 7-ая вставляется в геометрический центр.

Проще всего вычислить положение центральной точки g :

$$g = \frac{a + b + c}{|a + b + c|}$$

где a , b и c — векторы вершин исходного треугольника.

Сферический многогранник – это разбиение сферы дугами окружностей на замкнутые области, именуемые сферическими многоугольниками. Технология разбиения сферы ничем не ограничена. Нас интересует технологии разбиения сферы на равносторонние треугольники. Сетка в центре будет близка к регулярной. Макс. искажение формы сетки будут вблизи углов базового треугольника. Проведя анализ, видим, что с позиции сохранённых формы выгоднее всего основываться на симметрию икосаэдра. Рассмотрим лишь несколько многогранников, которые удовлетворят этим требованиям.

Икосаэдр — изображено классическое платоново тело.

Пентакисдодекаэдр. На рисунке сплошные линии – это ребра додекаэдра. Пунктирные – делящие грани додекаэдра, превращают в его пентакисдодэкаэдр.

Икосододекаэдр получен с помощью желтых треугольников и красных пятиугольников. Если разделить пятиугольники на треугольники, получим основу для построения сетки.

Усечённый икосаэдр, на подобие футбольного мяча, получен с помощью желтых шестиугольников и красных пятиугольников. Если разбить все грани на 3-угольники, то получим основу для построения сетки.

Курносый додекаэдр Получен с помощью желтых, голубых и красных многоугольников. Так же, если разбить на 3-угольники, получим основу для сетки

Пример создания треугольной сетки на основе икосаэдра

Мы выбираем наиболее простой из рассмотренных – икосаэдр, так как максимальное искажение формы 3-угольников, не зависят от сложности.

Далее сортируем оси координат, что бы 2-е вершины икосаэдра оказались в полюсах сферической системы координат. Широты остальных по формулам:

$$\varphi = 90^\circ - a \quad \cos \frac{a}{2} = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 36^\circ} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$$

где a — длина ребра сферического икосаэдра.

Используя программу triangulate, собирая вершины, строим сетку. Однако возникла проблема разрыва, из-за того, что выходные долготы в диапазоне от -180 до 180.

Мы можем заметить, что на икосаэдре в системе координат, 4-е класса 3-угольников, и они отличаются друг от друга сдвигами по долготе на углы кратные 72° .

Вывод: Изучив что такое триангуляция сфер, мы можем сказать, что это хороший и понятный метод создания сети опорных геодезических пунктов. Рассмотрев это в методе сферического многогранника – икосаэдра.

Литература:

1. Инженерная геодезия: учебник / В. П. Подшивалов, М. С. Нестеренок. – Минск: Выш. шк., 2011. – 463 с. : ил.
2. Большая советская энциклопедия. в 30-ти т.. – 3-е изд.. – М.: Совет. энцикл., 1969 - 1986. ил., карт.