УДК 517.38

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ЭКОНОМИКЕ

Гутковский Даниил Игоревич, *студент 1-го курса кафедры «Экономика, организация строительства и управление недвижимостью»*
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Мороз О.А., канд. физ.-мат. наук)

В первую очередь понятие определенного интеграла связано не только с вычислением площадей различных плоских фигур, но и с нахождением объемов геометрических тел. Интегральное исчисление, однако, используется и в ряде решения экономических задач. Рассмотрим несколько прикладных примеров:

Задача 1

Пусть спрос на некоторый товар задается функцией p=6-q^2,где q – количество товара, p- цена единицы товара и равновесие на рынке данного товара достигается при p=q=2. Наша задача найти излишек потребления.

Решение. Потребительский излишек вычисляется по формуле:

$$CS = \int_0^Q f(Q) * dQ - PQ$$

В нашем случае:

$$CS = \int_0^q f(q) * dq - p * q - \int_0^2 (6 - q^2) * dQ - 2 * 2 = \left(6 * q - \frac{q^3}{3}\right)\int_0^2 - 4$$

$$= 12 - \frac{8}{3} - 4 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Задача 2. Известно, что спрос на некоторые товары описывается функцией q=f(p), а предложение данного товара характеризуется функцией q=g(p). Если q=$\frac{3240}{p^3}$, а q=80p, то нам надо найти величину излишка потребителя при покупке данного товара.

Решение. Для расчета излишка потребителя сначала определим параметры рыночного равновесия (p^*, q^*). Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} q = \dfrac{3240}{p^3} \\ q = 80p \end{cases} \Rightarrow \frac{3240}{p^3} = 80p \Rightarrow p^4 = 40{,}5;\ p^* \approx 3{,}4, q^* = 80 * 3{,}4 = 272$$

Запишем формулу для вычисления потребительского излишка, где f(q) - функция, обратная функцией $q = \frac{3240}{p^3}$, т.е $f(q) = \sqrt[3]{\frac{3240}{q}} \approx 14{,}8q^{-\frac{1}{3}}$

Тогда $CS = \int_0^{272} 14{,}8q^{-\frac{1}{3}} * dq - 40{,}5 * 3{,}4 = \frac{14{,}8 * q^{\frac{2}{3}} * 3}{2} * \int_0^{272} - 137{,}7 = 22{,}2 * \sqrt[3]{272^2} - 137{,}7 \approx 794{,}5$

Задача 3. Сменная производительность рабочего труда описывается функцией f(t)= -0,2$*t^3$,где t - время в часах, 0≤ t ≤7. Определить объем выпуска продукции в течение 20 рабочих дней бригадой, состоящей из 12 человек.

Решение. Объем произведенной продукции за промежуток a≤ t ≤b при производительности труда f(t) найдем через определенный интеграл

$$q = \int_b^a \mathrm{f(t)}dt$$

Количество продукции, произведённой одним рабочим за 7 часов, будет равно:

$$q = \int_0^7 (-0{,}2t^3 + 3t^3)dt = \left(-0{,}2\frac{t^4}{4} + \frac{3t^3}{3}\right)\int_0^7 = -0{,}2 * \frac{7^4}{4} + 7^3 \approx 223(\text{у. е})$$

Тогда объем продукции, выпущенной в течение 20 рабочих дней бригадой из 12 человек:

$q = q_1 * 20 * 12 = 53520$

Рассмотрим производительную функцию Кобба-Дугласа, связывающую общий продукт, общую производительность, количество труда и капитала и их эластичность по выпуску:

$Q = A * K^{\alpha} * L^{\beta}$, где

Q - общий продукт;

K - единица капитала;

L - единица труда;

A - общая производительность;

α и β - показатели эластичности выпуска капитала и труда.

Задача 4. Пусть функция Кобба-Дугласа имеет вид f(t)= (160 + 3t) * $e^{\frac{1}{5}t}$. Наша задача найти объем произведенной продукции за 5 лет.

Решение. Объем произведенной продукции найдем, вычислив определенный интеграл:

$$q = \int_0^5 (160 + 3t) * e^{\frac{1}{5}t}\, dt = \left| \begin{matrix} u = 160 + 3t & dV = e^{\frac{1}{5}t}\, dt \\ du = 3dt & V = 5 * e^{\frac{1}{5}t} \end{matrix} \right| = (160 + 3t) * 5 * e^{\frac{1}{5}t} \int_0^5 - \int_0^5 3 * 5 * e^{\frac{1}{5}t}\, dt = (160 + 3t) * 5 * e^{\frac{1}{5}t} * \int_0^5 - 15 * 5 * e^{\frac{1}{5}t} * \int_0^5 = (160 + 15) * 5 * e - 75e = 800 * e \approx 2168(\text{у. е})$$