УДК 514.7

КРАТЧАЙШИЕ РАССТОЯНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ И МЕЖДУ КРИВЫМИ

***Янушкевич Ксения Евгеньевна**, студентка 1-го курса*
кафедры «Математические методы в строительстве»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Чернявская С.В., канд. физ.-мат. наук, доцент)

В курсе математики первого семестра изучались темы, связанные с расстояниями между точками на плоскости и в пространстве, между прямыми и плоскостями. Однако, принцип нахождения расстояния между точками на криволинейной поверхности не входил в программу изучения. В данной работе будут рассмотрены расстояния между точками на многогранных поверхностях и на некоторых поверхностях вращения, а также решены задачи на нахождение расстояний между кривыми.

Для определения расстояния между точками на многогранной поверхности сначала рассмотрим простейший случай, а именно, когда нам дана прямоугольная призма, на разных гранях которой расположены точки A и B.

Кратчайшим расстоянием между этими точками будет прямолинейный отрезок A′B′ на развертке данной призмы либо ломаная AB на поверхности данного многогранника. (Рис. 1)

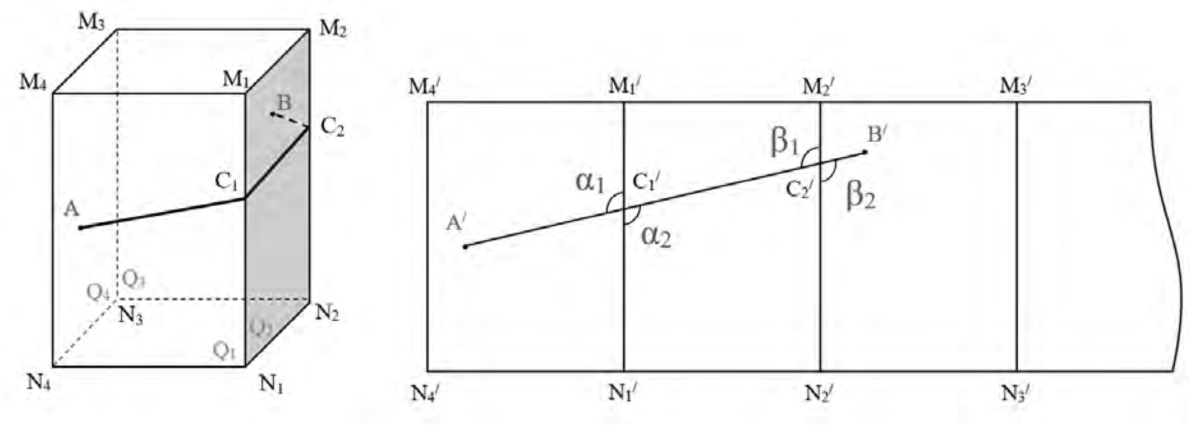

Рисунок 1 – Прямоугольная призма и ее развертка

Из рисунка 1 очевидно, что все углы, образованные звеньями кратчайшей ломаной AB и ребрами призмы, равны между собой.

Далее рассмотрим более сложный случай, 5-угольную пирамиду, на разных гранях которой заданы точки A и B. Исходя из предыдущего примера можно сделать вывод, что кратчайшим расстоянием между этими точками, будет ломаная AB на поверхности пирамиды, которая на развертке перейдет в прямолинейный отрезок A′B′. (Рис. 2)

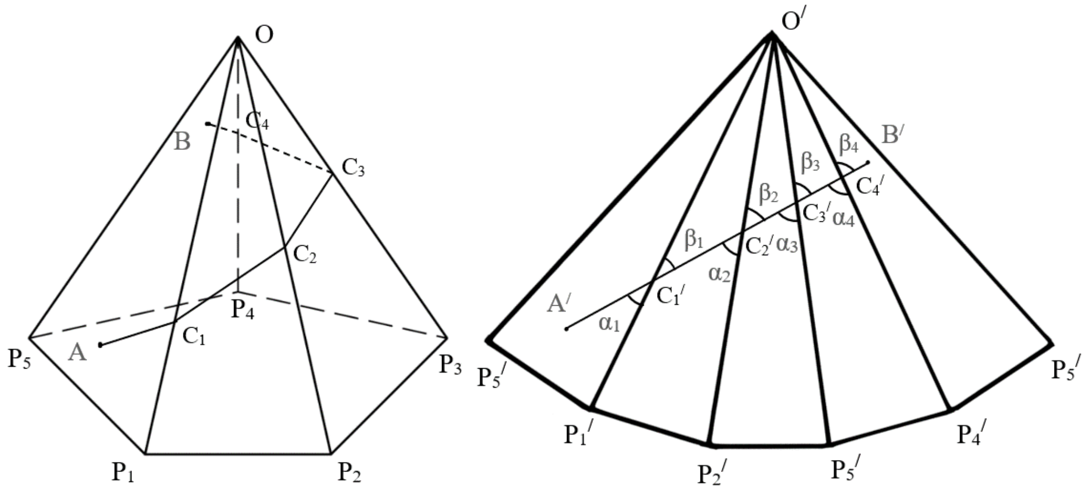

Рисунок 2 – Пятиугольная пирамида и ее развертка

Углы, образованные звеньями ломаной AB и ребрами пирамиды, попарно равны, как вертикальные: $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$, $\alpha_4 = \beta_4$

Перейдем к определению расстояния между точками на поверхностях вращения и в этой статье рассмотрим только боковую поверхность цилиндра. Зададим две точки A и B так, чтобы они не лежали на одной образующей. Здесь следует упомянуть, что цилиндр имеет систему прямых линий, параллельных оси цилиндра и, соответственно, друг другу, которые называются образующими.

Как и в предыдущих случаях развернем на плоскость поверхность цилиндра, разрезав её по образующей, которая не пересекает дугу AB. Получим некоторый прямоугольник, в котором кратчайшая дуга, соединяющая точки A и B, перейдет в прямолинейный отрезок A′B′. (Рис. 3)

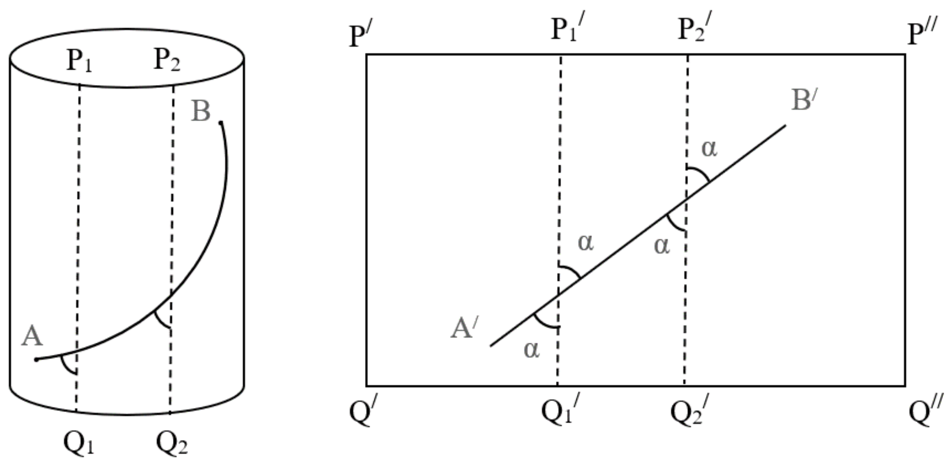

Рисунок 3 – Цилиндр и его развертка

Если на развертке рассмотреть углы, которые образует отрезок A′B′ с образующими цилиндра, то можно заметить, что все они равны как соответственные углы при параллельных прямых и секущей A′B′. То есть кратчайшей линией между двумя точками на поверхности цилиндра является дуга, которая пересекает все образующие цилиндра под равными углами α.

Теперь перейдем к нахождению кратчайших расстояний между кривыми. Из курса математики известны такие понятия, как секущая, касательная и нормаль к плоской кривой.

Пусть точка A принадлежит кривой q и перемещается по ней под действием силы P, состоящей из двух компонент – касательной P_1 и нормальной P_2. (Рис. 4)

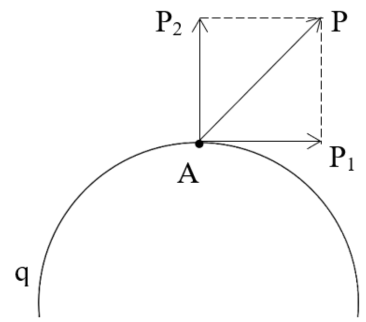

Рисунок 4 – Условие равновесия

Точка A находится в равновесии если касательная компонента P_1, смещающая точка A вдоль кривой, отсутствует, то есть $P=P_2$ или сила P направлена по нормали к кривой q в точке A.

Рассмотрим случай, когда двум кривым q_1 и q_2 принадлежат точки A и B соответственно. Необходимо найти кратчайшее расстояние между этими точками. Будем считать отрезок AB упругой нитью и найдем такое положение, в котором нить будет находиться в равновесии. Из сформулированного выше условия равновесия следует, что искомое положение нити есть прямолинейный отрезок между q_1 и q_2, направленный по нормали к кривой q_1 в точке A и по нормали к кривой q_2 в точке B, то есть это отрезок общей нормали к кривым в точках A и B. (Рис.5)

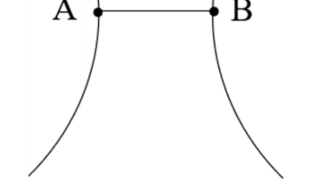

Рисунок 5 – Кратчайшее расстояние между кривыми

Покажем применение описанного принципа на конкретных примерах. Задачи будем решать не только применяя принцип общей нормали, но и способами, изученными в курсе математики первого семестра**.**

Задача 1. Найти кратчайшее расстояние между двумя ветвями гиперболы xy=8 $\left(y = \frac{8}{x}\right)$.

Решение. 1 способ – построение общей нормали АВ. (Рис.6)

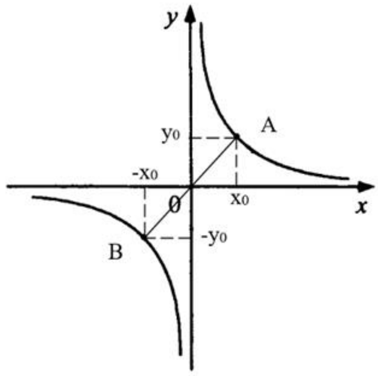

Рисунок 6 – Общая нормаль к кривым

Составим уравнение общей нормали, найдя угловой коэффициент касательной с помощью производной: $y\prime(x_0) = -\frac{8}{{x_0}^2} = k_1$, где k_1 – угловой коэффициент касательной, $-\frac{1}{k_1} = \frac{{x_0}^2}{8} = k_2$, где k_2 – угловой коэффициент нормали.

Тогда $y = \frac{8}{x_0} + \frac{{x_0}^2}{8}(x - x_0)$ – уравнение нормали.

Точка В $\left(-x_0;\ -\frac{8}{x_0}\right)$ принадлежит уравнению нормали, поэтому

$-\frac{8}{x_0} = \frac{8}{x_0} + \frac{{x_0}^2}{8}(-x_0 - x_0)$, отсюда $x_0 = \pm 2\sqrt{2}$. Далее найдем длину общей нормали двух ветвей гиперболы. Так как $A\left(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$, $B\left(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$, то $AB = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 8$ – кратчайшее расстояние между двумя ветвями гиперболы.

2 способ – применение методов аналитической геометрии.

Повернем гиперболу на угол, равный 45°, то есть применим формулы поворота координатных осей: $x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$ $y = X\cos\alpha - Y\sin\alpha.$

Проведем преобразования: $(X\cos 45° - Y\sin 45°)(X\sin 45° + Y\cos 45°) = 8$,

$(X^2 - Y^2)\sin 45°\cos 45° + XY((\cos 45°)^2 - (\sin 45\,°)^2) = 8$,

$\frac{1}{2}\sin 90° \, (X^2 - Y^2) + XY\cos 90° = 8,\ X^2 - Y^2 = 16.$

Получим $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{16} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы. (Рис. 7)

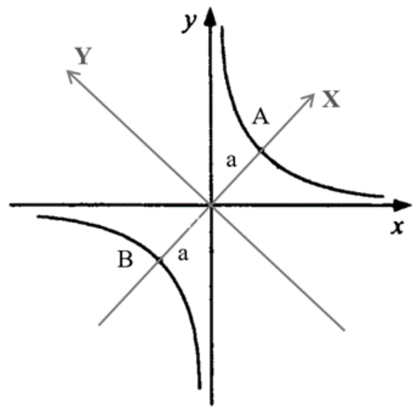

Рисунок 7 – Гипербола после поворота

Поскольку действительная полуось гиперболы равна $4,$ то $AB = 2a = 8.$

Ответ: кратчайшее расстояние между двумя ветвями гиперболы равно 8.

Задача 2. На гиперболе $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ найти точку, ближайшую к прямой $3x + 2y + 1 = 0$, и вычислить расстояние от этой точки до прямой. (Рис. 11)

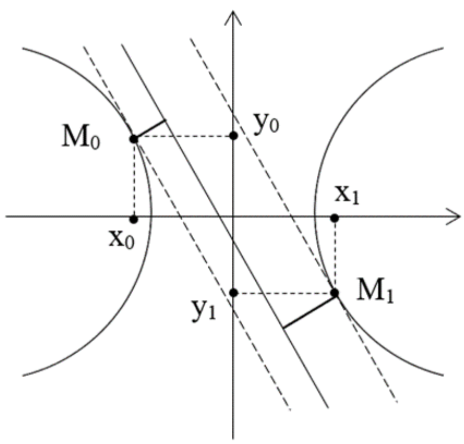

Рисунок 8 – График

Решение.

Пусть искомая точка $M_0(x_0; y_0)$ и $x_0 < 0, y_0 > 0$, тогда $y_0 = \pm\sqrt{\frac{3{x_0}^2}{4} - 18}$

Составим уравнение касательной к гиперболе в точке $M_0(x_0; y_0)$, параллельной прямой $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. Поскольку значение производной функции, вычисленной в точке касания, равно угловому коэффициенту касательной, то $k = y'(x_0) = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = \sqrt{\frac{3{x_0}^2}{4} - 18} - \frac{3}{2}(x - x_0)$ – уравнение касательной.

Найдём x_0 из уравнения $y' = \frac{3x_0}{4\sqrt{\frac{3{x_0}^2}{4} - 18}} = -\frac{3}{2}$, получим $x_0 = \pm 6$.

Так как по условию $x_0 < 0$, то $x_0 = -6$, а $y_0 = 3$. Получим точку $M_0(-6; 3)$. По известной формуле найдем расстояние от точки M_0 до прямой $3x + 2y + 1 = 0$, получим $d_1 = \frac{|3\times(-6)+2\times3+1|}{\sqrt{9+4}} = \frac{11}{\sqrt{13}}$.

Теперь предположим, что искомая точка $M_1(x_1; y_1)$ и $x_1 > 0$, $y_1 < 0$, тогда $x_1 = 6$, $y_1 = -3$. Получим точку $M_1(6; -3)$. Аналогично предыдущему, второе расстояние равно $d_2 = \frac{|3\times6+2\times(-3)+1|}{\sqrt{9+4}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$. Сравнив полученные результаты, сделаем вывод: $d_1 < d_2$. Поэтому ближайшей точкой, лежащей на гиперболе $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$, к прямой $3x + 2y + 1 = 0$ является точка $M_0(-6; 3)$, а расстояние от этой точки до прямой равно $\frac{11}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $\frac{11}{\sqrt{13}}$.

Рассмотренные задачи дают представление о том, как, с помощью простых математических формул и принципов найти кратчайшее расстояние между кривыми или прямой и кривой.

Литература:

1. Люстерник, Л. А. Кратчайшие линии. Вариационные задачи / Л. А. Люстерник. — Москва: ГОСТЕХИЗДАТ, 1955 — 103 с.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для ВУЗов / Б. П. Демидович. — Москва: Астрель: АСТ, 2005 — 558 с.