СЕКЦИЯ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

УДК 531.32

РАСЧЕТ МЕХАНИЗМА ВЕРТИКАЛЬНОГО ПОДЪЕМНИКА НА ОСНОВЕ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Студенты гр. 10903121 Ю.В. Артемьев, А.А. Дятел
Научный руководитель – ст. преподаватель Хвасько В.М.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Вертикальный подъемник представляет собой простейший механизм, с помощью которого поднимают и опускают различные грузы с помощью троса, наматываемого на барабан. Расчет подобных механизмов можно проводить на основе дифференциального уравнения динамики точки, принимая за материальную точку груз и пренебрегая весом троса и барабана. Такие расчеты применяют для проектирования и анализа различных технических систем, где перемещаются грузы, например, при проектировании грузовых лифтов для высотных зданий, систем транспортировки грузов в промышленности, где необходимо рассчитывать максимальную скорость подъема грузов, максимальную нагрузку на этаж и время подъема.

Дифференциальное уравнение движения точки записывают в виде [1]

$$m\,\overline{a} = \sum \overline{F_k}, \tag{1}$$

где m – масса материальной точки;

$\overline{a}$ – ускорение точки;

$\sum \overline{F_k}$ – сумма всех действующих на точку внешних сил.

Решение основного уравнения динамики точки сводится к проецированию уравнения (1) на ось, вдоль которой движется материальная точка, и последующему его решению. При этом решение проводят как решение первой (прямой) задачи динамики точки, определяя проекцию ускорения точки путем последовательного дифференцирования координаты точки (или закона движения) [1].

Кроме этого, движение груза вдоль стержня можно рассмотреть как сложное движение по отношению к двум системам отсчета (подвижной и неподвижной), определив таким образом абсолютную скорость груза [2]:

$$\overline{v} = \overline{v_e} + \overline{v_r}\ , \tag{2}$$

где $\overline{v_e}$ – скорость груза по отношению к неподвижной системе отсчета;

$\overline{v_r}$ – скорость груза по отношению к подвижной системе отсчета.

Затем находят абсолютное ускорение груза [2]:

$$\overline{a} = \overline{a_e} + \overline{a_r} + \overline{a_c}, \tag{3}$$

где $\overline{a_e}$ – ускорение груза по отношению к неподвижной системе отсчета;

$\overline{a_r}$ – ускорение груза по отношению к подвижной системе отсчета;

$\overline{a_c}$ – кориолисово ускорение груза.

Рассмотрим применение изложенной методики на следующем примере механизма, состоящего из груза A массой $m = 3$ кг, который опускается по гладкому вертикальному стержню с помощью невесомого нерастяжимого троса, сматываемого с барабана $Д$ с постоянной скоростью $u = 2$ м/с. Трос перекинут через блок B малых размеров, отстоящий от стержня на расстояние $l = 4$ м (рисунок 1). Требуется рассчитать силу натяжения троса при $h = l$ [3].

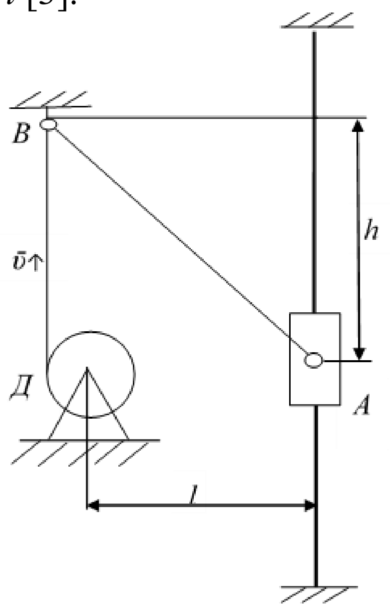

Рисунок 1

Выберем ось x с положительным направлением вниз и началом координат на уровне блока B. Дополним схему действующими силами: силой груза $m\bar{g}$, силой натяжения троса $\overline{T}$ и нормальной реакцией $\overline{N}$ (рисунок 2).

Запишем дифференциальное уравнение движения груза A в векторной форме:

$$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{T} + \overline{N}.$$

Спроецируем уравнение (1) на ось x:

$$ma_x = mg - T\sin\alpha.$$

Откуда $$T = \frac{m(g - a_x)}{\sin\alpha}.$$

Проекцию ускорения a_x можно найти двумя способами.

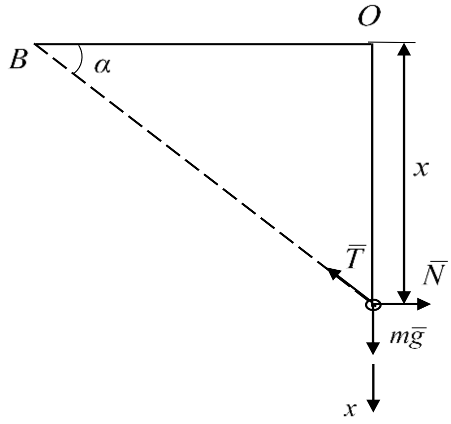

Рисунок 2

1-й способ. Запишем из геометрии уравнение связи:

$$(AB)^2 = l^2 + x^2. \tag{4}$$

Продифференцируем уравнение (4) по времени:

$$2AB\frac{\mathrm{d}(AB)}{\mathrm{d}t} = 2x\,x' \text{ или } AB\,u = x \cdot x',$$

откуда

$$v_x = x' = u\,\frac{AB}{x}. \tag{5}$$

Продифференцировав уравнение (5) по времени, получим выражение для проекции ускорения

$$a_x = \frac{u}{x^2}\left(x\,\frac{d(AB)}{dt} - AB\,x'\right) = \frac{u}{x^2}\left(x\,u - (AB)^2\,\frac{u}{x}\right) = -\frac{u^2 l^2}{x^3}.$$

В заданном положении при $x = l$

$$a_x = -\frac{u^2}{l} = -\frac{4}{4} = -1 \text{ м/с}.$$

2-й способ. Будем рассматривать движение точки A как сложное по отношению к двум системам отсчёта: неподвижной, связанной со стержнем, и подвижной, связанной с ветвью AB (рисунок 3).

Абсолютная скорость точки A согласно уравнению (2)

$$\overline{v} = \overline{v_e} + \overline{v_r},$$

где $\overline{v_e}$ – переносная скорость $\left(\overline{v}_e \perp AB\right)$,

$\overline{v_r}$ – относительная скорость $\left(\overline{v_r} \parallel AB\right)$, причем $v_r = u$, а $\overline{v} \parallel Ox$.

Спроецируем векторное уравнение (2) на ось y:

$$0 = v_e \sin\alpha + v_r \cos\alpha,$$

откуда $v_e = v_r \operatorname{ctg}\alpha = u \operatorname{ctg}\alpha = \omega_e\ AB$,

где ω_e – угловая скорость вращения ветви AB троса, и в заданном положении при $\alpha = 45^\circ$ $AB = l\sqrt{2}$ $\Rightarrow \omega_e = \dfrac{u}{l\sqrt{2}}$.

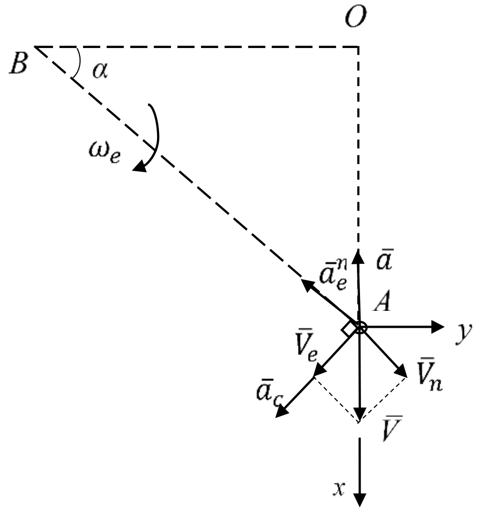

Рисунок 3

Абсолютное ускорение точки A согласно уравнению (3)

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c,$$

где a_r – относительное ускорение, причем $a_r = 0$, так как $v_r = u = \text{const}$;

a_e^n – центростремительное ускорение переносного движения, причем $a_e^n = \omega_e^2\ AB = \dfrac{u^2}{l\sqrt{2}}$ ($\bar{a}_e^n$ направлен от т. A к т. B);

a_c – кориолисово ускорение, причем $a_c = 2\omega_e v_r = 2\dfrac{u}{l\sqrt{2}}u = \dfrac{u^2\sqrt{2}}{l}$ (вектор $\bar{a}_c$ совпадает с вектором $\bar{v}_e$ согласно правилу Жуковского [1]).

Вектор $\bar{a} \| Ox$.

Проецируем уравнение (3) на прямую AB:

$$a = a_e^n\sqrt{2} = \frac{u^2}{l\sqrt{2}}\sqrt{2} = \frac{u^2}{l}, \text{ а проекция } a_x = -a = -\frac{u^2}{l}.$$

Тогда вычислим силу натяжения троса:

$$T = \frac{m(g - a_x)}{\sin\alpha} = \frac{3(9{,}8 + 1)}{0{,}7} = 46{,}29 \text{ Н}.$$

Таким образом, простейшие механизмы можно успешно рассчитывать с помощью дифференциальных зависимостей динамики точки, а также используя теоремы о сложении скоростей и ускорений из кинематики сложного движения точки [2].

Литература

1. Горбач, Н.И. Теоретическая механика. Динамика: учебное пособие / Н.И. Горбач. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая щкола, 2012. – 320 с.
2. Мышковец, М.В. Теоретическая механика. Кинематика [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения / М.В. Мышковец, В.Д. Тульев; БНТУ, Кафедра "Теоретическая механика". – Минск: БНТУ, 2016. Режим доступа: https://rep.bntu.by/handle/data/26770.
3. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

УДК 531.21

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ПРУЖИНОЙ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ И ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Студенты гр. 10903121 А.О. Иванцевич, Д.А. Буян
Научный руководитель – ст. преподаватель Хвасько В.М.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Стержневая система — это инженерная конструкция, состоящая из нескольких стержней, связанных между собой соединительными элементами (например, шарнирами). Применение пружины в таких системах позволяет изменять жесткость системы, а также компенсировать деформации, возникающие в результате действия на систему внешних сил [1]. Стержневые системы с пружинами широко применяются в различных областях, включая машиностроение, авиацию, строительство и другие инженерные отрасли.

Расчет стержневых систем является важным этапом в проектировании инженерных конструкций, однако статический расчет подобных систем ограничивается определением реакций связей, возникающих под действием внешних сил, то есть заданной нагрузки и собственного веса однородных стержней. Для системы стержней, находящейся в равновесии, можно составлять уравнения статики для каждого стержня в отдельности, комбинации двух связанных стержней, а также для всей составной конструкции в целом. При этом необходимо учитывать внутренние силы, с которыми стержни системы действуют друг на друга [2].