МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПНЕВМОТОНОМЕТРИИ ГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ

аспирант Михнович М.О.

Научный руководитель – Чигарев А.В.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Беларусь

Один из распространенных в настоящее время методов измерения офтальмотонуса – пневмотонометрия. Для использования в клинической практике используются разнообразные модели пневмотонометров (пуф-тонометров). Пневмотонометрия является бесконтактным вариантом аппланационной тонометрии, не требующей анестезии и специальной стерилизации. Специальный датчик в пневмотонометре измеряет деформацию роговицы под действием на нее слабой струи воздуха (рисунок 1).

Измерения офтальмотонуса с применением пневмотонометра имеют свои особенности. При очень плотной (твердой, крепкой) роговице цифры давления будут выше, а при чрезмерно тонкой (мягкой, рыхлой) – ниже, чем оно есть на самом деле.

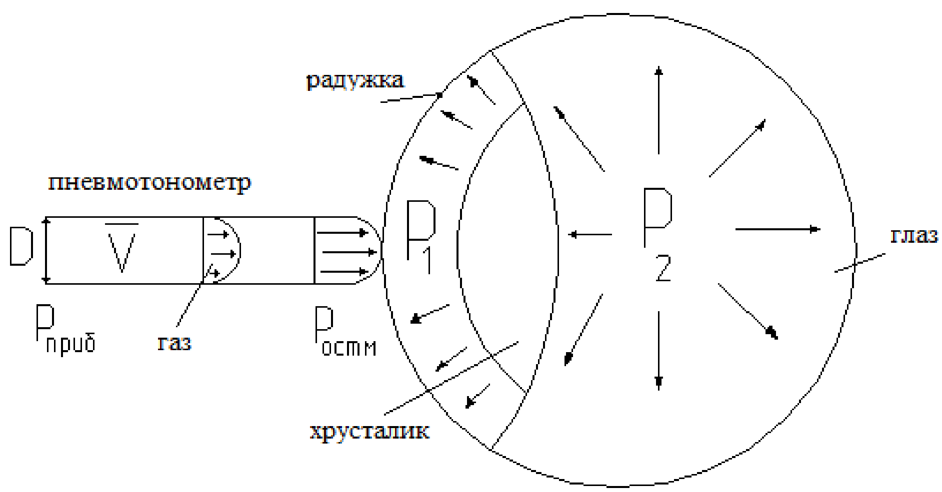

Рисунок 1. Воздействие пневмотонометра на радужку глаза

При движении газа по трубке пневмотонометра профиль скорости параболический и $V_{\max}$ на центральной линии тока, давление на поршне (в камере)$P_{приб}$, снаружи $P_{остм}$, $V_{м}$- линейная скорость, объемная скорость Q

$$Q = \pi v_{м} \left(\frac{D}{2} \right)^{2}$$

Поверхность глаза сферическая, поэтому на роговице введем криволинейную систему координат α,β,z (рисунок 2)

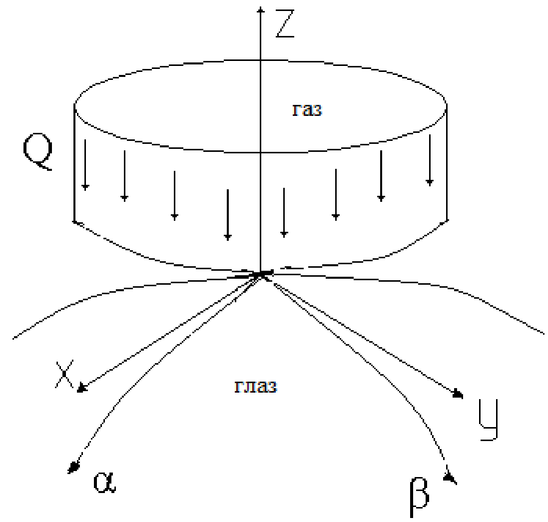

Рисунок 2. Сферическая поверхность глаза

В случае ортогональности сетки координат α, β касательные к ним оси *x, y* также ортогональные. Если трубка пневмотонометра имеет прямоугольное сечение, то удобно рассматривать в прямоугольных координатах, если круглая, то в цилиндрических. Пусть радиус трубки значительно меньше радиуса глаза, то можно положить, что взаимодействуют два сферических тела, причем вместо криволинейных координат α, β использовать *x*, *y*, а в случае круглой трубки удобно решать задачу в полярных координатах. При взаимодействии поверхность глаза деформируется под влиянием столбика газа, который при взаимодействии с глазом передает поверхности роговицы импульс. Так как молекулы после взаимодействия отекают (отражаются) вдоль поверхности, то часть кинетической энергии уносится обтекающим потоком газа. Это эквивалентно тому, что столбик газа тратит на свое псевдодеформирование часть кинетической энергии как упругое тело.

Считаем, что область контакта (ω) мала по сравнению с поверхностью глаза. Обозначим $z_i = f_i(\mathrm{x,y}),\ (\mathrm{i}=1,2)$ уравнения поверхностей z_1 переднего фронта газа и z_2 поверхности глаза в момент времени перед началом деформации. В роговице в момент времени после смятия перед восстановлением уравнения поверхностей запишем в виде

$$z_1^* = f_1(\mathrm{x,y}) + \omega_1 - \delta_1\omega_{10} - \delta_2\omega_{20}$$

$$z_2^* = f_2(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \omega_2 - (1-\delta_1)\omega_{10} - (1-\delta_2)\omega_{20} \quad (1)$$

здесь ω_{i0}- перемещения ω газового фронта (индентора) и глаза вдоль оси Oz в т. O, δ_i- коэффициенты, характеризующие перемещения тел при локальном деформировании поверхностей тел в окрестности т. O.

Условие контакта $z_1^* = z_2^*$ имеет с учетом (1) вид

$$\omega_1 + \omega_2 = \alpha - f(\mathrm{x},\mathrm{y}) \quad (2)$$

где $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = f_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) + f_2(\mathrm{x},\mathrm{y}),\ \alpha = \omega_{10} + \omega_{20}$- коэффициент локального перемещения.

Считая глаз по размерам, значительно превосходящим размеры зоны взаимодействия можно в первом приближении не учитывать отражение волны от хрусталика при ударе струи воздуха по радужке. Тогда считаем, что глаз представляет собой неограниченную полубесконечную среду, однородную и упругую. В этом случае можно применить решение задачи Буссинеска о действии нагрузки $\mathrm{P}(x,y)$ распределенной по области ω на поверхности полупространства. Тогда за пределами площадки контакта ω имеем:

$$\omega_1 + \omega_2 > \alpha - f(\mathrm{x},\mathrm{y}) \quad (3)$$

А в зоне контакта $z_1^* = z_2^*$

$$(\Theta_1 + \Theta_2)\int_\omega \frac{\mathrm{P}(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1)}{r} dx_1 dy_1 = \alpha - f(\mathrm{x},\mathrm{y})$$
$$\Theta_i = \frac{1-v_1}{2\pi G_1},\ (\mathrm{i}=1,2),\ r = \sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{y}_1)^2} \quad (4)$$

где v_2, G_2- коэффициент Пуассона и модуль сдвига роговицы, также системы, состоящей из роговицы и внутренней среды глаза, реагирующей на воздействие, v_1, G_1- эффективные упругие коэффициенты фиктивного упругого тела, которым моделируется столбик струи воздуха.

В момент достижения максимального давления в момент статического равновесия

$$\iint_{\omega} \mathrm{p}(x,y)d\omega = P \quad (5)$$

где P равнодействующая активных сил, направленная по внешней нормали в т. O.

Считая, согласно Герцу, что поверхность $f(x,y)$ представляет собой эллипс:

$$f(x,y) = Ax^2 + By^2 \quad (6)$$

Решение задачи (4), (5) получим в виде:

$$P = k\alpha^{3/2},\ k = \frac{4}{3}\frac{\varphi_1+\varphi_2}{(\Theta_1+\Theta_2)\sqrt{A+B}}(\varphi_3\bar{k})^{-3/2} \quad (7)$$

Выражая α через P, получим

$$\alpha = k_1 P^{2/3},\ k_1 = \left[\frac{3}{4}(\Theta_1+\Theta_2)\right]^{2/3} A^{1/3}\frac{\varphi_3(\bar{\mathrm{k}})}{\sqrt[3]{\varphi_1(\bar{\mathrm{k}})}} \quad (8)$$

$$\varphi_1(\bar{\mathrm{k}}) = \int_0^\infty \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{(1+\bar{\xi})(\mathrm{k}^2+\bar{\xi})(\bar{\xi})}}$$

$$\varphi_2(\bar{\mathrm{k}}) = \int_0^\infty \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{(1+\bar{\xi})(\bar{\mathrm{k}}^2+\bar{\xi})^3(\bar{\xi})}}$$

$$\varphi_3(\bar{\mathrm{k}}) = \int_0^\infty \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{(1+\bar{\xi})(\bar{\mathrm{k}}^2+\bar{\xi})(\bar{\xi})}} \quad (9)$$

$$\bar{k} = a/b,\ \bar{\xi} = \xi/a^2,\ a^2 = A^{-1},\ b^2 = B^{-1}$$

$$a = (\varphi_1+\varphi_2)^{1/3}\sqrt[3]{\frac{3P(\Theta_1+\Theta_2)}{4(\mathrm{A}+\mathrm{B})}}$$

$$b = (\varphi_1+\varphi_2)^{1/3}(\bar{\mathrm{k}})^{-1}\sqrt{\frac{3P(\Theta_1+\Theta_2)}{4(\mathrm{A}+\mathrm{B})}}$$

При сделанных предположениях согласно закону Ньютона, можем записать:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\alpha} = P \qquad (10)$$

где m_1 - масса струи воздуха индентора, m_2 - масса радужки глаза.
Начальное условие для дифференциального уравнения (10) имеет вид

$$\ddot{\alpha} = v_c,\ \alpha = 0,\ \text{при}\ t = 0 \qquad (11)$$

Последовательно интегрируя (10) с учетом (11), получим

$$\dot{\alpha}^2 - v_c^2 = -\frac{4}{5}k_2 k \alpha^{5/2} \qquad (12)$$

Или

$$\dot{\alpha} = \sqrt{v_c^2 - \frac{4}{5}k_2 k \alpha^{5/2}}$$

Максимальное деформирование роговицы достигается, когда скорость смятия становится равной нулю $\dot{\alpha}$, тогда из (12) получим:

$$\frac{5}{4}v_c^2(\mathrm{k_2 k})^{-1} = \alpha_{\max}^{5/2}$$

$$\alpha_{\max} = \left(\frac{5}{4}v_c^2(\mathrm{k_2 k})^{-1}\right)^{2/5} \qquad (13)$$

Максимальное значение силы соударения согласно (7) равно:

$$P_{\max} = k\alpha_{\max}^{3/2} = k\left(\frac{5}{4}v_c^2(\mathrm{k_2 k})^{-1}\right)^{2/5} \qquad (14)$$

Интегрируем (12), записывая его в виде уравнения с разделенными переменными:

$$d\alpha\left(\sqrt{v_c^2 - 4/5\, k_2 k \alpha^{5/2}}\right)^{-1} = dt \qquad (15)$$

Тогда:

$$t = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{v_c^2 - \frac{4}{5} k_2 k \alpha^{5/2}}} \quad (16)$$

Продолжительность контакта (время смятия, соударения) находится из уравнения:

$$\tau = 2 \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{v_c^2 - \frac{4}{5} K_2 K \alpha^{5/2}}} \quad (17)$$

Для круглой трубки радиуса R

$$A = B = \frac{1}{2R},\ k_2 = \frac{1}{m} = \frac{3}{4\pi\rho R^3},\ k = \frac{4}{3\pi}\sqrt{R}\frac{1}{\Theta_1 + \Theta_2}$$

$$\alpha_{\max} = \left[\frac{15\pi v_c^2 (\Theta_1 + \Theta_2)\mathrm{m}}{16\sqrt{R}}\right]^{2/5},\ \tau = 4{,}53\left[\frac{(\Theta_1 + \Theta_2)\mathrm{m}}{\sqrt{R} v_c}\right]^{2/5}$$

$$P_{\max} = 0{,}2515\left[\frac{v_c^2 m}{(\Theta_1 + \Theta_2)^4 R^3}\right]^{1/5}$$

где m - масса воздушного индентора

$$E = \frac{9KG}{3K + G},\ v = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}$$

$$K = \frac{EG}{9G - 3E},\ \text{v} = \frac{E - 2G}{2G}$$

$$G = 0,\ \text{v} = \infty,\ \text{E} = \frac{9K}{3\frac{K}{G} + 1} = 0$$

где $\frac{G}{K}$ - малый параметр

$$v = \frac{3 - 2\delta}{6 + 2\delta} = \left(\frac{3 - 2\delta}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \delta\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\delta - \frac{\delta}{6} + \frac{1}{9}\delta^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}(1 - \delta)$$

Преимуществом данного метода исследования ВГД является то, что он бесконтактный, а значит, что опасность развития инфицирования или травмирования глазного яблока, из-за проведённого исследования снижается практически до нуля.

Недостатком пневмотономерии считается точность измерения. Из-за индивидуальных анатомических особенностей (толщина и эластичность роговицы) показания могут отличаться от средних («нормальных») значений. Кроме того, во время исследования пациент может напрягать мышцы глазного яблока и век, что оказывает дополнительное внешнее давление на глаз и вести к увеличению значений ВГД. Поэтому, при фиксации ненормальных уровней давления рекомендуется повторное обследование методом Маклакова.

В данной работе вывели формулы получения максимальное деформирование роговицы, максимальное значение силы соударения и продолжительность контакта пневмотонометра с радужкой глаза.