УДК 372.881

Псевдоскалярное произведение

Ревтович В.Н., Чернявская С.В.
Белорусский национальный технический университет

Псевдоскалярным произведением ненулевых векторов a и b называют число $c = |a| \cdot |b| \sin \angle(a,b)$; если хотя бы один из векторов a и b нулевой, то $c = 0$. Число c обозначается $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$. Ясно, что $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} = - \boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{a}$.

Абсолютная величина псевдоскалярного произведения векторов a и b равна площади параллелограмма, натянутого на эти векторы. В связи с этим ориентированной площадью тройки точек A, B и C называют число $S(A,\ B,\ C) = (AB \vee AC)/2$; абсолютная величина числа $S(A,\ B,\ C)$ равна площади треугольника ABC.

Рассмотрим решение некоторых задач с применением псевдоскалярного произведения.

Задача 1. Три бегуна A, B и C бегут по параллельным дорожкам с постоянными скоростями. В начальный момент площадь треугольника ABC равна 2, через 5 с равна 3.

Чему может быть она равна еще через 5 с?

Решение. Пусть в начальный момент, т. е. при $\overrightarrow{AB} = v + t(b -$ *аи AC=w+tc−a*= 0, *AB=v и AC=w*. Тогда в момент t получим $\overrightarrow{AB} = v + t(b - a)$и $\overrightarrow{AC} = w + t(c - a)$, где a, b и c векторы скоростей бегунов A, B и C. Т.к. векторы a, b и c параллельны, то $(b - a) \vee (c - a) = 0$, а значит, $|S(A,B,C)| = \left|\overrightarrow{AB} \vee \overrightarrow{AC}\right|/2 = |x + yt|$, где x и y – некоторые постоянные числа.

Решая систему $|x| = 2, |x + 5y| = 3$, получаем два решения, дающие для зависимости площади треугольника ABC от времени t выражения $\left|2 + \left({}^{t}/_{5}\right)\right|$ и $|2 - t|$. Поэтому при $t = 10$ площадь может принимать значения 4 и 8.

Задача 2. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

Решение. Пусть $v(t)$ и $w(t)$ - векторы, соединяющие первого пешехода со вторым и третим в момент t.Ясно, что $v(t) = ta + b$ и $w(t) = tc + d$. Пешеходы находятся на одной прямой тогда и только тогда, когда $v(t) \parallel w(t)$,т.е. $v(t) \vee w(t) = 0$. Функция $f(t) = v(t) \vee w(t) = t^2 a \vee c + {}$ ${} + t(a \vee d + b \vee c) + b \vee d$ является квадратным трехчленом, причем $f(0) \neq 0$. Такое уравнение имеет не более двух корней.