УДК 51. (07.07)

Экстремальные точки треугольника

Ковалёнок Н.В; Пинчукова С.П
Белорусский национальный технический университет

Геометрические задачи на максимум и минимум тесно связаны с геометрическими неравенствами, так как для решения этих задач всегда нужно доказать соответствующее геометрическое неравенство и, кроме того, доказать, что оно обращается в равенство.

Задача 1: На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка X так что M и N – ее проекции на катеты AC и BC. При каком положении точки X длина отрезка MN будет наименьшей и при каком положении точки X площадь треугольника CMXN будет наибольшей?

Решение: Поскольку CMXN – прямоугольник, то MN = CX; поэтому длина отрезка MN будет наименьшей, если CX – высота.

Пусть $S_{ABC} = S$. Тогда $S_{AMX} = AX^2 \cdot S/AB^2$ и $S_{BNX} = BX^2 \cdot S/AB^2$. Поскольку $AX^2 + BX^2 \geq \frac{AB^2}{2}$ (причем равенство достигается, только если X – середина отрезка AB), то $S_{CMXN} = S - S_{AMX} - S_{BNX} \leq S/2$. Площадь треугольника CMXN будет наибольшей, если X – середина стороны AB.

Задача 2: Дан треугольник ABC. Найдите внутри него точку O, для которой сумма длин отрезков OA, OB, OC минимальна. (Обратим внимание на тот случай, когда один из углов треугольника больше 120 .)

Решение: Пусть один из углов треугольника ABC, например угол C, больше 120 . Проведем через точки A и B перпендикуляры B_1C_1 и A_1C_1к отрезкам CA и CB, а через точку C – прямую A_1B_1, перпендикулярную биссектрисе угла ACB. Поскольку $\angle AC_1B = \ = 180 \ - \angle ACB < 60$, то $B_1C_1 > A_1B_1$. Поскольку – любая точка, лежащая внутри треугольника $A_1B_1C_1$, то $B_1C_1 \cdot O\ A\ + C_1A_1 \cdot O\ B\ + A_1B_1 \cdot O\ C\ = 2S_{A_1B_1C_1}$, то(OA + $\mathrm{O\ B}$ + $\mathrm{O\ C}$ $\cdot B1C1{=}2SA1B1C1{+}(B1C1{-}A1B1){\cdot}O\ C$. Поскольку $B_1C_1{>}A_1B_1$, то сумма O A + O B + O C минимальна для точек, лежащих на стороне A_1B_1. Ясно также, что $\mathrm{O\ A}\ +\ \mathrm{O\ B}\ +\ \mathrm{O\ C} \geq O\ A\ + O\ B\ + O\ C$. Следовательно, искомой точкой является вершина C.

Предположим теперь, что все углы треугольника ABC меньше $120°$. Тогда внутри его существует точка O, из которой все стороны видны под углом $120°$.

Можно провести доказательства и для этого случая.