УДК 517.44/.445

Об одном обобщении функции Бесселя

Вирченко Н.А.
Национальный технический университет Украины "КПИ"

Обобщенную функцию Бесселя $J_{\mu,\omega}(x)$ вводим как одно из решений дифференциального уравнения

$$x^2 y'' + xy' + (x-\mu^2)(x+\omega^2)y = 0 \qquad (1)$$

Заметим, что уравнение (1) будет уравнением Бесселя при $\mu^2 = \omega^2 = \nu$.

Ищем решение уравнения (1) в виде степенного ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k ,$$

где коэффициенты C_k – аналитические функции при всех x.

Положив $C_0 = 1, C_1 = 0$, получим:

$$C_{2m} = -\frac{C_{2m-1}(b-a) + C_{2m-2}}{(2m)^2 - \mu^2\omega^2}, m = 1, 2, \ldots; \mu^2 = a, \omega^2 = b.$$

Окончательно имеем:

$$J_{\mu,\omega}(x) = \Gamma\left(\frac{2-\mu\omega}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+\mu\omega}{2}\right){}_1F_2\left(1;\frac{2-\mu\omega}{2},\frac{2+\mu\omega}{2};-\frac{x}{4}\right),$$

где ${}_1F_2$ – гипергеометрическая функция [1].

Для изучения свойств функции $J_{\mu,\omega}(x)$ доказано интегральное изображение функции ${}_1F_2(a;c,d;x)$:

$${}_1F_2(a;c,d;x) = \frac{1}{\Gamma(c-a)\Gamma(d)}\int_0^1\int_0^1 e^{tx+\tau} t^{a-1}\tau^{-1}(1-t)^{c-a-1}(1-\tau)^{d-1}dtd\tau \cdot$$

Доказаны функциональные и дифференциальные соотношения для $J_{\mu,\omega}(x)$, ряд свойств этой функции, вычислены интегралы с $J_{\mu,\omega}(x)$.

Литература:

1. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцентные функции. // М.: Наука, 1973. – Т.1. – 296 с.