

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШТАМПА НА УПРУГОМ КЛИНЕ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНЯМИ

Инж. ДМИТРИЕВА К. В.

Белорусский национальный технический университет

Теория расчета балок и плит на упругом клиновидном основании способом ортогональных многочленов разработана в [1, 2] с помощью сложного представления для функции

Грина, не позволяющей использовать спектральное соотношение П. И. Клубина [3] для упругой полуплоскости. Ниже автором предложено иное представление для функции Грина

клиновидного основания, содержащее особенность в виде решения Фламана [4] о действии сосредоточенной силы на границу упругой полуплоскости. Это представление использовано для получения решения о действии штампа на границу плоского клина со свободными гранями.

В [5] получено представление для функции Грина плоского клина со свободными гранями в следующем виде (рис. 1):

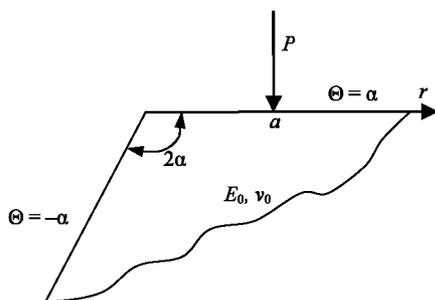


Рис. 1. Загружение плоского упругого клина нормальной к грани сосредоточенной силой

$$V_{\Theta=\alpha}(r) = \frac{2P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left(-\ln \left| \frac{a^\beta - r^\beta}{a^\beta} \right| + \frac{\pi}{8\alpha} a_1 \operatorname{sech} \frac{\pi \ln \frac{a}{r}}{8\alpha} + \right.$$

$$a_1 = \frac{32\alpha^3}{3(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)} - \frac{4(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)}{3(4\alpha + \sin 4\alpha)} - \frac{16\alpha^4(4\alpha + \sin 4\alpha)}{3(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)^2};$$

$$a_3 = -\frac{512\alpha^7}{9(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)^2} + \frac{128\alpha^5}{15(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)} + \frac{16(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)^3}{45(4\alpha + \sin 4\alpha)^3} +$$

$$+ \frac{\left[\frac{256\alpha^8}{9(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)^2} - \frac{128\alpha^6}{45(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)} \right] (4\alpha + \sin 4\alpha)}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha} + 8\alpha^2 a_1;$$

$$a_5 = -\frac{64(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)^5}{945(4\alpha + \sin 4\alpha)^5} + \frac{1024\alpha^7(48\alpha^4 + 46\alpha^2 \sin^2 2\alpha + 3\sin^4 2\alpha)}{945(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)^3} -$$

$$-\frac{256\alpha^8(160\alpha^4 + 88\alpha^2 \sin^2 2\alpha + 3\sin^4 2\alpha)}{945(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)^3} - \frac{4\alpha + \sin 4\alpha}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha} + \frac{32}{3} \alpha^4 a_1 + 8\alpha^2 (a_3 - 8\alpha^2 a_1);$$

...

$$+ \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^3 a_3 \left[\frac{1}{\cosh^3 \frac{\pi \ln \frac{a}{r}}{8\alpha}} - \frac{\tanh^2 \frac{\pi \ln \frac{a}{r}}{8\alpha}}{\cosh \frac{\pi \ln \frac{a}{r}}{8\alpha}} \right] + \left. + \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^5 a_5 \left[\frac{\sinh^4 \frac{\pi \ln \frac{a}{r}}{8\alpha} - 18 \sinh^2 \frac{\pi \ln \frac{a}{r}}{8\alpha}}{\cosh^3 \frac{\pi \ln \frac{a}{r}}{8\alpha}} \right] + \dots \right]; \quad (1)$$

$$A(\alpha) = \frac{4\alpha + \sin 4\alpha}{4\alpha^2 + \sin^2 2\alpha}; \quad \beta = \frac{\pi}{2} A(\alpha),$$

где r – координата точки, в которой определяются напряжения; a – то же границы клина, к которой приложена сосредоточенная сила P ; 2α – угол раствора клина; ν_0 – коэффициент Пуассона упругого основания; E_0 – модуль упругости материала упругого клина.

Причем коэффициенты a_1, a_3, \dots определяются по формулам:

Отметим, что для клина со свободными гранями выражение (1) дает только относительное перемещение грани $\Theta = \alpha$.

Разложим (1) в ряд по степеням $(r - a)$ с помощью пакета Mathematica 5.0 [6]. При этом допустимая точность для инженерного расчета будет обеспечена при учете не более первых трех слагаемых (1) [5].

Получаем

$$V_{\Theta=\alpha}(r) = \frac{2P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left(-\ln \left| \frac{r-a}{a} \right| + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{r-a}{a} \right)^k \right), \quad (2)$$

где

$$d_0 = -\ln \beta + \frac{\pi}{8\alpha} a_1 + \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^3 a_3;$$

$$d_1 = \frac{1-\beta}{2};$$

$$d_2 = -\frac{(\beta-5)(\beta-1)}{24} - \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^3 \frac{a_1}{2} - \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^5 \frac{5a_3}{2};$$

$$d_3 = \frac{(\beta-3)(\beta-1)}{24} + \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^3 \frac{a_1}{2} + \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^5 \frac{5a_3}{2};$$

$$d_4 = -\frac{(\beta^3 + \beta^2 - 109\beta + 251)(\beta-1)}{2880} + \quad (3)$$

$$+ \left(5 \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^5 - 11 \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^3 \right) \frac{a_1}{24} + \left(61 \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^7 - 55 \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^5 \right) \frac{a_3}{24};$$

$$d_5 = -\frac{(\beta^2 + 6\beta - 19)(\beta-5)(\beta-1)}{1440} -$$

$$-5 \left(\left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^5 - \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^3 \right) \frac{a_1}{12} - \left(61 \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^7 - 25 \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^5 \right) \frac{a_3}{12};$$

...

Рассмотрим штамп на плоском клине со свободными гранями (рис. 2) под действием сосредоточенных сил и момента.

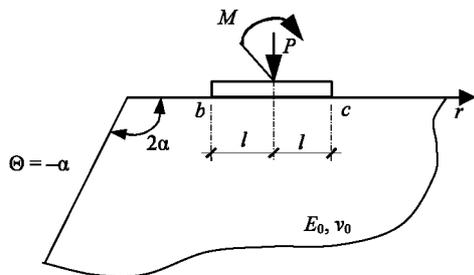


Рис. 2. Загрузка штампа на плоском клине со свободными гранями нормальной к грани сосредоточенной силой и изгибающим моментом

Предположим, что между штампом и клином отсутствуют касательные напряжения в зоне контакта. Как известно [1], решение контактной задачи для клина со свободными гранями под действием штампа, приложенного к одной из граней, сводится к решению интегрального уравнения

$$\frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \int_b^c \rho(x) K(r, x) dx = u_0 + \varphi_0 \left(r - \frac{b+c}{2} \right), \quad (4)$$

где l – полуширина штампа; b, c – координаты левого и правого краев штампа соответственно; $\rho(x)$ – неизвестный закон распределения реактивного давления между штампом и клином; $K(r, x)$ – функция Грина для клиновидного упругого основания; u_0, φ_0 – линейное и угловое перемещения штампа относительно его середины. Исходное уравнение (4) получается при выполнении тождества осадок грунта перемещениям штампа

$$W(x) \equiv Y(x).$$

В качестве функции Грина интегрального уравнения (4) примем согласно (2) следующее выражение:

$$K(r, x) = -\ln \left| \frac{r-x}{l} \right| + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{r-x}{x} \right)^k. \quad (5)$$

Сделаем в (4) замену:

$$\begin{aligned} r &= \frac{b+c}{2} + \eta l; \\ x &= \frac{b+c}{2} + \xi l. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда (4) запишется таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{l} + \varphi_0 \eta &= \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \int_{-1}^1 \rho(\xi) \times \\ &\times \left[-\ln |\eta - \xi| + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{\eta - \xi}{\xi + \frac{b+c}{2l}} \right)^k \right] d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

Для приближенного решения этой задачи можно использовать широко распространенный в теории дифференциальных и интегральных уравнений метод представления искомой функции в виде степенного ряда [7] либо в виде ряда относительно ортогональных многочленов [3].

Воспользуемся вторым из предложенных методов – методом П. И. Клубина [3]. Будем искать неизвестное пока распределение реактивных напряжений в следующем виде:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{i=0}^{\infty} B_i T_i(\xi), \quad (8)$$

где $T_i(\xi) = \cos i \arccos \xi$ – полином Чебышева 1-го рода [8, 9].

Тогда из уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{P}{l} &= \int_{-1}^1 \rho(\xi) d\xi; \\ \frac{M}{l^2} &= \int_{-1}^1 \rho(\xi) \xi d\xi \end{aligned} \quad (9)$$

сразу находим:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{P}{\pi l}; \\ B_1 &= \frac{2M}{\pi l^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Также представим [1]

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{\eta - \xi}{\xi + \frac{b+c}{2l}} \right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} T_m(\xi) T_n(\eta). \quad (11)$$

Коэффициенты разложения в правой части (9) можно найти численно. Для этого обе части (11) умножаем на $\frac{T_j(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{T_i(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi d\eta$, а затем дважды интегрируем в пределах $[-1, 1]$. С учетом свойств ортогональности полиномов Чебышева [10]

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(\xi) T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \begin{cases} \pi & \text{при } m = n = 0; \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n \neq 0; \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases} \quad (12)$$

получаем следующее выражение для определения коэффициентов в общем виде:

$$\lambda A_{i,j} = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{\eta - \xi}{\xi + \frac{b+c}{2l}} \right)^k \frac{T_j(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta \right) \frac{T_i(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi, \quad (13)$$

$$\text{где } \lambda = \begin{cases} \pi^2 & \text{при } i = j = 0; \\ \frac{\pi^2}{2} & \text{при } i = 0 \text{ или } j = 0, \quad i \neq j; \\ \frac{\pi^2}{4} & \text{при } i \neq 0 \text{ и } j \neq 0. \end{cases}$$

Подставим (8) и (11) в (7), используя при этом свойства (12), а также спектральное соотношение [3]:

$$\int_{-1}^1 \ln|\eta - \xi| \frac{T_m(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \begin{cases} -\pi \ln 2, & m = 0; \\ -\frac{\pi}{m} T_m(\eta), & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (14)$$

В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{l} + \varphi_0 \eta &= \frac{2l(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left[\pi \ln 2 B_0 + \pi \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{T_m(\eta)}{m} + \right. \\ &\left. + \pi B_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_{0,n} T_n(\eta) + \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} T_n(\eta) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножим обе части (15) на $\frac{T_j(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta$ ($j = 0, 1, 2, 3, \dots$) и проинтегрируем в пределах $[-1, 1]$. Получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{u_0}{l} = \frac{2(1-\nu_0^2)}{E_0} \left[\ln 2 B_0 + B_0 A_{0,0} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m A_{m,0} \right]; \\ \varphi_0 = \frac{2(1-\nu_0^2)}{E_0} \left[B_1 + B_0 A_{0,1} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m A_{m,1} \right]; \\ 0 = \frac{2(1-\nu_0^2)}{E_0} \left[\frac{B_2}{2} + B_0 A_{0,2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m A_{m,2} \right]; \\ 0 = \frac{2(1-\nu_0^2)}{E_0} \left[\frac{B_3}{3} + B_0 A_{0,3} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m A_{m,3} \right]; \\ \dots \\ 0 = \frac{2(1-\nu_0^2)}{E_0} \left[\frac{B_j}{j} + B_0 A_{0,j} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m A_{m,j} \right], \\ \dots \end{cases} \quad (16)$$

которую можно решать способом усечения [11].

Ограничимся n уравнениями системы (16), оставив в них члены с неизвестными $B_j, j = \overline{0, n}$. Ее можно записать в матричной форме

$$D \bar{B} = \bar{P}, \quad (17)$$

где D – матрица коэффициентов; \bar{B} – вектор неизвестных; \bar{P} – вектор свободных членов.

$$\bar{B}^T = \left(-\frac{E_0}{2l^2(1-\nu_0^2)}u_0 \quad -\frac{E_0}{2l(1-\nu_0^2)}\varphi_0 \quad B_2 \quad B_3 \quad \dots \quad B_n \right);$$

$$\bar{P}^T = \left(-B_0 \ln 2 - B_0 A_{0,0} - \frac{1}{2} B_1 A_{1,0} \quad -B_1 - B_0 A_{0,1} - \frac{1}{2} B_1 A_{1,1} \quad -B_0 A_{0,2} - \frac{1}{2} B_1 A_{1,2} - \right.$$

$$\left. -B_0 A_{0,3} - \frac{1}{2} B_1 A_{1,3} \quad \dots \quad -B_0 A_{0,n} - \frac{1}{2} B_1 A_{1,n} \right);$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{A_{2,0}}{2} & \frac{A_{3,0}}{2} & \frac{A_{4,0}}{2} & \frac{A_{5,0}}{2} & \frac{A_{6,0}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{A_{2,1}}{2} & \frac{A_{3,1}}{2} & \frac{A_{4,1}}{2} & \frac{A_{5,1}}{2} & \frac{A_{6,1}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{A_{2,2}}{2} + \frac{1}{2} & \frac{A_{3,2}}{2} & \frac{A_{4,2}}{2} & \frac{A_{5,2}}{2} & \frac{A_{6,2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{A_{2,3}}{2} & \frac{A_{3,3}}{2} + \frac{1}{3} & \frac{A_{4,3}}{2} & \frac{A_{5,3}}{2} & \frac{A_{6,3}}{2} \dots \\ 0 & 0 & \frac{A_{2,4}}{2} & \frac{A_{3,4}}{2} & \frac{A_{4,4}}{2} + \frac{1}{4} & \frac{A_{5,4}}{2} & \frac{A_{6,4}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{A_{2,5}}{2} & \frac{A_{3,5}}{2} & \frac{A_{4,5}}{2} & \frac{A_{5,5}}{2} + \frac{1}{5} & \frac{A_{6,5}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{A_{2,6}}{2} & \frac{A_{3,6}}{2} & \frac{A_{4,6}}{2} & \frac{A_{5,6}}{2} & \frac{A_{6,6}}{2} + \frac{1}{6} \\ \dots & & & & & & \end{pmatrix}$$

В табл. 1 приведены значения первых шести коэффициентов ряда (8) для $P = 10 \text{ м}$; $M = 0$; $2\alpha = \pi/2$; $b = 1$; $c = 3$ при удержании в системе (17) n членов ряда (2). Можно сделать вывод о необходимости удержания для инженерных расчетов не менее восьми, но не более 11 слагаемых ряда (2).

Для принятых исходных данных при $n = 10$ получаем следующие коэффициенты ряда (2):

$$d_0 = -1,27892, d_1 = -1,18148, d_2 = 0,187013;$$

$$d_3 = 0,00989971, d_4 = -0,0366345, d_5 = 0,0239868;$$

$$d_6 = -0,00934955, d_7 = 0,00116192, d_8 = 0,0014198;$$

$$d_9 = -0,00111465.$$

Таблица 1

Значения коэффициентов $B_j, j = \overline{0,6}$, при удержании n слагаемых ряда (2)

Коэффициент	$n = 5$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 11$
B_0	3183,1	3183,1	3183,1	3183,1	3183,1
B_1	0	0	0	0	0
B_2	0	0,0883	0,804	0,796	0,796
B_3	0	-3,763	-3,819	-3,795	-3,795
B_4	1,41	-0,085	0,260	0,258	0,257
B_5	0	-0,237	-0,271	-0,277	-0,279

Тогда матрица коэффициентов системы (17) в численном виде:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,0839 & 0,112 & -0,0494 & -0,0581 \\ 0 & 1 & 0,0368 & 0,0539 & -0,0221 & -0,0277 \\ 0 & 0 & 0,498 & -0,00181 & -0,00181 & -0,00181 \\ 0 & 0 & 1,18 \cdot 10^{-5} & 0,333 & -1,18 \cdot 10^{-5} & 4,28 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0 & 2,32 \cdot 10^{-5} & 3,07 \cdot 10^{-5} & 0,250 & 2,15 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 0 & -4,29 \cdot 10^{-6} & -3,72 \cdot 10^{-6} & -1,85 \cdot 10^{-5} & 0,200 \end{pmatrix}.$$

На рис. 3 приведен график $\rho(\xi)$ для $P = 10m$, $M = 0$; $2\alpha = \pi/2$; $b = 1$; $c = 3$. Полученная эпюра согласуется с эпюрой реактивных давлений для четвертьплоскости [12], однако в отличие от результатов [12] наблюдается асимметрия относительно вертикальной оси, вызванная близостью штампа к краю клина.

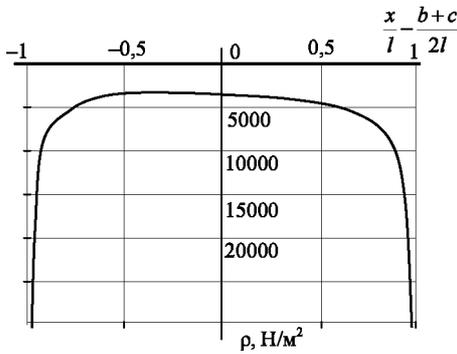


Рис. 3. Эпюра реактивных давлений на контакте» штамп – упругое клиновидное основание»

На рис. 4 показан график зависимости угла поворота штампа φ_0 от положения штампа на поверхности упругого клиновидного основания. По мере удаления штампа от края клина значение φ_0 уменьшается, т. е. пропадает индивидуальность в перемещениях штампа, вызванная видом модели упругого основания.

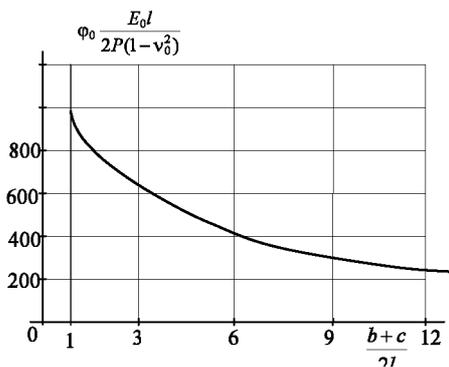


Рис. 4. Зависимость угла поворота штампа φ_0 от его положения на грани клина

ВЫВОДЫ

1. Получен универсальный алгоритм решения контактной задачи о действии штампа на границу упругого клина. На основании указанного подхода можно построить эпюры реактивных давлений на контакте штамп – основа-

ние, найти внутренние силы в сечениях штампа и его перемещения. Результаты могут быть получены при различных значениях угла раствора клина и положениях штампа. Точность расчета определяется количеством слагаемых в разложениях (8), (11).

2. Анализ полученных результатов показал, что для расчета плит конечной жесткости двух-трех членов ряда (5) оказывается недостаточно. Для инженерных расчетов достаточно удержания в формуле (5) не менее восьми, но и не более 11 членов ряда. Аналогичные выводы были сделаны в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР / под ред. Л. А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
2. Ворович, И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – М.: Наука, 1979. – 222 с.
3. Клубин, П. И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании / П. И. Клубин // Инженерный сборник ИМ АН СССР. – 1952. – Т. XII. – С. 10–18.
4. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
5. Босаков, С. В. Функции Грина для клиновидных моделей упругого основания / С. В. Босаков, К. В. Дмитриева // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь: междунар. сб. науч. тр. – 17–19 сент. 2003 г. – Гомель.
6. Дьяконов, В. П. Системы символьной математики Mathematica 2 и Mathematica 3 / В. П. Дьяконов. – М.: СК Пресс, 1998. – 328 с.
7. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1984. – 678 с.
8. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963.
9. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн; пер. с англ.; под общ. ред. И. Г. Арамановича. – М.: Наука, 1974. – 831 с.
10. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – М.: Физматлит, 2007. – 480 с.
11. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. А. Крылов. – М.; Л., 1962. – 408 с.
12. Босаков, С. В. Расчет балочных плит, лежащих на упругом клине со свободными гранями / С. В. Босаков // Техника, технология, организация и экономика строительства. – Минск: Вышэйш. шк., 1980. – Вып. 6. – С. 22–31.

Поступила 22.02.2010