Об одном представлении комплексного теплового потенциала задачи Неймана для круга

Мелешко И.Н.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается вторая основная краевая задача теории теплопроводности для уравнения Лапласа в единичном круге:

$$\begin{aligned} &\Delta T = 0, \ |r| < 1, \\ &\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=1} = \alpha T_0 f(\varphi), \ -\pi \le \varphi \le \pi, \end{aligned} \tag{1}$$

где λ – коэффициент теплопроводности, α – коэффициент теплообмена, T – температура, а T_0 – некоторая характерная температура, а $f(\varphi)$ – заданная функция.

Как известно, для решения плоской тепловой задачи достаточно найти комплексный тепловой потенциал этой задачи. Оказалось удобным искать его в виде

$$W(z) = T + i\frac{Q}{\lambda}, \ z = re^{i\varphi}, \tag{2}$$

где Q – функция расхода.

Введем функцию $u(\varphi) = \dfrac{1}{\lambda T_0} Q(1, \varphi), \ -\pi \le \varphi \le \pi.$

Тогда, с помощью условий Коши-Римана для действительной и мнимой частей комплексного потенциала (2) граничное соотношение (1) можно записать в виде

$$u(\varphi) = \beta \int_{-\pi}^{\varphi} f(\tau) d\tau + u(-\pi), \quad \beta = \left.\frac{\alpha r}{\lambda}\right|_{r=1}. \tag{3}$$

При помощи формулы Шварца, после некоторых преобразований интеграла Шварца получаем новое представление $W(z)$, содержащее известную функцию $f(\varphi)$

$$W(z) = iT_0\beta \left[-\frac{1}{\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln\left(1 - \frac{z}{e^{i\tau}}\right) d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau f(\tau) d\tau + C \right],$$

где C – действительная постоянная.