

**Релятивистское движение точек фотолибрации
в небесной механике**

Рябушко А.П. *, Жур Т.А., Зубко О.Л. *, Юринок В.И. *

*Белорусский национальный технический университет,

Белорусский государственный аграрный технический университет

В связи с существенным влиянием светового давления на законы движения естественных и искусственных небесных тел поставлена и решена следующая задача: пересмотреть решения Эйлера и Лагранжа по нахождению точек либрации L_k , $k = 1..5$ при учете светового давления в плоской ограниченной круговой задаче трех тел. Пусть A_1 – звезда массой m_1 ; A_2 – темное тело массой m_2 , сравнимой с m_1 ; A_3 – пробное тело, масса которого m_3 настолько мала, что не влияет на движение тел A_1 и A_2 , которые находятся на прямой A_1A_2 и вращаются около их центра масс O с угловой скоростью $\omega_0 = \sqrt{\gamma m / r_0^3}$, где γ – ньютоновская постоянная тяготения, $m = m_1 + m_2$, $r_0 = A_1A_2 = const$. Введя неподвижную систему координат xOy и соотношения $x = x^0 \cos \omega_0 t - y^0 \sin \omega_0 t$, $y = x^0 \sin \omega_0 t + y^0 \cos \omega_0 t$ впервые выводим систему уравнений для нахождения точек фотолибрации $L_k^*(x^0, y^0)$, где $x^0 = const$, $y^0 = const$.

$$-x^0 \omega_0^2 + \gamma(m_1 - A)(x^0 + m_2 r_0 / m) / \left[(x^0 + m_2 r_0 / m)^2 + (y^0)^2 \right]^{-3/2} + \gamma m_2 (x^0 - m_1 r_0 / m) / \left[(x^0 - m_1 r_0 / m)^2 + (y^0)^2 \right]^{-3/2} = 0, \quad (1)$$

$$y^0 \omega_0^2 - \gamma(m_1 - A)y^0 / \left[(x^0 + m_2 r_0 / m)^2 + (y^0)^2 \right]^{-3/2} - \gamma m_2 y^0 / \left[(x^0 - m_1 r_0 / m)^2 + (y^0)^2 \right]^{-3/2} = 0, \quad (2)$$

где A – редуцирующая масса звезды относительно пробного тела A_1 и вычисляется известной формуле. В коллинеарном случае уравнение (2) исчезает, а (1) дает: при $0 \leq A < m_1$ три решения, которые определяют три точки фотолибрации L_1^*, L_2^*, L_3^* при заданном A ; при $m_1 = A$ существует одна точка L_2^* , а две точки фотолибрации L_1^* и L_3^* сливаются в одну точку A_1 ; при $A > m_1$ существует только одна точка фотолибрации L_2^* при заданном A . Если $y^0 \neq 0$, то существуют два треугольных решения системы (1)–(2):

$$x^0 = (m_1 - m_2)r_0 / (2m) - 0,5 \left[1 - ((m_1 - A) / m_1)^{2/3} \right] r_0, \quad y^0 = \pm (m_1 - A) / m_1^{1/3} \cdot r_0 \sqrt{1 - 0,25((m_1 - A) / m_1)^{2/3}}. \quad (3)$$

Уравнения (3) определяют две дуги окружности $(x^0 - m_1 r_0 / m)^2 + (y^0)^2 = r_0^2$, имеющую центр в точке A_2 и радиус r_0 , но в силу $0 \leq A < m_1$, дуга окружности точкой фотолибрации L_4^* с ростом A проходится против хода

часовой стрелки от точки L_4 до A_1 , а L_5^* по ходу часовой стрелки от точки L_5 до A_1 , не включая A_1 . Треугольники $A_1A_2L_4^*$ и $A_1A_2L_5^*$ равнобедренные.

УДК 512.64

**Особенности разработки и внедрения
электронного учебно-методического комплекса по математике
в учебный процесс технического вуза**

Раевская Л.А., Юринок В.И., Яцкевич Т.С.
Белорусский национальный технический университет

Очевидный разрыв между требованиями высшей школы и уровнем знаний студентов первого курса по таким основополагающим дисциплинам, как математика и физика, ставит во главу угла современные педагогические технологии обучения, которые невозможны без применения компьютерных средств. Поэтому информационные технологии в техническом образовании студента играют все более существенную роль.

Авторами разработан электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Математика» для 1-го семестра обучения студентов инженерно-технических специальностей, который охватывает следующие разделы курса: линейная алгебра и аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. ЭУМК структурно состоит из нескольких разделов: теоретических материалов по курсу математики первого семестра обучения, материалов для проведения практических занятий по учебной дисциплине, материалов для текущей и итоговой аттестации, вспомогательных материалов.

Основополагающими принципами при разработке ЭУМК для авторов служили строгость, краткость, лаконичность и доступность изложения материала, наглядность и удобство при его использовании для обучения студентов и с различным уровнем школьной подготовки, и при работе в аудитории, и при самостоятельном изучении курса. ЭУМК «Математика. Часть 1» предназначен для студентов всех специальностей инженерно-технического профиля и отличается от других разработок прежде всего тем, что содержит набор методических материалов в виде рекомендаций студенту для работы с дисциплиной, кратких теоретических материалов, посвященных изложению в наглядном виде основных определений, свойств, формул и теорем, сопровождающихся подробными примерами,