УДК 539.3

Анализ влияния кубической анизотропии на равновесие упругой среды

Акимов В.А.
Белорусский национальный технический университет

Уравнения равновесия кубически анизотропной среды имеют вид:

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{44}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+(C_{12}+C_{44})\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)=0.$$
$$C_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+C_{44}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+(C_{12}+C_{44})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right)=0.$$
$$C_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+C_{44}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+(C_{12}+C_{44})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}\right)=0.$$

Здесь u(x;y;z), v(x;y;z), w(x;y;z) – перемещения, вызванные внешними или внутренними воздействиями; C_{11}, C_{12}, C_{44} – упругие характеристики рассматриваемой среды.

Для нахождения решения данной системы уравнений в частных производных составим ее определитель. Он имеет вид:

$$det=A(\partial_1^6+\partial_2^6+\partial_3^6)+$$
$$+B(\partial_1^4\partial_2^2+\partial_1^2\partial_2^4+\partial_2^4\partial_3^2+\partial_2^2\partial_3^4+\partial_1^4\partial_3^2+\partial_1^2\partial_3^4)+C\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2,$$

где $A=C_{11}C_{44}^2,\ B=C_{11}C_{44}^2+C_{44}C_{11}^2+C_{44}^3+(C_{12}+C_{44})^2,$

$$C=C_{11}^3+3C_{11}C_{44}^2+2C_{44}^3+(C_{12}+C_{44})^2[2(C_{12}+C_{44})-3C_{11}],$$

$\partial_1=\frac{\partial}{\partial x},\ \partial_2=\frac{\partial}{\partial y},\ \partial_3=\frac{\partial}{\partial z}.$

Для проверки правильности полученного результата, рассмотрим изотропную среду, т.е. когда $C_{12}=C_{11}-2C_{44}$. В этом случае получим $A=C_{11}C_{44}^2$, $B=3C_{11}C_{44}^2$, $C=6C_{11}C_{44}^2$, что совпадает с известным результатом [1] $det=\gamma G^3\Delta^3$, где $C_{44}=G$ – модуль поперечной упругости; $\gamma=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, где ν – коэффициент Пуассона; $\Delta^2=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2$ – оператор Лапласа. Для стали, например, $\nu\approx 0{,}25$ и $\gamma=3$.

Литература:

1. Операторный метод решения задач теории упругости: Монография / В.А. Акимов. – Мн.: УП «Технопринт», 2003. 101с.