УДК 539.3

Операторный метод решения первой основной задачи теории упругости с помощью тригонометрических рядов

Акимов В.А., Гончарова С.В.
Белорусский национальный технический университет

Впервые бигармоническую функцию напряжений представим в декартовой системе координат в операторно-символическим виде:
$$\varphi = \left[(A+By)\sin(ydx)+(C+Dy)\cos(ydx)\right]f(x) \qquad (1)$$

Представим произвольную функцию $f(x)$ в виде тригонометрического ряда: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(E_n\sin\lambda_n x+F_n\cos\lambda_n x)$. Тогда получим:

$$\begin{gathered}\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}(C_{1n}ch\lambda_n y+C_{2n}sh\lambda_n y+C_{3n}ch\lambda_n y+C_{4n}ysh\lambda_n y)\sin\lambda_n x+\\ +\sum_{n=0}^{\infty}(D_{1n}ch\lambda_n y+D_{2n}sh\lambda_n y+D_{3n}ch\lambda_n y+D_{4n}ysh\lambda_n y)\cos\lambda_n x\end{gathered} \qquad (2)$$

Здесь обозначено $CE_n=C_{1n}$, $AE_n=C_{2n}$, $DE_n=C_{3n}$, $BE_n=C_{4n}$, $CF_n=D_{1n}$, $AF_n=D_{2n}$, $DF_n=D_{3n}$, $CF_n=D_{4n}$.

Разложение (2) в ряды по синусам и косинусам совпадает с общеизвестными. Это обстоятельство подтверждает правильность нового операторного представления (1).

Взяв, например, функцию виде ряда по синусам, получим выражения для напряжений:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\sum_{n=1}^{\infty}[C_{1n}\lambda_n^2ch^2\lambda_n y+C_{2n}\lambda_n^2sh^2\lambda_n y+C_{3n}\lambda_n(2sh\lambda_n y+\lambda_n ych\lambda_n y)+$$
$$+C_{4n}\lambda_n(2ch\lambda_n y+\lambda_n ysh\lambda_n y)]\sin\lambda_n x,$$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}[C_{1n}ch\lambda_n y+C_{2n}sh\lambda_n y+C_{3n}ych\lambda_n y+C_{4n}ysh\lambda_n y]\lambda_n^2\sin\lambda_n x,$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=-\sum_{n=1}^{\infty}[C_{1n}\lambda_n ch\lambda_n y+C_{2n}\lambda_n ch\lambda_n y+C_{3n}(ch\lambda_n y+\lambda_n ysh\lambda_n y)+$$
$$+C_{4n}\lambda_n(sh\lambda_n y+\lambda_n ych\lambda_n y)]\cos\lambda_n x. \qquad (3)$$

Постоянные интегрирования, входящие в (3) определяются из граничных условий на гранях балки.