УДК 624.075

В.М. Овсянко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЯЕМЫХ И НЕИЗМЕНЯЕМЫХ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Редакция журнала «Будаўніцтва. Строительство. Construction»
Минск, Беларусь

В машиностроении и строительстве существует ряд геометрически изменяемых и неизменяемых шарнирно-стержневых систем, которые необходимо рассчитывать, в частности, на статические и динамические нагрузки. Учет больших перемещений узлов системы (геометрической нелинейности) и физической нелинейности материала конструкции существенно усложняют ее расчет. Простой пример геометрически изменяемой системы – гибкая нить, моделью которой является шарнирно-стержневая цепь, когда не учитывается изгибная жесткость. Геометрически неизменяемые системы – это прежде всего фермы, а также комбинированные системы, содержащие элементы шпренгельной решетки.

Автором разработано новое направление в моделировании стержневых и континуальных систем при расчете на статические и динамические нагрузки, а также на устойчивость. Сущность этого направления состоит в следующем. Для исследуемой системы синтезируется электронная модель, которая далее анализируется не с помощью специализированной аналоговой вычислительной техники [1], а с помощью пакета программ для расчета электронных цепей [2,3]. Эти пакеты программ обладают очень широкими возможностями благодаря, в частности, тому, что они позволяют легко реализовывать различные сложные нелинейные зависимости.

Рассмотрим применение данного направления для расчета шарнирно-стержневых систем с учетом геометрической и физической нелинейностей. Вначале выполним синтез электронной схемы-аналога стержня с шарнирами по концам с жесткостью EA без учета физической нелинейности материала.

Стержень $i-k$, принадлежащий шарнирно-стержневой системе, под действием внешней нагрузки переместился в новое положение (рис. 1). Его концевые узлы переместились по горизонтали и вертикали на величины x_i, x_k и y_i, y_k. Углы α_0 и α характеризуют первоначальное положение стержня и его конечное состояние. Для расчета примем относительные перемещения концов стержня i и k: $x = x_i - x_k$; $y = y_i - y_k$. Тогда начало координат можно разместить в узле i. После деформации первоначальная длина стержня l изменилась и стала равной l_1. Величина l_1 определяется из геометрических соображений:

$$l_1 = \sqrt{(a-x)^2 + (h-y)^2}\,. \tag{1}$$

Тогда укорочение стержня $\delta = l - l_0$ и

$$l - \delta = \sqrt{(a-x)^2 + (h-y)^2}\,. \tag{2}$$

Возведем обе части равенства (2) в квадрат, получим:

$$(l-\delta)^2 - (a-x)^2 - (h-y)^2 = 0\,. \tag{3}$$

Из выражения (3) можно определить $l-\delta$, а затем и δ, если, конечно, известны величины $a-x$ и $h-y$. Зная δ, определяем относительное укорочение стержня $\varepsilon=\delta/l$ и усилие в нем:

$$N = EA\cdot\varepsilon = \frac{EA}{l}\cdot\delta. \tag{4}$$

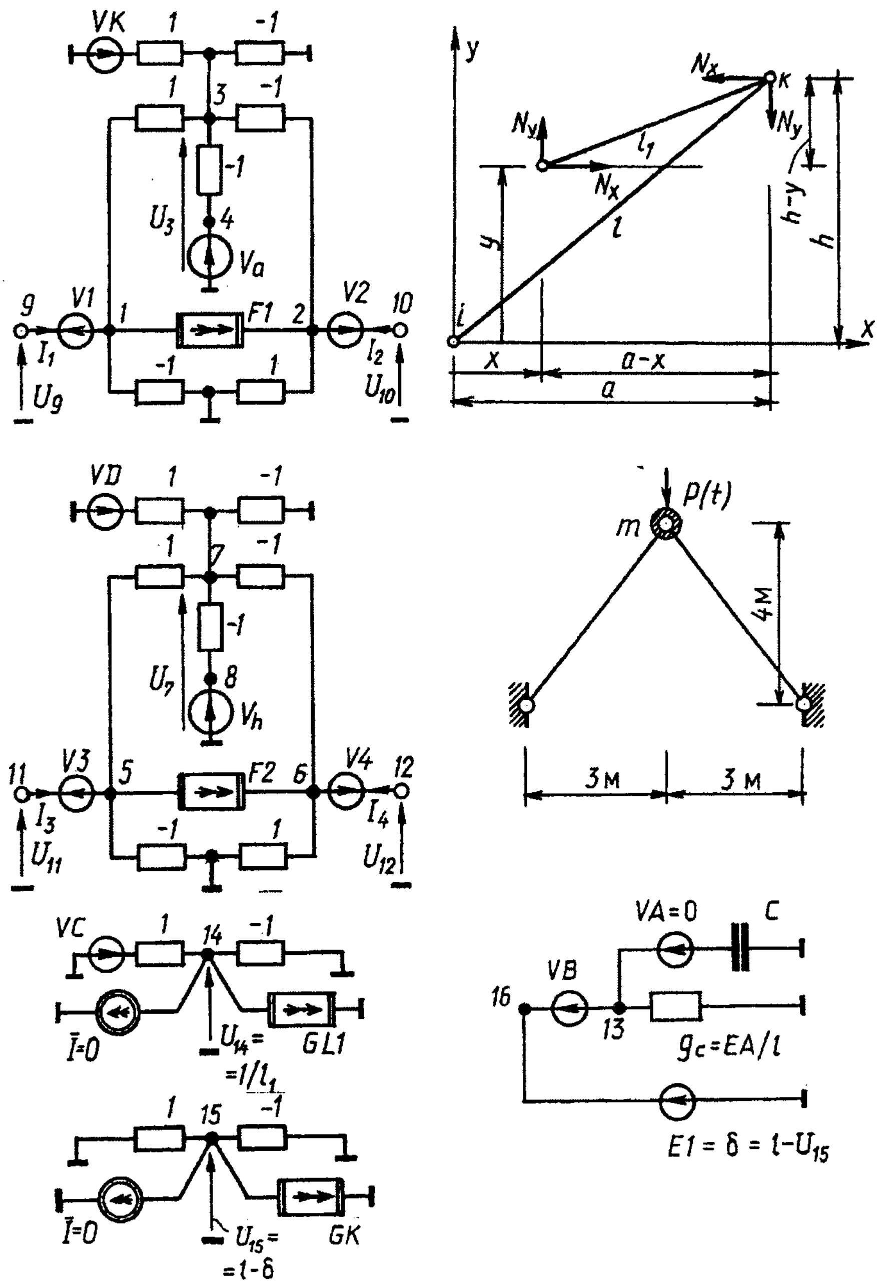

Рис. 1

Учитывая, что $\cos\alpha=(a-x)/l_1$, а $\sin\alpha=(h-y)/l_1$, определим проекции усилия N на оси x и y:

$$N_x = N \cdot \cos\alpha = N \cdot (a-x) \cdot \frac{1}{l_1};$$
$$N_y = N \cdot \sin\alpha = N \cdot (h-y) \cdot \frac{1}{l_1}. \qquad (5)$$

При записи аналогичных выражений для правого узла k стержня $i-k$ уравнения (5) необходимо умножить на -1.

Синтезируем новую электронную схему-аналог для стержня $i-k$ на основе разработанного автором метода активного инверсного одно- и двукратного дублирования неизвестных [1]. Эта схема показана на рис.1. Она содержит резисторы с положительными и отрицательными сопротивлениями (1 и – 1), источники напряжения V_a и V_h, эквивалентные геометрическим характеристикам стержня a и h в недеформированном состоянии, полиноминальные источники тока $F1$ и $F2$, управляемые токами, измерительные источники напряжения $V1$–$V4$, VK, VD, VC, VB с нулевым потенциалом.

В узле 14 модели отрабатывается напряжение U_{14}, эквивалентное величине $1/l_1$. Здесь решается нелинейное алгебраическое уравнение, записанное на основании выражения (1):

$$(1/l_1)^2 \cdot (a-x)^2 + (1/l_1)^2 \cdot (h-y)^2 - 1 = 0. \qquad (6)$$

Для решения уравнения (6) необходимо предварительно получить величины $(a-x)$ и $(h-y)$. Им соответствуют отрабатываемые в узлах 3 и 7 схемы-аналога напряжения U_3 и U_7. На полюсах схемы-аналога отрабатываются напряжения, эквивалентные линейным перемещениям узлов стержня $i-k$:

$$U_9 = x_i;\ U_{10} = x_k;\ U_{11} = y_i;\ U_{12} = y_k. \qquad (7)$$

Зная напряжения U_3 и U_7, решим уравнение (6) при помощи управляемого источника тока $GL1$, управляемого напряжениями $U_{14} = 1/l_1$, $U_3 = a - x$, $U_7 = h - y$. Ток, протекающий через измерительный источник напряжения VC, равен: $I(VC) = 1/l_1$.

В схеме с узлом 15 решается уравнение (3) при помощи управляемого источника тока GK, уравляемого напряжениями $U_{15} = l - \delta$, U_3 и U_7. Зная $l - \delta$, при помощи схемы с узлом 16 определим укорочение стержня δ. Источник напряжения $E1$, управляемый напряжением U_{15}, реализует выражение $E1 = U_{16} = l - U_{15} = \delta$. Тогда ток $I(VB)$, протекающий через измерительный источник напряжения VB и проводимость $g_c = EA/l$, будет равен продольному усилию в стержне N в соответствии с выражением (4).

В электронной схеме-аналоге протекают токи $I_1 - I_4$, которые моделируют проекции усилия N на оси x и y на основании формул (5):

$$I_1 = N_x;\ I_2 = -N_x;\ I_3 = N_y;\ I_4 = -N_y. \qquad (8)$$

Для реализации выражений (8) используются управляемые источники тока $F1$ и $F2$, которые управляются токами $I(VB) = N$, $I(VK) = a - x$ и $I(VC) = 1/l_1$ для получения проекции усилия N_x и $I(VB)$, $I(VD) = h - y$, $I(VC)$ для получения проекции усилия N_y. В узлах 1 и 5 от напряжений U_3 и U_7 возникают лишние токи $-U_3 \cdot 1 = -(a-x) \cdot 1 = -I(VK) \cdot 1$ и $-U_7 \cdot 1 = -(h-y) \cdot 1 = -I(VD) \cdot 1$. Эти лишние токи компенсируются в управляемых источниках тока $F1$ и $F2$, которые в окончательном виде реализуют следующие выражения:

$$\begin{aligned} F1 &= I(VB)\cdot I(VK)\cdot I(VC)+I(VK)\cdot 1;\\ F2 &= I(VB)\cdot I(VD)\cdot I(VC)+I(VD)\cdot 1. \end{aligned} \qquad (9)$$

Все приведенные выше выводы относятся к стержню $i-k$, находящемуся в первом квадранте. Для стержня, находящегося в четвертом квадранте, уравнения для определения горизонтальных и вертикальных проекций усилия N получаются аналогично тому, как это было сделано для стержня $i-k$. Для моделирования этих уравнений в схеме-аналоге (рис. 1) необходимо изменить полярность включенного в узел 8 источника напряжения V_h.

И, наконец, рассмотрим, каким образом реализуется физическая нелинейность материала стержня, заданная какой-либо аналитической зависимостью, например, кривой с восходящей, а затем ниспадающей ветвью:

$$N = (EA/l)\cdot\delta - (0{,}1EA/l)\cdot\delta^3. \qquad (10)$$

Выражение (10) моделируется при помощи управляемого источника тока GN, управляемого напряжением $U_{16} = \delta$ и включаемым в узел 13 вместо проводимости g_c (на рис. 1 не показан). В этом случае для устойчивой работы схемы с узлом 16 к нему подключаются два резистора +1 и –1, а также источник тока $\bar{I} = 0$, как это сделано, например, в узле 15.

Рассмотрим еще одну интересную возможность разработанной схемы-аналога. Она позволяет моделировать упруго-вязкий характер работы материала стержня с учетом и геометрической и, если это необходимо, физической нелинейностей. Тогда при учете только геометрической нелинейности для стержня, характеризуемого, например, моделью Фойгта, усилие в стержне будет определяться по формуле:

$$N = \frac{EA}{l}\cdot\delta + \eta\frac{d\delta}{dt}, \qquad (11)$$

где η – коэффициент вязкости, моделируемый конденсатором C, включаемым через измерительный источник напряжения VA в узел 13. Тогда ток $I(VA)$, протекающий через VA, будет моделировать второе слагаемое в выражении (11).

Подобным образом реализуются модели Максвелла и Кельвина, определяющие упруго-вязкий характер работы материала во времени.

Разработанные схемы-аналоги стержня с шарнирами по концам с учетом больших перемещений применены при расчете гибких нитей, модели которых можно представить в виде геометрически изменяемых шарнирно-стержневых цепей, при расчете шпренгельных шарнирных систем, обладающих кинематической изменяемостью и способных в небольших пределах изменять конфигурацию, принимая новое устойчивое положение [2].

Рассмотрим применение синтезированной схемы-аналога для очень простой, но весьма «авторитетной» двухстержневой системы – фермы Мизеса, в которой потеря устойчивости первоначального положения при переходе в другое равновесное состояние происходит посредством перескока.

Автором выяснено, что ферма Мизеса обладает еще одним очень интересным свойством: при определенных динамических воздействиях она превращается в генератор стохастичности. В фазовом пространстве подобных динамических систем возможно существование определенных зон, называемых странными аттракторами. В обычных динамических системах при случайных сигналах на входе отклик будет иметь стохастический характер, а если сигнал имеет не случайный характер, то и отклик будет адекватным. Выяснено, что при гармонической синусоидальной нагрузке, периодически повторяющихся импульсах, имеющих одни и те же амплитудные значения и период, при их определенных параметрах ферма Мизеса превращается в генератор стохастичности.

На колеблющуюся массу m фермы Мизеса (рис. 1) действует сила инерции массы, сила сопротивления, пропорциональная скорости колебания, сила упругости фермы и внешняя возмущающая сила $P(t)$.

Дифференциальное уравнение динамического равновесия, определяющее возмущенное движение массы по вертикали, имеет вид:

$$m\ddot{y} + 2km\dot{y} + \left[\frac{EA}{l}(h-y)\left(\frac{l}{l_1}-1\right) + \frac{EA}{l}(h+y)\left(\frac{l}{l_2}-1\right)\right] = P(t), \qquad (12)$$

где первое слагаемое в квадратных скобках относится к левому стержню фермы $(i-k)$ второе к правому.

В выражении (12) EA – жесткость каждого из стержней; k – коэффициент затухания; l – первоначальная длина каждого из стержней; l_1 и l_2 - длины стержней в деформированном состоянии.

Примем $EA = 5$ кН, $m = 1$ кН·с^2/м, $2k = (1/1{,}371)$ с$^{-1}$. Электронные модели стержней выполняются с использованием схемы, показанной на рис. 1. Организация свободных колебаний массы m выполнена в соответствии с методикой, описанной в работе [4]. Для реализации вынужденных колебаний в узел модели, в котором отрабатывается вертикальное перемещение массы m, включается источник тока, характеристики которого соответствуют типу возмущающей силы $P(t)$.

Выяснено, что странный аттрактор в ферме Мизеса наблюдается для трех типов силы $P(t)$: силы, изменяющейся по гармоническому синусоидальному закону; периодически повторяющихся импульсов [4]; силы, имеющей пилообразный характер. При небольших амплитудных значениях каждой из этих сил колебания массы по вертикали имеют упорядоченный периодический характер. В некотором узком диапазоне амплитудных значений $P(t)$ перемещения y имеют хаотический характер. Значения y в этом случае приближаются к значению $h = 4$ м, но не превосходят его. При еще больших амплитудных значениях силы $P(t)$ масса m перескакивает среднее нейтральное положение, перемещения массы больше, чем h, а колебания опять становятся упорядоченными.

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила имеет пилообразный характер, где для каждого «зуба пилы» длительность переднего фронта импульса равна 8 с, длительность заднего фронта – 0,0001 с, длительность вершины импульса – 0,0 с, период чередования импульсов – 8,0001 с. Хаотичекий характер перемещений узла фермы появляется при значениях P, находящихся около значения 2,5 кН. Стохастичекий характер перемещений узла фермы хорошо наблюдается для $P = 2{,}525$ кН. График этих перемещений в пределах времени 0 – 205 с приведен на рис. 2. Сверху графика показан характер действующей на ферму Мизеса пилообразной нагрузки. В этом случае максимальные перемещения массы m вниз не превосходят 3,4 м. Особенно эффектно наблюдается хаотический характер динамического процесса на графике, показанном на рис. 3. Здесь приведен характер изменения силы инерции массы в более узком пределе времени от 0 до 70 с. По оси ординат на графике отложены значения сил инерции, которые моделируются токами, измеряемыми в амперах (А). При амплитудном значении пилообразной нагрузки $P = 2{,}53$ кН происходит перескок узла фермы вниз от уровня опор и колебания приобретают установившийся характер, приближаясь к отметке –10 м.

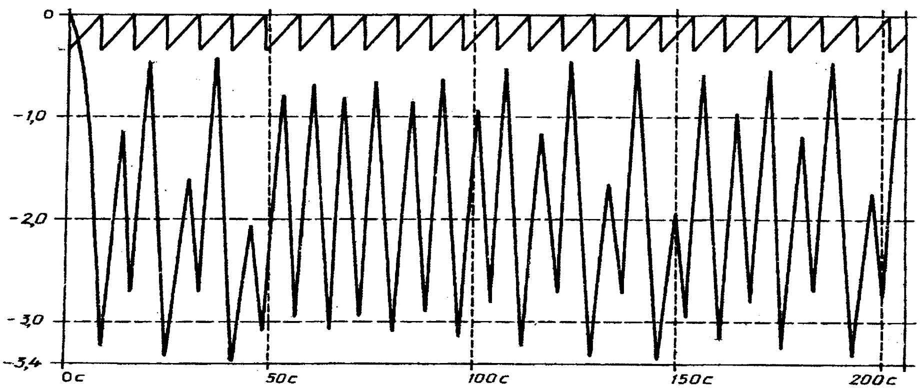

Рис. 2

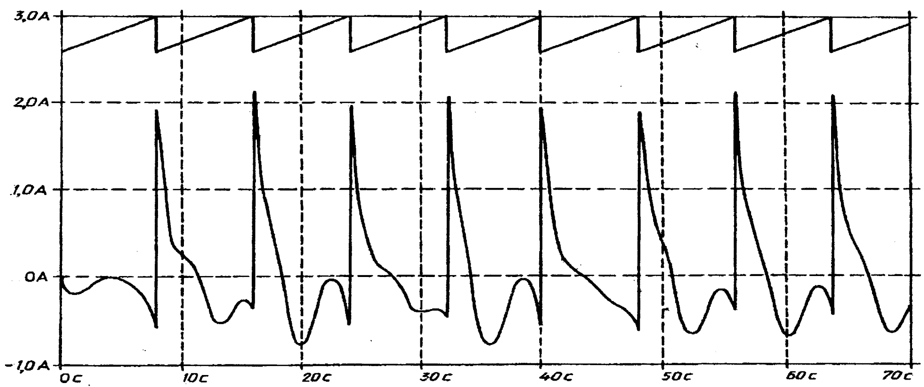

Рис. 3

Ферму Мизеса в генератор стохастичности могут превращать, очевидно, и другие виды внешних динамических воздействий. Представляет интерес и поиск других механических систем, в фазовом пространстве для которых возможно существование странного аттрактора.

Особенно неожиданные результаты следует ожидать в случае, когда в разработанной схеме-аналоге стержня шарнирно-стержневой системы с большими перемещениями будет учитываться физическая нелинейность и вязкость материала.

Предложенная методика моделирования объектов строительной механики и прикладной теории упругости с помощью компьютерного анализа их электронных моделей поможет раскрыть тайны еще не одной нестандартной геометрически неизменяемой шарнирно-стержневой системы с учетом больших перемещений, а также стержневых и континуальных систем, работающих на изгиб.

Литература. 1.Овсянко В. М. Синтез электронных моделей деформируемых объектов. – Мн.: Наука и техника, 1982. 336 с. 2. Овсянко В. М. Следящая сила и вокруг нее: Компьютерный анализ электронных моделей деформируемых объектов. – Мн.: Полымя, 1999. 272 с. 3. Овсянко В. М. Устройство для моделирования изгибаемого стержня с односторонними шарнирами. А. С № 1815659. Зарегистрировано в Государственном регистре изобретений СССР 11 октября 1992 г. по заявке № 4872298 от 14 августа 1990 г.4.Овсянко В. М. Хаотические колебания фермы Мизеса // Нелинейная динамика механических и биологических систем. Межвузовский сборник / Саратовский государственный технический университет. – Саратов, 2000. – С. 152–157.