применением классических волновых принципов распространение интенсивных воздействий в технологической среде и моделировать изменение и передачу состояния и свойств конструкционного материала.

Таким образом, с позиций теории распределенных систем границу распространения технологических воздействий в конструкционном материале – технологический барьер, целесообразно представить вырождением распространения фронта волны возбуждения, для определения которого требуется знать необходимые и достаточные условия невырожденного распространения и топологию связей фронта волны возбуждения.

Литература. 1. Иванова В.С., БаланкинА.С., Бунин И.Ж., Оксогоев А.А Синергетика и фракталы в материаловедении.-М.: Наука, 1994.-383с. 2. Хейфец М.Л., Кожуро Л.М., Мрочек Ж.А. Процессы самоорганизации при формировании поверхностей.-Гомель: ИММС, 1999.-276с. 3. Смолянинов В.В. Математические модели биологических тканей.-М.: Наука, 1980.-368с.

УДК 539.3

Ю.В. Василевич, С.В. Акимова, О.И. Алейникова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НОВЫХ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Разработка многих новых аналитических решений трехмерных граничных задач анизотропного тела основывается на подходе и методах построения решений для изотропных тел.

При решении задачи об определении напряженно-деформированного состояния в изотропном полупространстве в зависимости от заданной нормальной нагрузки на поверхности $z=0$, Галин Л.А., следуя Лурье А.И. [2], воспользовался функциями, введенными Папковичем П.Ф. и Нейбером [3]. Компонены перемещений были выражены через гармонические функции $\Phi_i (i=\overline{1,4})$. Вследствие отсутствия при $z=0$ касательных напряжений $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ получены два соотношения, связывающие между собой Φ_i. Воспользовавшись свойством регулярности гармонических функций и введя новую гармоническую функцию, Галин Л.А. выразил Φ_i через нее. В итоге оказалось, что компоненты напряжений и перемещений выражены через одну гармоническую функцию [1].

Ниже излагается новый подход к решению вышеописанной задачи, который в дальнейшем положен в основу построения решения граничных задач для упругих тел, обладающих анизотропными свойствами материала.

Уравнением равновесия $\sigma_{ij,j}=0$ $(i,j=1,2,3)$ при отсутствии объемных сил удовлетворим, если положим

$$\sigma_x = \partial^2\Phi_1/\partial y^2 + \partial^2\Phi_3/\partial z^2, \qquad \tau_{xy} = -\partial^2\Phi_1/\partial x\partial y,$$
$$\sigma_y = \partial^2\Phi_1/\partial x^2 + \partial^2\Phi_2/\partial z^2, \qquad \tau_{yz} = -\partial^2\Phi_2/\partial y\partial z, \qquad (1)$$
$$\sigma_z = \partial^2\Phi_3/\partial x^2 + \partial^2\Phi_2/\partial y^2, \qquad \tau_{xz} = -\partial^2\Phi/\partial x\partial z,$$

где $\Phi_i(x,y,z)$ - некоторые дифференцируемые функции; остальные обозначения общеприняты.

Уравнения закона Гука для касательных напряжений будут тождественно удовлетворены, если компоненты перемещений U,V,W запишем в виде

$$U = -0{,}5a_{66}\partial/\partial x(\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3),$$
$$V = -0{,}5a_{66}\partial/\partial y(\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3), \qquad (2)$$
$$W = -0{,}5a_{66}\partial/\partial z(-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3);$$

здесь $a_{66} = 2(a_{11} - a_{12})$, a_{ij} - постоянные упругости.

Представим функции Φ_i в форме

$$\Phi_i = z(\alpha\varphi + \alpha_i\varphi_i) + \psi + \beta_i\psi_i + \alpha\dot{\varphi}, \qquad (3)$$

где $\alpha, \alpha_i, \beta_i$ - произвольные коэффициенты; $\varphi, \psi, \varphi_i, \psi_i$ - некоторые гармонические функции; $\dot{\varphi} = \int\limits_z^\infty \varphi(x,y,z)dz$, $\partial\dot{\varphi}/\partial z = -\varphi(x,y,z)$, $\partial\varphi/\partial z = -\partial^2\dot{\varphi}/\partial z^2$.

С учетом формул (2), (3) потребуем обращения в тождества трех уравнения закона Гука для нормальных напряжений. Условие будет выполнено, если $\varphi_i = 0$, $\psi = \psi_2 = \psi_3 = 0$,

$$\beta_1\psi_1 = -\frac{2\alpha(a_{11} + a_{12})}{a_{11}}\dot{\varphi},$$

где $\alpha = (a_{11} - a_{12})^{-1}$.

Таким образом, компоненты напряжений и перемещений выражаются по формулам (1) и (2) с учетом найденных выражений для Φ_i

$$\Phi_1 = z\alpha\varphi + \beta_1\psi_1 + \alpha\dot{\varphi}, \qquad \Phi_2 = \Phi_3 = z\alpha\varphi + \alpha\dot{\varphi}.$$

Полученные формулы для напряжений и перемещений совпадают с известными формулами Галина Л.А. [1].

Предположим, что полупространство является анизотропным и имеет три плоскости упругой симметрии. Требуется получить общие формулы для расчета напряженно-деформированного состояния упругого тела при действии на его границу нормальной нагрузки.

Уравнениям равновесия удовлетворим если положим, что компоненты напряжений представлены в форме (1), при этом $\Phi_i = \Phi_i(x_1, y_1, z_1)$ - некоторые дифференцируемые функции переменных $x_1, y_1 = \mu y$, $z_1 = \lambda z$; μ, λ - безразмерные коэффициенты.

Выразим компоненты перемещения в виде

$$U = -\partial/\partial x(c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2 + c_{13}\Phi_3),$$
$$V = -\partial/\partial y(c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2 + c_{23}\Phi_3), \qquad (4)$$
$$W = -\partial/\partial z(c_{31}\Phi_1 + c_{32}\Phi_2 + c_{33}\Phi_3),$$

где c_{ij} - произвольные коэффициенты.

Удовлетворяя уравнениям закона Гука для касательных напряжений [4] при помощи равенств (1), (4) найдем c_{ij}

$$c_{11} = c_{21} = -c_{31} = 0{,}5a_{66}, \quad c_{22} = c_{32} = -c_{12} = 0{,}5a_{44}, \quad c_{33} = c_{13} = -c_{23} = 0{,}5a_{55},$$

где a_{kk} - постоянные упругости, $k=\overline{4,6}$.

Представим функции $\Phi_i = \Phi_i(x_1, y_1, z_1)$ в виде

$$\Phi_1(x,\mu y,\lambda z) = \beta(z\varphi(x,\mu y,\lambda z) + \psi(x,\mu y,\lambda z) + \gamma\dot\varphi(x,\mu y,\lambda z)),$$
$$\Phi_2(x,\mu y,\lambda z) = \beta(z\eta\varphi(x,\mu y,\lambda z) + \eta\dot\varphi(x,\mu y,\lambda z)), \tag{5}$$
$$\Phi_3(x,\mu y,\lambda z) = \beta(z\xi\varphi(x,\mu y,\lambda z) + \xi\dot\varphi(x,\mu y,\lambda z)),$$

где φ, ψ - квазигармонические функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$(\mathrm{X} + \mu^{-2}\mathrm{Y} + \lambda^{-2}\mathrm{Z})\varphi = 0, \qquad (\mathrm{X} + \mu^{-2}\mathrm{Y} + \lambda^{-2}\mathrm{Z})\psi = 0. \tag{6}$$

Здесь $\mathrm{X} = \partial^2/\partial x^2$, $\mathrm{Y} = \partial^2/\partial y^2$, $\mathrm{Z} = \partial^2/\partial z^2$;

$\dot\varphi = \int_z^\infty \varphi(x_1, y_1, z_1)dz$, $\partial\dot\varphi/\partial z = -\varphi$; β, ξ, η - произвольные постоянные.

Удовлетворим уравнениям закона Гука для нормальных напряжений на основании выражений (1), (4), (5). Следуя методике решения задачи для изотропного тела получим три выражения, каждое их которых представим в виде суммы двух выражений, одно их которых будет содержать множитель z. Приравнивая нулю каждое из выражений, получим две системы дифференциальных уравнений. Наличие произвольных постоянных, требование выполнения условия совпадения соответствующих левых частей уравнений и исследование их независимости позволили найти выражения $\mathrm{X}\psi$ и $\mathrm{Y}\psi$. С учетом найденных выражений на основании второго уравнения (6) определен явный вид функции ψ

$$\psi = -2\{(a_{13} - a_{23}\mu^{-2})(a_{12}\xi + a_{22}\eta) + (a_{22}\mu^{-2} - (a_{11}a_{22})^{1/2})\times$$
$$\times[a_{13}\xi + a_{33}\eta + 0{,}5(-a_{66} + a_{44}\eta + a_{55}\xi)]\}\{\lambda^{-2}(a_{13}a_{22} -$$
$$- a_{23}(a_{11}a_{22} - a_{23}(a_{11}a_{22})^{1/2}) + (a_{22}\mu^{-2} - (a_{11}a_{22})^{1/2}0{,}5a_{66}\}^{-1}\dot\varphi$$

где $\lambda^2 = a_{44}/a_{66}$, $\mu^2 = (a_{23} + a_{33}\xi)/(a_{13} + a_{33}\eta)$, $\xi = a_{22}a_{66}/2\Delta$, $\eta = a_{66}\sqrt{a_{11}a_{22}}/2\Delta$,
$\Delta = a_{22}(2a_{11}a_{44}/a_{66} - a_{13} - 0{,}5a_{55}) - a_{12}(2a_{12}a_{44}/a_{66} + 0{,}5a_{44} - a_{23})$.

Таким образом, представление функций Φ_i через комбинацию квазигармонических функций φ и ψ, позволило получить общие формулы для расчета напряженно-деформированного состояния анизотропного полупространства. Данное представление общих формул имеет место, если постоянные упругости удовлетворяют соотношениям

$$a_{66} = 2(\sqrt{a_{11}a_{22}} - a_{12}), \qquad a_{55} = 2(\sqrt{a_{11}a_{33}} - a_{13}),\ a_{44} = 2(\sqrt{a_{22}a_{33}} - a_{23}) \tag{7}$$

Формулы (7) могут быть использованы для расчета модулей сдвига в главных плоскостях симметрии анизотропного тела, а также при моделировании новых материалов с заданными анизотропными свойствами. Численный расчет модулей сдвига для некоторых анизотропных упругих материалов дал удовлетворительное совпадение с аналогичными величинами, полученными экспериментально. В итоге компоненты напряжений и перемещений выражаются через одну квазигармоническую функцию φ, явный вид которой определим исходя из решения конкретной граничной задачи [4].

Литература. 1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. – 304 с. 2. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с. 3. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. – ZAMM. – 1934. – Bd.14, №4. p. 203-206. 4. Василевич Ю.В. Прусов И.А. Об одном методе решения первой основной задачи для ортотропного полупространства. – Изв. АН СССР. – 1989. – Мех. твердого тела. - №2. С. 66-72.