Решение ищем в виде разложения в ряд по малому параметру:

$$U_i^k(x,A)=u_i^{k(0)}(x)+\varepsilon u_i^{k(1)}(x,A)+\varepsilon^2\ldots$$

Для нулевого приближения из (10) получаем

$$\sum_{k=1}^{3}\left\{-\int_{V_k}(K^k\theta^{k(0)}\delta\theta^k+2G^k e_{ij}^{k(0)}\delta e_{ij}^k)dV_k+\omega_0^2\int_{V_k}\rho^k u_i^{k(0)}\delta u_i^k dV_k\right\}=0,$$

$$\int_{V_k}\rho^k u_i^{k(0)}u_i^{k(0)}dV_k=1. \qquad (11)$$

Уравнение (11) совпадает с задачей о собственных колебаниях упругого слоистого тела, в которой $u_i^{k(0)}$ – ортонормированная собственная функция.

Для первого приближения следует уравнение

$$\sum_{k=1}^{3}\left\{-\int_{V_k}(K^k\theta^{k(1)}\delta\theta^k+2G^k e_{ij}^{k(1)}\delta e_{ij}^k)dV_k+\omega_0^2\int_{V_k}\rho^k u_i^{k(1)}\delta u_i^k dV_k-\right.$$

$$\left.-2\int_{V_k}\Delta G_\omega^k e_{ij}^{k(0)}\delta e_{ij}^k dV_k+2\Delta\omega\int_{V_k}\rho^k u_i^{k(0)}\delta u_i^k dV_k\right\}=0,\ \widetilde{G}^k=G^k+\Delta G_\omega^k. \qquad (12)$$

Уравнения (12) имеет решение при выполнении необходимого условия

$$-\sum_{k=1}^{3}\int_{V_k}\Delta G_\omega^k e_{ij}^{k(0)}e_{ij}^{k(0)}dV_k+\Delta\omega=0. \qquad (13)$$

Здесь $\Delta G_\omega^k=\Delta G_\omega^k(A_k\overline{A}_k,e_{ij}^k e_{ij}^k)$, поэтому соотношение (13) дает в явном виде зависимость приращения частоты $\Delta\omega$ от амплитуды колебаний $A_k\overline{A}_k$.

УДК 531.3:519.95:513.88

Г.С. Полетаев, Л.И. Солдатов

О ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ И УРАВНЕНИЯХ С НЕИЗВЕСТНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ И ПРОЕКТОРАМИ

Одесская государственная академия холода
Одесса, Украина

1. Общие положения

1.1. Изучение однотипных задач для совокупностей одинаковых по геометрическому и физическому описанию тел (иначе "пакетов" тел) [1, 2] может приводить к матричным уравнениям вида:

$$AX=B, \qquad (1)$$

где A, B предварительно найденные, а X – неизвестная матрицы. Часто, в задачах механики и всюду ниже, рассматриваемые матрицы принадлежат кольцу $R_{n\times n}$, $n\geq 2$, $n\in N$ квадратных вещественных числовых матриц. Рассмотрим, например, пакет из $n\in N$ балок, одинаковых с геометрической и физической стороны. Пусть на каждой из балок пакета выделено по $n\in N$ точек, совпадающих, соответственно, при мысленном наложении балок. Предположим следующее: если обобщённая матрица влияния A каждой балки есть матрица влияния "сил на прогибы", то матрица сил A, моделирующая нагрузку из параллельных сил, приложенных в указанных точках “пакета”, и матрица B коллинеарных силам прогибов в этих точках связаны уравнением (1). Задачу отыскания из (1) совокупности величин, моделируемых матрицей B, по известным величинам, моделируемым матрицами A, X, условимся называть прямой, а другие задачи – обратными. При существовании соответствующих обратных матриц решение таких задач с матричной моделью (1) – очевидно. До определённого уровня, ситуация в задачах, где A, X, B матрицы-функции, аналогична.

1.2. Введём некоторые из используемых ниже обозначений и обратимся к задачам. Через p^+, (p^-) обозначим проекторы: $R_{n\times n} \to R_{n\times n}$, ставящие в соответствие каждой матрице $A \in R_{n\times n}$ нижнюю (верхнюю) треугольную матрицу A^+, (A^-), получающуюся из A заменой всех её элементов, расположенных выше (ниже) главной диагонали нулями, соответственно. Проекторы p^+, p^- – коммутирующие: $p^+ p^- = p^- p^+$ [4]. Определим ещё проекторы: $p^0 := p^+p^-(= p^-p^+)$; $p_\mp := p^\mp - p^0$ и подмножества: $R^\mp_{n\times n} := p^\mp(R_{n\times n})$, $(R_{n\times n})_\mp := p_\mp(R_{n\times n})$; $R^0_{n\times n} := p^0(R_{n\times n}) = R^+_{n\times n} \cap R^-_{n\times n}$. Ясно, что $R^\mp_{n\times n}$ образуют все верхние / нижние треугольные, а $R^0_{n\times n}$ – диагональные матрицы из $R_{n\times n}$ [1 – 4].

2. Задачи с неизвестными, моделируемыми треугольными матрицами

2.1. Такие задачи сложнее [1 – 3]. Ситуации в них аналогичны следующим, возникающим при рассмотрении задач для совокупностей одинаковых балок, рам, ферм. Пусть для “пакета” тел (объектов) отыскивается часть величин, моделируемых матрицей X в (1). Остальные элементы X, обобщённая матрица влияния A и часть элементов, моделируемых матрицей B, определены заранее. Тогда возникают задачи, отличающиеся от моделируемых (1). Аналогично при отыскании части A или факторизованной формы A, в соответствующих условиях. Матричные уравнения – модели таких задач могут содержать “частично известные или неизвестные” матрицы. Преобразованиями с проекторами или иными, в ряде ситуаций, они могут приводиться к важному случаю, когда неизвестные – треугольные матрицы. Например, когда неизвестна лишь нижняя треугольная часть X^+ матрицы X, а известна матрица A и часть B^+ матрицы B, являющаяся также нижней треугольной. Некоторые такие задачи механики с треугольной неизвестной матрицей, поставленных для “пакета” “n”, $n \geq 2, n \in N$ одинаковых с геометрической и физической стороны тел, с выделенными на каждом системами по “n” точек и обладающих совпадающими обобщенными матрицами влияния, приводят, в частности, к матричным уравнениям [1 – 3] вида:

$$[AX^+]^+ = B^+, \quad (2) \qquad AX^+ = B^+ + B_-, \quad (3)$$

$$[Y^-A]^- = C^-, \quad (4) \qquad Y^-A = C^- + C_+, \quad (5)$$

$$[A(X^+ + X_-)]^+ = B^+, \quad (6) \qquad A(X^+ + X_-) = B^+ + B_-, \quad (7)$$

им эквивалентным и другим. Уравнения (2) – (7) являются частными случаями, уравнений типа следующих:

$$[A_1(X^\mp + X_\pm)A_2]^\mp = B^\mp, \quad (8) \qquad A_1(X^\mp + X_\pm)A_2 = B^\mp + B_\pm. \quad (9)$$

Знаки + (–), у матриц и их произведений сверху (снизу), указывают на применение соответствующих проекторов p^+, (p^-), p_+, (p_-) или на принадлежность соответствующему подмножеству $R_{n\times n}$. В зависимости от постановки задачи, часть матриц в (1) – (9) считаются известными, а часть неизвестными. Ниже полагаем, что неизвестны матрицы – X, $X^\mp$, Y^-, $B_\pm$, $C_+ \in R_{n\times n}$, $n \geq 2$, а остальные – наперед определены и известны. Отметим, что аналогиями (2), (3), рассматриваемые как уравнения с неизвестными X^+, B_-, связаны с интегральными уравнениями типа Винера-Хопфа: $x(t)-\int_0^\infty k(t-s)x(s)ds=b(t),\quad 0\le t<\infty$, и известной задачей Римана-Гильберта-Привалова теории аналитических функций [5]. Причина в общности, обнаруживаемой с точки зрения основ теории колец и функционального анализа [6, 7].

2.2. Пусть теперь известна обобщенная матрица влияния A балок "пакета" и "часть $B^+\in R^+_{n\times n}$ матрицы B", моделирующей прогибы в указанных выше $n\times n$ точках. Тогда задача отыскания нагрузки из параллельных сил, приложенных в этих $n\times n$ точках "пакета", коллинеарных прогибам и моделируемых нижней треугольной неизвестной матрицей $X^+\in R^+_{n\times n}$, а также неизвестной части прогибов в этих точках, моделируемых верхней треугольной с нулями на главной диагонали матрицей B_-, приводит к матричной модели, включающей матричное уравнение (3). Оно является частным случаем уравнения (7), соответствующим $X_-=(0)$, где через (0) обозначена нулевая матрица из $R_{n\times n}$. Уравнение (7), в свою очередь, – частный случай (9). Применением проектора p^+, уравнение (3) сводится к (2) с неизвестной нижней треугольной матрицей $X^+\in R^+_{n\times n}$. Уравнение (2) является моделью задачи отыскания только матрицы $X^+\in R^+_{n\times n}$, моделирующей силы, в предыдущей задаче. Если найти $X^+\in R^+_{n\times n}$, то B_- для (3) найдется из формулы:

$$B_-=AX^+-B^+. \tag{10}$$

Если при тех же условиях нагрузка в $n\times n$ точках "пакета" моделируется матрицей $X=X^++X_-$, где $X_-\in(R_{n\times n})_-$ – известная верхняя треугольная матрица с нулями на главной диагонали, то отыскание X, в существенном, сводится к нахождению неизвестной нижней треугольной матрицы $X^+\in R^+_{n\times n}$ из матричного уравнения (6). Матрица $X_-\in(R_{n\times n})_-$ моделирует, при этом, заданную часть нагрузки. Уравнение (6) является частным случаем (8). Задача отыскания неизвестной части нагрузки и прогибов при заданной матрице влияния A и матриц $X_-\in(R_{n\times n})_-$, $B^+\in R^+_{n\times n}$, моделирующих, соответственно, известную часть нагрузки и прогибов при этом сводится к нахождению матриц $X^+\in R^+_{n\times n}$, $B_-\in(R_{n\times n})_-$ из матричного уравнения (7). Уравнение (7), получается из (9), – при $A_1=A$, $A_2=E$, E – единичная матрица из $R_{n\times n}$, – и выборе нижних индексов +, –. Аналогичная ситуация в задачах определения активных сил по соответствующим реакциям "пакета" балок, рам и подобных. Ограничимся далее, преимущественно, задачами, приводящими к (2), (6).

3. Матричные представления решений уравнений (2), (6)

3.1. Пусть в рассматриваемой задаче получено матричное уравнение (2) или (6) относительно моделирующей совокупность неизвестных величин матрицы $X^+\in R^+_{n\times n}$, $n\ge 2$, $n\in N$. При существовании решения $X^+\in R^+_{n\times n}$ уравнения (2) или (6) с заданными – матричным коэффициентом $A\in R_{n\times n}$ и правой частью $B^+\in R^+_{n\times n}$, – матрица X^+ удовлетворяет также уравнению (3) или (7), соответственно, с $B_-\in(R_{n\times n})_-$:

$$B_-:=[AX^+]_-,\qquad\qquad [B_-:=[A(X^++X_-)]_-]. \tag{11}$$

Обратно, если некоторые матрицы $X^+ \in R^+_{n\times n}$, $B_- \in (R_{n\times n})_-$ удовлетворяют (3) или (7), то, применяя проектор p^+ к (3), (7) убедимся, что X^+ удовлетворяет уравнению (2) или (6), соответственно. Следовательно, изучая разрешимость уравнений (2), (3), (6), (7) в соответствующих подкольцах матриц, достаточно ограничиться уравнением (6), из которого (2) получается при $X_- = (0)$. Можно показать, что, не уменьшая общности, достаточно ограничиться (2) с неизвестной $X^+ \in R^+_{n\times n}$.

3.2. Важную роль при построении формул для матриц X^+, Y^-, $B_\pm$, C_+ – составляющих решений матричных уравнений (2) – (9) и, в частности, (2), (6) играют правильные факторизации обратных для матриц-коэффициентов: A_1^{-1}, A_2^{-1}, A^{-1} – т.е. их разложения на обратимые в соответствующих подкольцах треугольные и диагональные множители [4, 6, 7]. Эти факторизации будем нормировать условием: на диагонали матриц R^+, T^- расположены только числа “1”.

Пусть $A \in R_{n\times n}$, $n \geq 2$, $n \in N$ и $|A| \neq 0$. Тогда и главный минор порядка n матрицы A^{-1}, совпадающий с её определителем, необходимо, отличен от нуля. Если, кроме того, все остальные последовательные главные миноры матрицы A^{-1} отличны от нуля, то согласно теореме о разложении матрицы на треугольные множители ([8], С.50; теорема 2 при $r = n$) имеется нормированная правильная левая факторизация [4, 6, 7, 10] :

$$A^{-1} = R^+ S^0 T^-, \tag{12}$$

где $R^+ \in R^+_{n\times n}$ – нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали; $S^0 \in R^0_{n\times n}$ – диагональная, а $T^- \in R^-_{n\times n}$ – верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали; причём R^+, S^0, T^- – обратимы в своих подкольцах $R^{+,0,-}_{n\times n}$, соответственно. Для фактических разложений можно использовать соответствующие результаты [8], С. 50 – 52, пакеты компьютерного математического обеспечения типа MathCad, MathLab и др. Используя терминологию из [1, 6, 7, 10] и известные положения ([8], С. 27; [9], С. 137 – 141; [4], P. 276 – 278), можно утверждать, что $R_{n\times n}$, $n \geq 2$, $n \in N$ является кольцом с факторизационной парой (ФП) ($R^+_{n\times n}, R^-_{n\times n}$). Эта ФП порождается проекторами p^+, p^-, введенными выше. Поэтому результаты [6] применимы. В силу (12), из теоремы 10 ([6], С. 17, 18) при $R = R_{n\times n}$, $x^+ = X^+$, $b^+ = (B^+ - AX_-)^+$ заключаем, что справедлива следующая

Теорема. Пусть $A \in R_{n\times n}$, $n \geq 2$, $n \in N$ неособенная матрица и все последовательные главные миноры её обратной $A^{-1} \in R_{n\times n}$ отличны от нуля, а матрица $X_- \in (R_{n\times n})_-$ задана произвольно. Тогда при любой правой части $B^+ \in R^+_{n\times n}$ матричное уравнение (6) имеет одно и только одно решение $X^+ \in R_{n\times n}$. Его можно определить по формуле:

$$X^+ = R^+ S^0 [T^- B^+ - S^{0\prime} R^{+\prime} X_-]^+, \tag{13}$$

где $S^{0\prime} := (S^0)^{-1}$, $R^{+\prime} := (R^+)^{-1}$ – обратные матрицы.

Отметим, что вместо теоремы 10 [6] можно использовать теорему 1 [10], С. 193 при $R = R_{n\times n}$, $a_1 = A$, $a_2 = E$ (E – единичная матрица $R_{n\times n}$), $x^+ = X^+$, $b^+ = (B^+ - AX^+)^+$.

Следствие. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда при любой правой части $B^+ \in R^+_{n\times n}$ матричное уравнение (2) имеет одно и только одно решение $X^+ \in R^+_{n\times n}$. Его можно определить по формуле:

$$X^+ = R^+S^0[T^-B^+]^+ \tag{14}$$

Укажем, что следствие вытекает также из теоремы 1 [10], С. 193.

3.3. Объединяя рассмотренное приходим к следующему выводу. При условиях теоремы всякая задача (например, задача механики, поставленная для "пакетов" балок, рам, ферм) с неизвестной, моделируемой как $X^+ \in R^+_{n\times n}$, $n \geq 2$, $n \in N$, разрешимая или неразрешимая лишь одновременно с матричным уравнением (6) относительно X^+, – известной обобщённой матрицей влияния $A \in R_{n\times n}$ и любыми наперёд заданными величинами, моделируемыми матрицами $X_- \in (R_{n\times n})_-$, $B^+ \in R^+_{n\times n}$ в (6) имеет одно и только одно решение $X^+ \in R^+_{n\times n}$. Его можно найти по формуле (13). Формула (13) позволяет единообразно строить решения задач, моделируемые матрицами $X^+ \in R^+_{n\times n}$ при любых величинах, моделируемых правой частью (6) $B^+ \in R^+_{n\times n}$, если разложение (13) выполнено.

3.4. Укажем в заключение на одно из приложений изложенного. Рассмотрим "пакет" из трёх плоских статически неопределимых рам, основные системы которых совпадают. Степени статической неопределимости рам равны 3, 2, 1, соответственно. На каждую раму действует плоская произвольная, в общем случае отличная от других, система сил. Предполагаем жёсткости при изгибе ригелей и стоек рам известными.

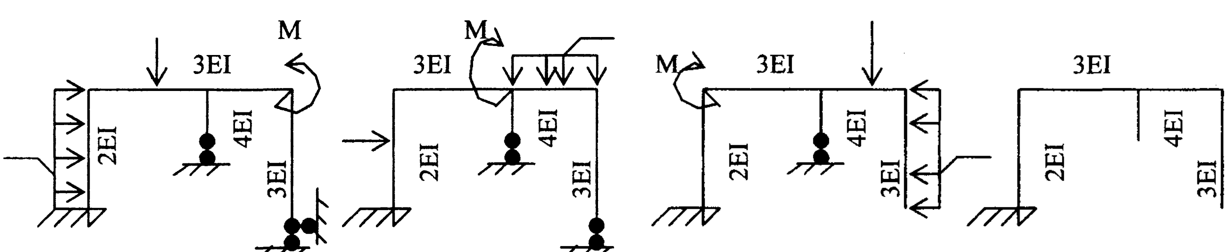

Рис. 1

Требуется матричным методом, одновременно, определить значения всех реакций, возни

кающих в "лишних" связях, при действии на "пакет" заданных нагрузок (Рис. 1) и соответствующие перемещения.

Опираясь на метод сил, решение задачи можно свести к решению матричного уравнения (3), где A – матрица податливости основной системы (Рис. 1, d); B^+ – нижняя треугольная матрица, элементами которой являются перемещения точек m_1, m_2 основной системы по направлению связей, накладываемых на рамы "пакета" в этих точках, от поочерёдного действия на неё заданных нагрузок; B_- – верхняя треугольная матрица, элементами которой являются оставшиеся неизвестными перемещения точек m_1, m_2 в статически неопределимых рамах (Рис. 1, в, с); X^+

– нижняя треугольная матрица, искомые элементы которой являются величинами реакций "лишних" связей рам "пакета", при действии соответствующих нагрузок (Рис. 1):

$$A:=\begin{bmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\delta_{13}\\ \delta_{21}&\delta_{22}&\delta_{23}\\ \delta_{31}&\delta_{32}&\delta_{33}\end{bmatrix},\ B^{+}:=-\begin{bmatrix}\Delta_{12}&0&0\\ \Delta_{21}&\Delta_{22}&0\\ \Delta_{31}&\Delta_{32}&\Delta_{33}\end{bmatrix},B:=-\begin{bmatrix}0&\Delta'_{12}&\Delta'_{13}\\ 0&0&\Delta'_{23}\\ 0&0&0\end{bmatrix},\ X^{+}:=\begin{bmatrix}x_{11}&0&0\\ x_{21}&x_{22}&0\\ x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{bmatrix}. \quad (16)$$

При выполнении условий теоремы, искомое решение единственно и получается по формулам (14), (11), (12), (16), где положено: $X_{-}:=(0)$; $S^{0}:=(S_1^{0})^{-1}$, $R^{+}:=(R_1^{+})^{-1}$, $T^{-}:=(T_1^{-})^{-1}$; $A=T_1^{-}S_1^{0}R_1^{+}$; – T_1^{-}- верхняя треугольная, S_1^{0}-диагональная, R_1^{+}- нижняя треугольная матрицы из $R_{3\times3}$. Причём на главных диагоналях T_1^{-}, R_1^{+} расположены только единицы.

Литература. 1. Полетаев Г.С. О постановках, матричных моделях некоторых обратных задач механики балок и представлениях факторизованных матриц влияния // Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности. – С. – Пб. – 2000. – С. 146 – 148. **2.** Полетаев Г.С., Солдатов Л.И. О построении факторизационной матрицы влияния "пакета" балок и рам // Там же, С. 142 – 145. **3.** Полетаев Г.С., Солдатов Л.И. Об одном классе обратных задач статики. I международная конференция "Экологическое моделирование и оптимизация в условиях техногенеза". – Солигорск, Беларусь, – 1996. – С. 149 – 150. 4. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators I: Algebraic Theory and Examples // J. Funct. Anal. – 1972. – 9, No3. – P. 262 – 295. **5.** Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. // Успехи мат. наук. – 1958. – 13, вып. 5. – С. 3 – 120. 6. Полетаев Г.С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами. – Киев, 1988, – 20 с. – (Препринт/ АН УССР, Институт математики: 88. 31). 7. Полетаев Г.С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой // Укр. матем. журн. – 1991. – 43, №9. – С. 1201 – 1213. 8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 549 с. 9. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с. 10. Полетаев Г.С. Об однопроекторных второго порядка уравнениях с правильно факторизуемыми коэффициентами в кольце с факторизационной парой // Вестник Херсонского гос. техн. ун-та – 2000. – №2 (8). – С. 191 – 195.

УДК 624.046:62-752

Э.И. Астахов, В.В. Кудин, А.С. Стаценко, В.М. Сидорович

РАСЧЕТ ВИБРОАКТИВНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ В ЗОНЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВИБРОАКТИВНЫХ МАШИН

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Современные промышленные предприятия имеют разнообразное механическое оборудование, создающее при работе повышенные уровни вибраций и шума, передающиеся как на соседние здания и сооружения, так и наработающих там людей. Повышенные вибрации зданий и сооружений могут привести к снижению прочности и потере устойчивости их конструктивных элементов и даже, в некоторых случаях к авариям и разрушениям, а также к нарушению технических характеристик соседнего оборудо-