чи линейной теории вязкоупругости без учета сил трения и сцепления. - Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 6. - с. 63-74. 3.Громов В.Г. О математическом содержании принципа Вольтерра в граничной задаче вязкоупругостию. - ПММ, 1971, т. 36. - с. 869-878. 4.Работнов Ю.Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1991. - 196 с. 5.Прокопович И.Е. О решении плоской контактной задачи теории ползучести. - ПММ, 1956, т. 20, в. 6, с. 680-687. 6.Рущицкий Я.Я. Об одной контактной задаче плоской теории вязкоупругости. - Прикладная механика, 1967, т. 3, в. 12. - с. 55-63. 7.Савин Г.Н., Рущицкий Я.Я. О применимости принципа Вольтерра. В кн.: "Механика деформируемых твердых тел и конструкций", М.: Машиностроение, 1975. - с. 431-436. 8.Теплый М.И. Контактные задачи для тел с круговыми границами. - Львов: Выща школа, 1980. - 176 с. 9.Lee E.H., Radok J.R.M., Woodward W.B. Stress analysis for linear viscoelastic materials. - Trans. Soc. Rheol., 1959, vol. 3, p. 41-59. 10.Volterra V. Lecons sur les fonctions de lisnes. - Paris: Gauther - Villard, 1913. - 230 p. 11.Yang Wei-hsuin. The contact problem for viscoelastic bodies, Journ. Appl. Mechanics, Pap. N 85-APMW-36 (preprint).

УДК 539.3

М.А.Журавков, А.О.Громыко, О.В.Громыко

О РАСЧЕТЕ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь

Создание ряда новых материалов в последнее десятилетие обязано бурному развитию техники и технологий. К числу таких материалов принадлежат, в частности, материалы, из которых выполнены многослойные пластины. Они имеют сравнительно нежесткие (обладающие малой жесткостью по сравнению с другими слоями) прослойки из полимерных материалов. Обычно расчет таких элементов тонкостенных конструкций производится по схемам, опирающимся на гипотезы Кирхгоффа-Лява, которые не учитывают деформаций поперечного сдвига и поперечной линейной деформации (так называемое обжатие). В этом случае многослойная пластина заменяется эквивалентной однородной с соответствующими приведенными средними характеристиками. Решению подобных задач особенно большое внимание было уделено в работах П.Ф.Папковича, Э.И.Григолюка, С.Г.Лехницкого, А.П.Прусакова, С.А.Амбарцумяна, А.В.Саченкова, А.Я.Александрова и других исследователей.

Учет поперечных сдвигов и обжатия, играющих в ряде задач существенную роль, производился в ряде работ. С.А.Амбарцумяном для слоистых анизотропных пластин и оболочек предложен ряд вариантов теории, учитывающей сдвиг. Применительно к трехслойным конструкциям этому посвящены работы А.Я.Александрова, А.П.Прусакова, Л.М.Куршина, Э.И.Григолюка, Е.Рейсснера, Джерарда и др. Уравнения равновесия многослойных пластин с легким заполнителем, в котором учитывается сдвиг, впервые получены, по-видимому, В.В.Болотиным, и одновременно для слоистых оболочек с жестким заполнителем при конечных прогибах П.П.Чулковым. Эти уравнения были выведены на основе гипотезы прямой линии, сформулированной Э.И.Григолюком. В дальнейшем этими авторами было опубликовано еще несколько работ, посвященных различным аспектам этого вопроса.

В настоящей работе рассматривается вариант теории расчета пластин, составленных из жестких и маложестких трансверсально изотропных слоев. При этом гипотезы Кирхгоффа-Лява для каждого слоя заменяются гипотезами о линейном по толщине распределении тангенциальных и нормальных перемещений, что дает возможность учесть не только поперечные сдвиги, но и обжатие.

Опираясь на гипотезу линейного распределения по толщине нормальных и тангенциальных перемещений, при помощи принципа возможных перемещений можно вывести уравнения равновесия и граничные условия. Преобразовывая уравнения равновесия и переходя от усилий и моментов к перемещениям, приходим к матричным уравнениям. Дополнительное предположение о равенстве нулю коэффициентов Пуассона μ_{13} и μ_{23}, позволяет разделить задачу о деформации пластины на плоскую и задачу изгиба. Плоская задача введением функции напряжений сводится к бигармоническому уравнению. Задача изгиба в матричной записи дает отдельные уравнения относительно скалярного и векторного потенциалов. Эти уравнения для случая, когда сдвиг и обжатие учитываются во всех слоях или когда жесткостью несущих слоев можно пренебречь, записываем в следующем виде:

$$[A_1]\lambda^2\{X\}-[A_2]\{X\}-\{K\}\lambda^2 w=-\{Q\}, \qquad [A_3]\bar{\lambda}^2\{\Omega\}-\{\Omega\}=0.$$

Здесь $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$ - блочные матрицы, структура которых зависит от общего строения пластины. Вектор $\{X\}=\{X(\vec{G},\vec{W})\}$, где $\vec{G}$ - скалярный потенциал, число координат которого равно общему числу слоев, а $\vec{W}$ - вектор обжатия и w_i - значение обжатия в i-том слое. λ^2 и $\bar{\lambda}^2$ - операторы соответственно равные $\lambda^2=\dfrac{h_\Sigma^2\nabla^2}{\xi}$; $\bar{\lambda}^2=\dfrac{1-\mu}{2}\lambda^2$.

Здесь h_Σ - общая толщина пластины, μ - коэффициент Пуассона, а ξ - нормирующий множитель. w - прогиб исходной плоскости, с которой связаны координаты α_j ($j=1,2$), $\{Q\}$ - вектор, выражающийся через параметры толщин слоев h_i и внешние усилия.

Вектор $\{\Omega\}$ для трехслойных пластин (как показано в ряде работ) связан с краевым эффектом, порождаемым крутящими моментами и продольными связями. В большинстве задач они несущественны, и поэтому можно положить $\{\Omega\}=0$. Основную роль в изгибе пластин играет вектор $\vec{G}$. Введением функции перемещений p уравнение относительно $\{X\}$ и w удовлетворяется тождественно: $\{X\}=\sum_{k=0}^{s_*}\vec{\gamma}_k\lambda^{2k}p$; $w=\sum_{k=0}^{s_*}\omega_k\lambda^{2k}p$.

При этом для $\vec{\gamma}_k$ могут быть получены рекуррентные соотношения, а ω_k оказываются коэффициентами характеристического полинома матрицы $[S]=[A_1][A_2]^{-1}$. Функция p определяется из последнего оставшегося уравнения равновесия, которое дает $D\nabla^2\nabla^2\sum_{k=0}^{s_*}\vartheta_k\lambda^{2k}p=q^+ + q^-$.

Здесь q^+ и q^- - внешняя нагрузка, $D = \frac{Eh^3\theta}{12(1-\mu^2)}$ - приведенная жесткость пластины, отличающаяся от обычного значения коэффициентом θ. $0<\theta<3$ - коэффициент составности пластины, который может быть выражен через характеристики отдельных слоев. Для однородных пластин и пластин с бесконечным числом слоев $\theta = 1$. ϑ_k -коэффициенты, выражающиеся через ω_k и $\vec{\gamma}_k \cdot \vec{\theta}_k$, где $\vec{\theta}_k$ - вектор, связанный со структурой. s_* - предел суммирования, который определяется порядком матрицы $[S]$. Если во всех слоях учитываются сдвиги и обжатие, то $s_* = 2s$, но $\vartheta_{2s} = 0$. При наличии l слоев, в которых не учитывается обжатие, получим $s_* = 2s - l$, в силу усечения матриц и векторов, входящих в уравнения. В случае, когда обжатием пренебрегаем во всех слоях, получим $s_* = s - l$, если l - число несущих и $s_* = s$, $\vartheta_s = 0$, если несущих слоев нет. В случае, когда обжатием пренебрегаем во всех слоях, матрица $[S]$ - осцилляционная и разрешающее уравнение имеет только действительные, простые и положительные характеристические корни. В этом случае однородное решение для функции p может быть представлено в виде суммы $p = p_0 + \sum_{k=1}^{s_*} p_k$, где p_0 - решение бигармонического уравнения, а p_k - решения метагармоничеоких уравнений типа $\lambda^2 p_k = \beta_k p_k$, $\beta_k > 0$. Для коэффициентов ϑ_k, ω_k и координат ряда векторов получены асимптотические оценки.

На практике часто встречаются симметричные и регулярные пластины. Для симметричных пластин введением симметричных и асимметричных составляющих величин, рассмотренных выше, порядок уравнений понижается. Однако, при этом увеличивается число искомых функций перемещений, хотя прогиб зависит лишь от симметричной составляющей функции p. В случае симметричных пластин регулярного строения пластина состоит из чередующихся слоев только двух типов. Слои одного типа имеют одинаковые механические и геометрические характеристики. Для случая, когда сдвиг и обжатие учитываются во всех слоях, могут быть получены выражения первых трех коэффициентов $\omega_0, \omega_1, \omega_2$, векторов $\vec{\gamma}_0, \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ и коэффициентов $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2$ для произвольного числа слоев в пластинке. Их обычно достаточно для приближенного решения полученных уравнений. Так как коэффициенты перед производными содержат малый параметр, то это позволяет в зависимости от характера нагрузки и краевых условий ограничиваться необходимым порядком уравнений. Это важно, поскольку в исходной системе все уравнения равноправны и не допускают никаких усечений. С математической точки зрения введение функций перемещений равносильно разложению напряженно-деформированного состояния по собственным функциям положительно определенного оператора, выраженного в матричной форме и специально приспособленного к структуре данной слоистой пластины. Усечение разрешающего уравнения соответствует удержанию главных коэффициентов в этом разложении.

Для общего случая регулярной симметричной пластины, когда обжатие и сдвиги учитываются во всех слоях, получены предельные выражения основных коэффициентов. Детально рассмотрен случай, когда слои первого типа являются несущими, а в слоях второго типа учитывается поперечный сдвиг без обжатия.

Рассмотрены примеры конкретных расчетов в сравнении с данными проведенных экспериментов. В частности, исследован изгиб трехслойной балки, свободно опертой по концам. Дано сравнение экспериментального значения прогиба с теоретическим. Показано, что значение прогиба предлагаемой теории, учитывающей обжатие и сдвиги, хорошо согласуется с экспериментальными данными (разница не более 4-5%).

УДК 539.3

А.И. Веремейчик

К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Брестский государственный технический университет
Брест, Беларусь

Рассмотрим систему ДУ нестационарных краевых задач классической термоупругости [1] для изотропных материалов:

$$\mu\, u_{i,kk} + (\lambda+\mu)u_{k,ki} = (3\lambda+2\mu)\alpha_T T_{,i} - X_i, \tag{1}$$

$$T_{,kk} - \frac{1}{a}\dot{T} = -\frac{q}{a}, \tag{2}$$

где: λ и μ - коэффициенты Ламе, α_T - коэффициент линейного теплового расширения, a - коэффициент температуропроводности, $X_i(x,t)$ - массовые нагрузки, G - источник тепла - количество тепла, возникающее в единицу времени в единице объема, c_ε - удельная объемная теплоемкость.

С помощью метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) осуществляется переход от дифференциальных уравнений к интегральным. Для различного рода краевых задач построены ГИУ нестационарных задач термоупругости [1]. Численная реализация интегральных уравнений производится с помощью метода механических квадратур.

Замена интегралов конечной суммой осуществляется путем разбиения границы области (плоская кривая с кусочно-непрерывной кривизной) на отрезки Δl_i с центрами P_i. Потребуем, чтобы интегральные уравнения удовлетворялись только в точках P_i. Тогда вместо интегрального уравнения получим систему равенств

$$\Delta T_m(P_k,t) = V(P_k,t) + V^\circ(P_k,t) - \int_0^t\int_L [Q_*(P_k,P,t-\tau)T(P,\tau) - \tag{3}$$

$$- T_*(P_k,P,t-\tau)Q(P,\tau)\,]dL_y d\tau.$$

Разобьем интеграл по всей границе на сумму интегралов по отрезкам Δl_i

$$\Delta T_m(P_k,t) = V(P_k,t) + V^\circ(P_k,t) - \int_0^t\sum_{i=1}^{n}\int_{\Delta l_i} [Q_*(P_k,P,t=\tau)T(P,\tau) - \tag{4}$$

$$- T_*(P_k,P,t-\tau)Q(P,\tau)]dld\tau$$

Для получения алгебраической системы линейных уравнений для неизвестных $Q(P_k)$ представим сумму (4) в виде