М.:Машиностроение,1978.-208 с. 3.Мельников Э.Л. Холодная штамповка днищ. - М.: Машиностроение, 1986.-192 с. 4.Попов Е.А. Основы теории листовой штамповки. - М.:Машиностроение,1964-171 с. 5.Бирюков Н.М. Формообразование деталей из листового материала гидроэластичной средой по жесткому пуансону.- М.:МАИ,1995.-120 с. 6.Исаченков В.Е. Исследование процесса формообразования эластичной жидкостной средой крупногабаритных гофрированных элементов из листа. Дис… канд.техн.наук .- М.:МАИ,1975.-156 с. 7. Жигилий С.В., Короткевич В.Г. Исследование технологии получения тонкостенных оболочковых деталей. В сборнике «Материалы МНТК «Новые конкурентноспособные и прогрессивные технологии».- Могилев,2000.- С.68-69.

УДК 621.7.043

**И. А. Миклашевич**

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОЕКТИРОВАНИЮ МАТЕРИАЛОВ С ЗАДАННЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ.

*Кафедра теоретической механики БГПА*
*Минск , Республика Беларусь*

Введение

Прогнозирование направления роста трещин в композиционных и неоднородных материалах необходимо для проектирования изделий с заданными эксплуатационными характеристиками. Работа посвящена определению траектории трещины в неоднородной среде при плоском нагружении. В разделе 1.1 рассмотрены методы определения эффективных характеристик композитов, в разделе 1.2 обсуждаются подходы к прогнозированию траектории распространения трещины. В разделе 2.1 рассматривается распространение трещины в неоднородной среде как вариационная проблема для энергии разрушения. В разделе 2.2 рассматривается распространение трещины вдоль геодезической в среде с метрическим тензором, зависящим от дефектности среды. Результаты обсуждаются в разделе 3.

## *1. Эффективные характеристики среды и распространение трещины*

### *1.1. Описание среды.*

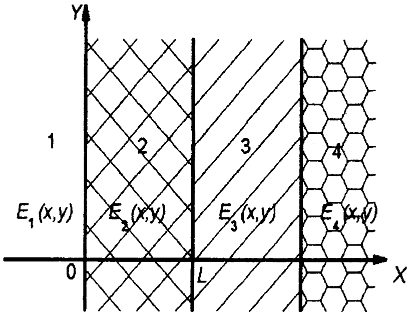
В теории трещин основная идеализация связана с выбором модели среды, в которой распространяется трещина. Степень соответствия модели реальной среде обычно определяется структурной чувствительностью ее параметров.

Для механики структурно - неоднородных сред влияние структуры среды учитывается введением неоднородности в модели. Общая классификация неоднородных сред приводится в работе Ломакина [i]. Им предложено условно разделить неоднородные среды на кусочно -, микро- и случайно - неоднородные. Дальнейшее развитие моделей неоднородных сред, корректная постановка статистических задач в механике деформируемого твердого тела отражены в работах Берана [ii] Крёнера [iii], Ломакина [iv]. Основные результаты были подытожены в [v].

Одним из методов описания структуры среды бездефектного материала является метод корреляционных функций, который позволяет учесть структурные особенности материала интегральным образом. С помощью корреляционной функции описываются свойства эффективной среды, которая является приближением к реальной среде. Особый интерес проблема эффективных характеристик вызывает в связи со всё более широким практическим использованием композиционных материалов, в которых структурные факторы играют определяющую роль.

***1.2. Существующие представления***

Эффективные характеристики среды необходимы для прогнозирования распространения трещин в композиционных материалах. Основная масса работ посвящена распространению трещины в однородной среде. Так, Лу и Комминоу [vi] рассматривали синусоидальную трещину в изотропной среде. Они свели задачу нахождения касательных напряжений к системе сингулярных дифференциальных уравнений. В работе [vii] предлагается проводить локальный расчёт траектории трещины и глобальную траектории определять последовательными приближениями. Причины отклонения траектории от прямолинейной рассмотрены в [viii].




Более широкое использование композиционных материалов стимулировало дальнейшую разработку проблем механики неоднородных сред. Фокин и Шермегор широко использовали известный из статистической физики аппарат корреляционных функций для расчета свойств композиционных материалов [ix].

Среди характеристик материала, важных для механики разрушения, большое значение имеет поверхностная плотность энергии. В последнее время предложено вычислять её на основе квантовой механики, что позволяет избежать проведения трудоёмких экспериментов. Это тем более актуально, поскольку наряду с "классическим" подходом к рассмотрению механических процессов в неоднородных средах, существует подход [x, xi, xii] существенно использующий квантовые представления. Этот подход близок к вариационному принципу теории трещин [xiii]. Это позволило сформулировать критерии роста трещины и разрушения в терминах плотности энергии [xiii, xiv], выделяющейся при разрушении. Для ГЦК решетки было показано [xv], что разрушение происходит в направлении максимальной скорости диссипации энергии.

На основании вариационного принципа теории трещин и известных результатов могут быть сформулированы основные принципы обобщённого геометрического подхода к распространению трещины в неоднородной среде.

## ***2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ.***

***2.1. Стационарная траектория трещины***

Рассмотрим неоднородную упругую двумерную среду, в которой связь между напряжениями $\sigma(x,y)$ и деформациями $e(x,y)$ имеет вид

$$\sigma(x,y) = E(x,y)e(x,y).$$

$E(x,y)$ - модуль Юнга и $\sigma(x,y)$ зависят от пространственных координат. Рассматривается стационарная траектория. Частично задача уже была рассмотрена ранее [xvi].

Пусть неоднородная плоскость находится под действием растягивающих нагрузок, приложенных на бесконечности. Для нахождения возможной траектории воспользуемся вариационным принципом теории трещин [xiii]. Макроскопический критерий разрушения основывается на расчёте работы разрушения под действием внешних сил и может быть записан в виде

$$\delta \int_{\Sigma} \gamma + \sigma(x,y)_{ij} n_i u_j d\sigma = 0$$

$\gamma$ - плотность поверхностной энергия разрушения, $\sigma_{ij} v_j n_i$ - нормальное напряжение на косой площадке, $n_i$ - направляющий косинус i-й внешней нормали, $d\sigma$ - элемент поверхности $\Sigma$, $\delta$ означает полную вариацию.

Пусть плоскость состоит из i жестко скрепленных кусочно-непрерывных частей (Рис.1.). Модули Юнга i – й полосе обозначены через $E_i(x,y)$. В предельном случае уменьшения толщины слоёв кусочно – неоднородная среда переходит в непрерывно - неоднородную, что позволяет распространить метод на случай непрерывного распределения свойств материала.

Без ограничения общности мы можем считать, что трещина движется вдоль оси X в пределах полосы шириной L. В неоднородной среде траектория трещины y=y(x) представляет собой кривую, направление которой зависит от физико-механических свойств среды и, в общем случае, от напряженного состояния $\sigma_{ij}(x,y)$.

Траектория ищется, исходя из положения о подобии механических и оптических явлений распространения волны [xvii]. Обобщая [xv], мы принимаем, что траектория трещины суть линия, на которой функционал работы

$$\delta U = \delta \int_0^L \sigma(x,y)_{ij} n_i u_j ds = 0 \tag{1}$$

где $ds$ – элементарная длина траектории, принимает экстремальное значение. Уравнение Эйлера – Лагранжа для функционала (1) имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{Q^2}+\frac{d}{dx}\frac{y'}{Q\sqrt{1+y'^2}}=0;$$

$$Q=\left(\sigma_{ij}n_i u_j\right)^{-1},\; y'=\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Уравнение (2) приводится к виду [xvi]:

$$y''\left(\frac{1}{1+y'^2}\right)-y' f_1(x,y)+f_2(x,y)\left(1+y'^2\right)=0, \tag{3}$$

$$f_1(x,y)=\frac{\partial \ln Q(x,y)}{\partial x},\quad f_2(x,y)=\frac{\partial \ln Q(x,y)}{\partial y}.$$

Анализ уравнения (3) в линейном приближении представлен в [xvi]. Рассмотрим связь траектории трещины с метрическими свойствами пространства.

### *2.2. Метрические свойства среды и распространение трещины*

Отметим, что элемент длины траектории трещины в уравнении (3) для плоской задачи принимался как

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

В общем случае метрического пространства элемент длины имеет вид

$$dl=\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial s}\frac{\partial x^\nu}{\partial s}}ds,$$

$g_{\mu\nu}$ - метрический тензор пространства, $s$ - натуральный параметр кривой, $x$ - локальная координата. Греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3.

Поскольку трещину принципиально возможно рассматривать как совокупность точечных и линейных дефектов, то полевое представление о трещине может быть сформировано как обобщение калибровочной теории дислокаций. При этом могут быть учтена пластическая деформация, возникающая при распространении трещины.

Исходя из вариационного принципа, можно утверждать, что трещина двигается вдоль геодезической. Уравнение геодезической в случае аффинно-метрического пространства имеет вид:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0$$

$\Gamma$ - объект связности (символ Кристоффеля первого рода) [xviii]. Известно, что символы Кристоффеля выражаются через метрический тензор [xviii,xix]

$$\delta U = \delta \int_0^L \sigma(x, y)_{ij} \, n_i u_j ds = 0 ,$$

$$\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} = \Gamma_{\sigma\lambda,\rho} g^{\rho\mu} .$$

Через объект связности можно выразить остальные геометрические характеристики пространства: тензор кривизны $R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$, тензор кручения $T^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$, тензор сегментарной кривизны $\Omega^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$. В зависимости от учитываемых типов дефектов, мы должны рассматривать различные типы пространства. Так, например, пространства абсолютного параллелизма $R = \Omega = 0; T \neq 0$ описывают кристаллы с точечными дефектами, $R \neq 0; \Omega = 0; T \neq 0$ - кристаллы с дислокациями и дисклинациями. Таким образом, дефекты кристалла являются носителями соответствующей геометрии пространства и влияют на его метрику.

При распространении трещины естественным параметром, определяющим траекторию, будет энергия. Лагранжиан, описывающий теорию упругости без учёта дефектов может быть представлен [xx], как $L_0 = \Im + \Psi(C_{AB})$,

где $\Im$ - кинетическая энергия, $\Psi(C_{AB})$ – потенциальная энергия, являющаяся функцией тензора деформации Коши. В общем случае энергия материала, содержащего дефекты, имеет вид $s = \left(S, \varepsilon_{\alpha\beta}, R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}, T^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}, \Omega^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}\right)$, где $S$- энтропия, $\varepsilon_{\alpha\beta}$- тензор деформации, характеризующий структуру материала. При этом в случае пластической деформации тензор деформации представляется как сумма трёх компонент $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{el}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{elpl}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{pl}_{\alpha\beta}$. Так, $\varepsilon^{el}_{\alpha\beta}$- тензор упругой деформации, $\varepsilon^{elpl}_{\alpha\beta}$ - тензор совместной упругопластической деформации, связанный с дефектами материала, $\varepsilon^{pl}_{\alpha\beta}$ - тензор пластической деформации бездефектного материала. Общий калибровочный лагранжиан не совпадает с $L_0$ и содержит два слагаемых: лагранжиан $L_t$, связанный с удлинением производной и лагранжиан $L_m$, связанный с калибровочными полями, $L = L_t + L_m$. При конструировании материала мы можем учесть и случайное распределение свойств материала, и случайное распределение дефектов. Если рассматривать систему с точечными дефектами, то ,

$$L = -\frac{1}{4g}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} - a|\Psi|^2 - \frac{b}{2}|\Psi|^4 + m\left|\tilde{\nabla}_{\mu}\Psi\right|^2 + L_m$$

где $\tilde{\nabla}_{\mu} = \partial_{\mu} - \Gamma_{\mu}$ - удлиненная ковариантная производная, $|\Psi(r)|^2 = \lim\limits_{|r-r'|\to\infty} \frac{S(r,r')}{S(r.r)}$- параметр порядка, $S(r,r')$ - корреляционная функция.

***Обсуждение результатов***

Полученное уравнение траектории трещины позволяет прогнозировать траекторию распространение трещины для сред с известным распределением свойств. В случае больших отклонений траектории от прямолинейной она должна искаться самосогласованным образом. Эта актуально в случае существования сильно неоднородного напряжённо-деформированного состояния или существенного изменения свойств материала вдоль длины траектории.

В то же время, для наиболее ответственных узлов, когда предпочтительней заранее планировать возможное направление распространения трещины, изменяя свойства материала можно конструктивно задать геодезическую. Для этого необходимо иметь информацию о распределения дефектов и искусственным образом откорректировать её в соответствии с необходимой траекторией.

Автор выражает искреннюю признательность профессору Чигареву А.В., с которым неоднократно обсуждались основные положения работы. Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования РБ (ГБ 00-123).

**Литература.** 1.Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел - М., - Изд-во МГУ, - 1976 2.Beran M.J. Statistical Continuum Theories. - New-York, -1968 3.Kroner E. Statistical Continuum Mechanics. - Springer-Verlag,- Wien - New York, -1968 4.Ломакин В.А. Статистические задачи механики деформируемых тел.- М., - Наука,- 1970 5.Шермегор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред.- М.: Наука, 1977, 400 с. 6.Lu Xiaoping, Comminou Maria // Eng. Fract. Mech., - 1989, - v. 34, - N3, - p. 649-656. 7.Shukla A., Chona R., Zhu C. // Adv. Fract. Res.: Proc. 7th Int. Conf. Fract. (ICF 7) Houston, Tex., 20 - 24 March 1989, - vol. 1, - Oxford, - 1989, - p. 753-761. 8.Nakasa Keijiro // Bull. Jap. Inst. Metals, - 1989, - v. 28, - N9, - p. 753-759. 9.Фокин А.Г., Шермегор Т.Д. // ПМТФ, - 1969, - N1 10.Черепанов Г.П. // Физ-хим. механика материалов,- 1986, N1,- с. 36-44. 11.Миклашевич И.А. Асанович В.Я. Бурылев В.П. Вопросы микроскопической теории связи в биметаллических соединениях. Деп. в ВИНИТИ N 4325-1389. Краснодар, - 1989г., - 65 стр. 12.Миклашевич И.А. Асанович В.Я. Бурылев В.П. // Адгезия распл. и пайка матер., - 1991г., - в. 25, - с. 69-74. 13.Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения М.:Наука, 1985, 504с. 14.Миклашевич И.А. // Материалы 50 научно-технической конференции БГПА, в 2-х ч., ч. 1, Минск: 1994, с. 62 15.Short J.S., Hoeppner D.W. // Eng. Fract. Mech., - 1989, - v.33,- No 2, - p.165-173. 16.Чигарев А.В., Миклашевич И.А. // Доклады АН Беларуси, № 2, т. 39, 1995, с. 114. 17.Блейк Р. Анкивич А. // Физика за рубежом, сер. Б,'88,- Москва,- 1988,- 160с.,- с.33-58. 18Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967, 664с. 19.Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Наука,1971, 247с. 20.Кадич А., Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М.:Мир, 1987, 168с.

УДК 621.762

**Е.Е. Петюшик, А.Ч. Якубовский, Д.В. Божко,**
**А.А. Дробыш, В.В. Гармаза**

## ВЛИЯНИЕ ВИДА СТРУКТУРООБРАЗУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДИСКРЕТНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА МЕХАНИЗМ ИХ ПРЕССОВАНИЯ

*Белорусский национальный технический университет*
*Минск, Беларусь*

Достаточно развитый в настоящее время спектр способов прессования изделий самого разнообразного назначения из дискретных изначально материалов требует систематизации областей их применимости с целью наиболее эффективного использования и прогнозирования направлений развития. Такая систематизация предполагает отдельное рассмотрение взаимовлияния важнейших физико-механических и геометрических показателей исходного дискретного материала и структурных и каркасных свойств прессовок с учетом динамики их изменения в процессе прессования.

Вне зависимости от назначения и физико-механических свойств дискретных материалов кинематические и силовые параметры процессов их прессования, а также структурные и каркасные свойства прессовки, благодаря существованию структурной